リサージェンス理論に基づく量子非摂動解析

Resurgence Theory for Non-perturbative Quantum Analysis

Tatsuhiro Misumi

Akita University

REC for NS
research and education center for natural sciences
慶應義塾大学 自然科学研究教育センター

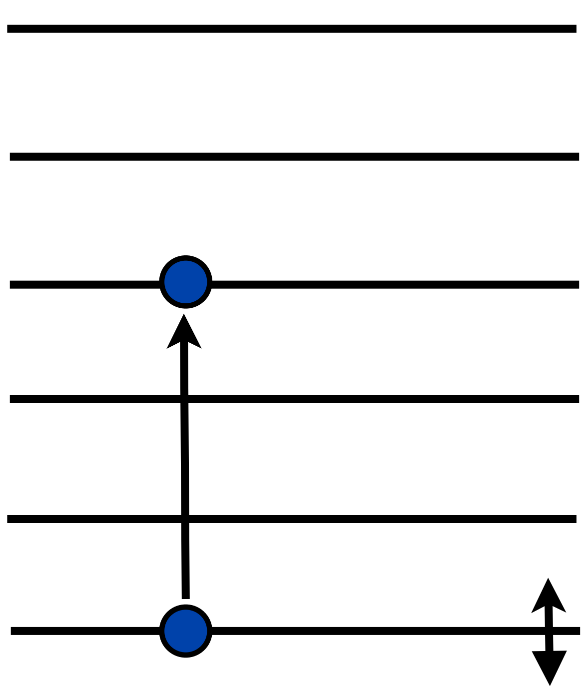
iTHEMS
RIKEN interdisciplinary Theoretical & Mathematical Sciences

TQFT2017@YITP 08/29/17

はじめに：摂動論とリサージェンス理論

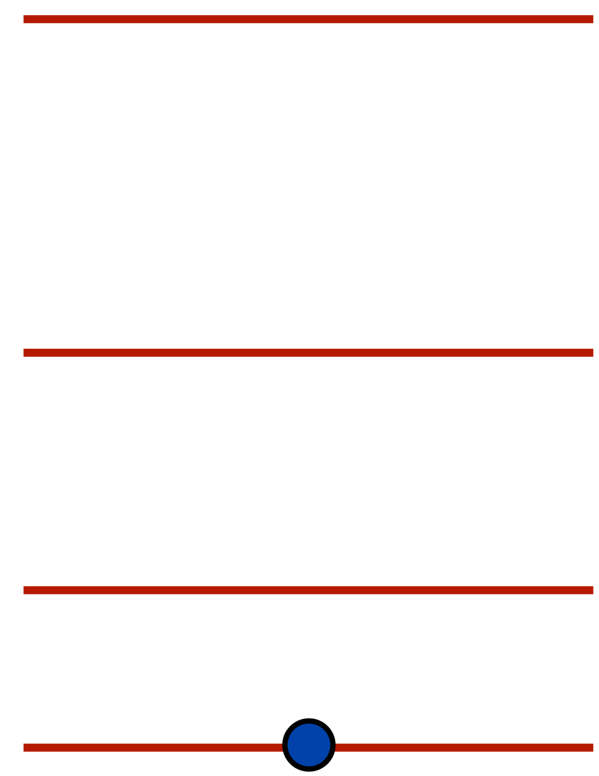
量子論における摂動論と非摂動解析

$$H = H_0 + g^2\, H' \qquad g^2 \ll 1$$



摂動論：H_0の固有状態に基づいて，量子揺らぎを計算

$$H = H_0 + g^2\, H' \qquad g^2 \sim 1$$



非摂動解析：摂動パラメタの大きな領域ではHを対角化し厳密な固有値を得る必要あり

経路積分と固定点

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \, \exp(-S[\phi]) = \sum_{\sigma \in \text{saddles}} Z_\sigma$$

自明な固定点(摂動的真空)

$$Z_0 = \sum_{q=0}^{\infty} a_q g^{2q}$$

摂動級数

非自明な固定点 $\quad \dfrac{\delta S}{\delta \phi} = 0$

$$Z_\sigma \propto e^{-S_{\mathrm{sol}}} \sim e^{-\frac{A}{g^2}}$$

非摂動的寄与

摂動級数と非摂動的寄与の関係

$$\sum_{q=0} a_q g^{2q} \quad \not\longleftrightarrow \quad \exp\left[-\frac{A}{g^2}\right]$$

摂動級数　　　　　　　　非摂動的寄与

「摂動的寄与と非摂動的寄与は関連付かない異なる寄与」
というのが一般的な見方

本当にそうだろうか？

摂動計算とボレル和

$$\left[H_0 + g^2 H_{\rm pert}\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

$$P(g^2) = \sum_{q=0}^{\infty} a_q g^{2q}$$

摂動級数（漸近級数と仮定）は
一般に階乗発散し収束半径0　$a_q \propto q!$

高次まで摂動計算を行っても意味のある情報は得られなさそうだが...

⇒ **ボレル変換**：有限の収束半径を持つ級数に変換
ボレル和：元の摂動級数を漸近級数として持つ解析関数

摂動計算とボレル和

$$\left[H_0 + g^2 H_{\rm pert}\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

$$P(g^2) = \sum_{q=0}^{\infty} a_q g^{2q}$$

摂動級数（漸近級数と仮定）は
一般に階乗発散し収束半径0 $a_q \propto q!$

$\Rightarrow$ $$BP(t) := \sum_{q=0}^{\infty} \frac{a_q}{q!} t^q$$ ボレル変換

$\Rightarrow$ $$\mathbb{B}(g^2) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{g^2} e^{-t/g^2} BP(t)$$ ボレル和

摂動計算とボレル和

$$\left[H_0 \, + \, g^2 H_{\rm pert}\right] \psi(x) \, = \, E\psi(x)$$

$$P(g^2) = \sum_{q=0}^{\infty} a_q g^{2q}$$

摂動級数（漸近級数と仮定）は
一般に階乗発散し収束半径0　$a_q \propto q!$

幾つかの例ではボレル和が厳密結果を与える！

$$\mathbb{B}(g^2) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{g^2} e^{-t/g^2} BP(t) \quad \Rightarrow \quad \text{厳密結果}$$

cf.) x^4 量子力学，N=2 SYM on S^4　　Watson-Nevalinna-Sokal(80)

摂動計算とボレル和

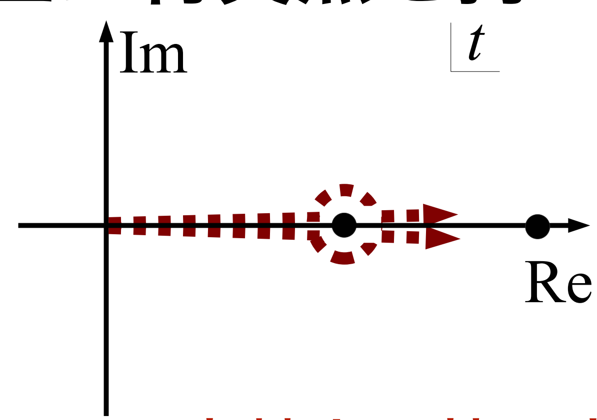
$$\left[H_0 + g^2 H_{\mathrm{pert}}\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

$$P(g^2) = \sum_{q=0}^{\infty} a_q g^{2q}$$

摂動級数（漸近級数と仮定）は
一般に階乗発散し収束半径0　$a_q \propto q!$

一般的にはボレル変換が正の実軸上に特異点を持つ

$$BP(t) := \sum_{q=0}^{\infty} \frac{a_q}{q!} t^q$$



$$\Rightarrow \quad \mathbb{B}(g^2 e^{\mp i\epsilon}) = \int_0^{\infty e^{\pm i\epsilon}} \frac{dt}{g^2} e^{-\frac{t}{g^2}} BP(t)$$

正実軸上の特異点のため
積分路に不定性

摂動計算とボレル和

$$\left[H_0 + g^2 H_{\mathrm{pert}}\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

$$P(g^2) = \sum_{q=0}^{\infty} a_q g^{2q}$$

摂動級数（漸近級数と仮定）は
一般に階乗発散し収束半径0　$a_q \propto q!$

$$\mathbb{B}(g^2 e^{\mp i\epsilon}) = \mathrm{Re}[\mathbb{B}(g^2)] \pm i\mathrm{Im}[\mathbb{B}(g^2)]$$

$$\mathrm{Im}[\mathbb{B}(g^2)] \approx e^{-\frac{A}{g^2}}$$

積分路の不定性に付随して
符合の不定性を持つ虚部が出現

この摂動ボレル和の不定虚部こそ非摂動寄与の情報を含む！

なぜ非摂動寄与の情報が摂動論に？

Ecalle (81)

◆ 常微分方程式のリサージェンス理論

$$F\left[z,\varphi(z),\frac{d\varphi}{dz}(z),...,\frac{d^k\varphi}{dz^k}(z)\right]=0 \qquad z\sim\frac{1}{g^2}$$

- 不確定特異点$z=\infty$で**複数の漸近級数解** → **一般に階乗発散**

冪級数型: $\Phi_0(z)=\sum_q a_q z^{-q}$　　指数×冪級数型: $e^{-nAz}\Phi_n(z)$

- 常微分方程式の解は各漸近級数の**ボレル和の総和 = トランス級数**

$$\varphi_\pm(z;\sigma)=\mathcal{S}_\pm\Phi_0(z)+\sum_n \sigma^n e^{-nAz}\mathcal{S}_\pm\Phi_n(z)$$

σ：トランス級数パラメタ

- 特定のarg[z]で**トランス級数パラメタ σ が不連続 = ストークス現象**

$$\varphi_+(z;\sigma) \quad \leftrightarrow \quad \varphi_-(z;\sigma+\mathfrak{s})$$

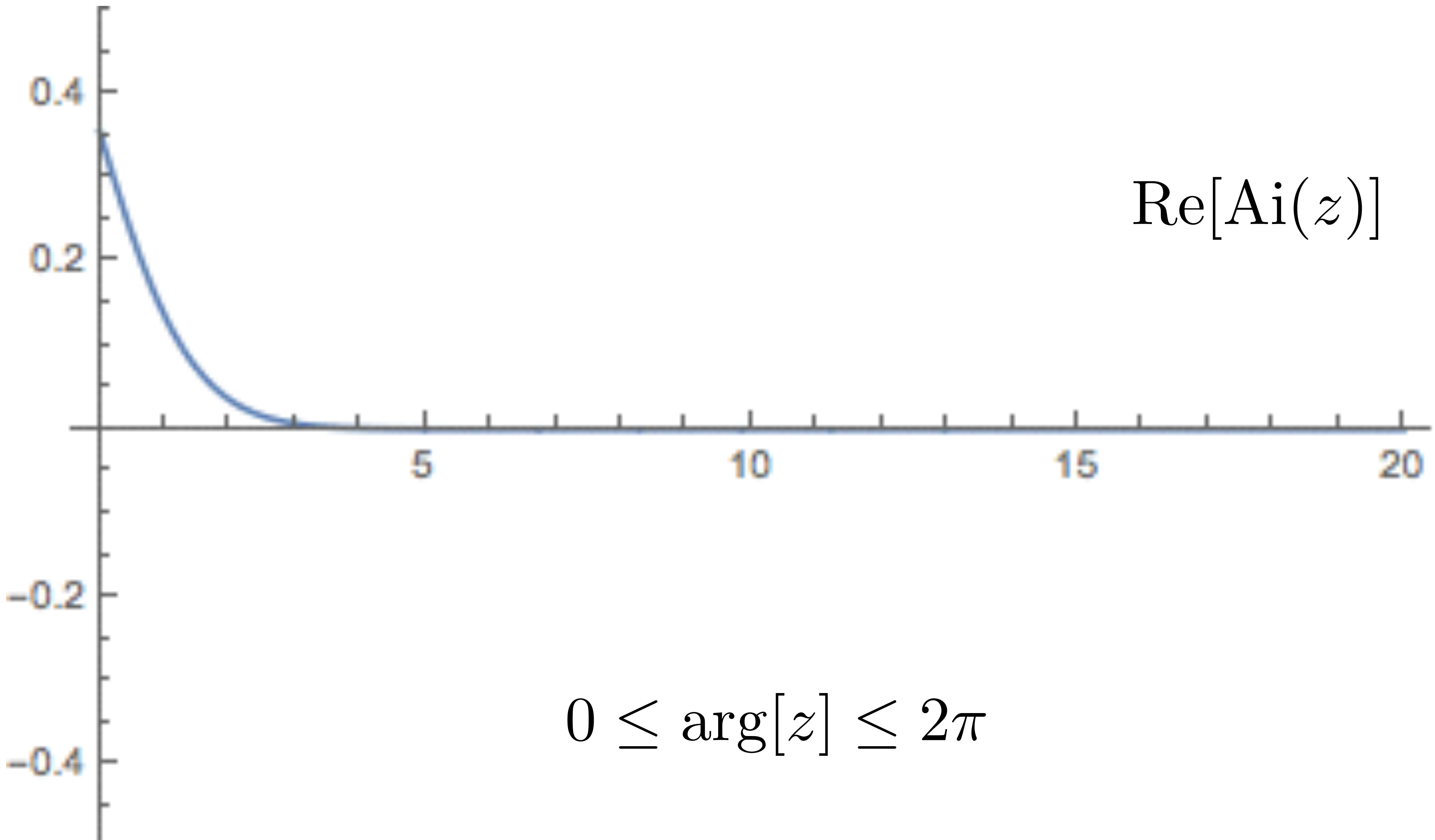
$\mathfrak{s}$：ストークスパラメタ

- 解の連続性から**各漸近級数が結びつく**

$$\varphi_+(z;\sigma)\ =\ \varphi_-(z;\sigma+\mathfrak{s}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{S}_+\Phi_0(z)-\mathcal{S}_-\Phi_0(z)\approx\mathfrak{s}e^{-Az}\mathcal{S}\Phi_1(z)$$

ex.) エアリー方程式 $\varphi'' - z\varphi = 0$ ($z=\infty$に不確定特異点)

$$\varphi = \mathrm{Ai}(z) \;\approx\; \underline{e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}\mathcal{S}_{\pm}\sum a_n z^{-\frac{3}{2}n}} \;+\; \sigma\, \underline{e^{\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}\mathcal{S}_{\pm}\sum b_n z^{-\frac{3}{2}n}}$$



$\mathrm{Re}[\mathrm{Ai}(z)]$

$0 \leq \arg[z] \leq 2\pi$

なぜ非摂動寄与の情報が摂動論に？

Ecalle (81)

◆リサージェンス理論とAlien calculus

・特異点方向上下のボレル和を繋ぐ群作用：Stokes automorphism $\mathfrak{S}_\theta$

$$\mathcal{S}_{\theta+} = \mathcal{S}_{\theta-} \circ \mathfrak{S}_\theta \qquad \mathfrak{S}_\theta = \mathrm{Id} - \mathrm{Disc}_\theta = \exp\left[\sum e^{-\omega_\theta z} \Delta_{\omega_\theta}\right]$$

・各特異点について外微分作用素：Alien derivative Δ_{ω_θ}

$$[\Delta_{\omega_\theta}, \partial_z] = -\omega_\theta \Delta_{\omega_\theta} \qquad [\Delta_{\omega_\theta}, \partial_\sigma] = 0$$

・Alien calculusと通常の微分を関係付ける方程式：Bridge equation

$$e^{-\omega_\theta z} \Delta_{\omega_\theta} \varphi(z;\sigma) \propto \partial_\sigma \varphi(z;\sigma)$$

・Bridge eq.の左右辺比較により各漸近級数間の関係が判明！

$$\mathfrak{S}_\theta \Phi_n = \exp[e^{-Az} \Delta_A] \Phi_n = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n+l}{n} \mathfrak{s}_1 e^{-lAz} \Phi_{n+l}$$

なぜ非摂動寄与の情報が摂動論に？

Ecalle (81)

$$\mathcal{S}_+\Phi_0(z) - \mathcal{S}_-\Phi_0(z) \approx \mathfrak{s} e^{-Az}\mathcal{S}\Phi_1(z)$$

摂動ボレル和の虚部不定性　　　　非摂動的寄与

ある種のリサージェンス構造は量子論にも存在すると考えられ,
摂動ボレル和が非摂動的寄与の情報を含む.

・コーシーの積分定理による摂動-非摂動関係の抽出

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{e^{i\theta}\infty} d\omega \frac{\mathrm{Disc}_\theta\, \varphi_0(\omega)}{\omega - z}$$

$$a_q^{(0)} \approx \frac{\mathfrak{s}}{2\pi i}\frac{(q-1)!}{A^q}\left(a_1^{(1)} + \frac{A}{q-1}a_2^{(1)} + \cdots\right) + \cdots$$

⇨ 摂動級数の高次項と非摂動寄与の低次項が関係

摂動級数から非摂動寄与を原理的には求めることが可能！

摂動的ボレル和とBion配位との不定虚部相殺

ボレル和の具体的な例

Lipatov(77)
Bogomolny, Fateyev(77)

例) 摂動級数が交代級数の場合

$$P(g^2) = C \sum_{q=0}^{\infty} q! \left(\frac{-g^2}{A} \right)^q$$

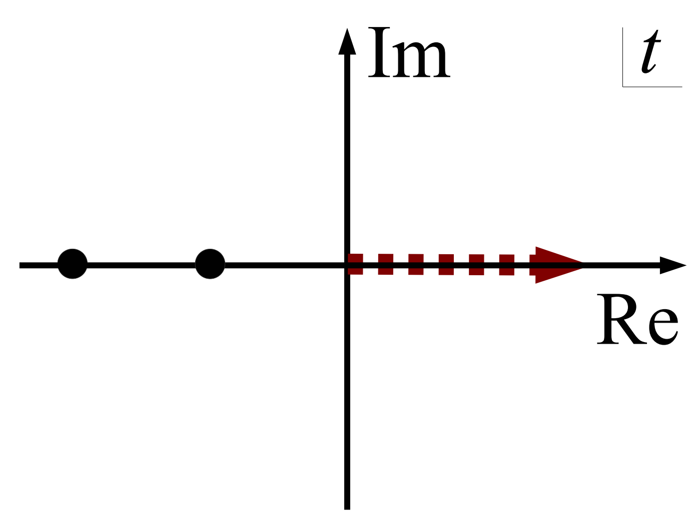
$$\Rightarrow \quad BP(t) = C \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{-t}{A} \right)^q = \frac{CA}{A+t}$$

特異点は負の実軸上

$$\Rightarrow \quad \mathbb{B}(g^2) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{g^2} e^{-t/g^2} \frac{CA}{A+t} \sim \frac{1}{g^2} e^{A/g^2} \, \mathrm{Ei}(-A/g^2)$$

有限かつ不定性のない結果

ex.) $\frac{1}{2}x^2 + g^2 x^4$ 非調和振動子

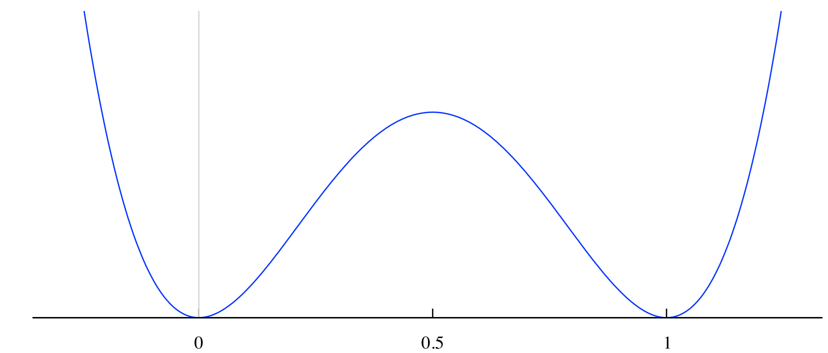


ボレル和の具体的な例

Lipatov(77)
Bogomolny, Fateyev(77)

例）二重井戸型ポテンシャル

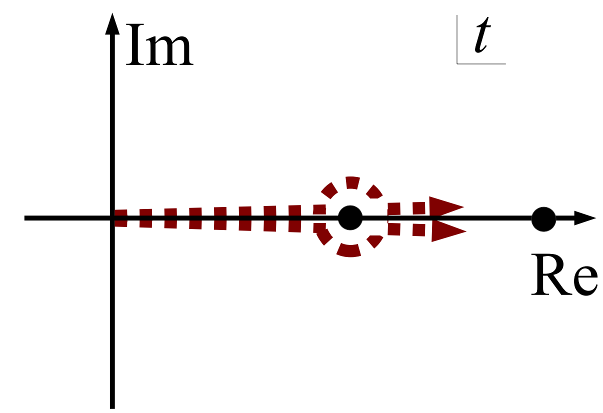
Bender-Wu(73)
Zinn-Justin(81)



$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+\frac{1}{2}x^2(1-gx)^2\psi(x)=E\psi(x)$$

$$E_{0,pert}=\frac{1}{2}-g^2-\frac{9}{2}g^4-\frac{89}{2}g^6-\frac{5013}{8}g^8\ \dots$$

$$a_q=-\frac{3^{q+1}}{\pi}q! \qquad \text{(for large } q\text{)}$$



特異点が実軸上に出現

$$BP_{pert}(t)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{t-1/3}$$

$$\mathrm{Im}[\mathbb{B}_{pert}(g^2e^{\mp i\epsilon})]=\mathrm{Im}\left[\int_0^{\infty e^{\pm i\epsilon}}\frac{dt}{g^2}\frac{e^{-\frac{t}{g^2}}}{\pi}\frac{1}{t-1/3}\right]=\mp\frac{e^{-\frac{1}{3g^2}}}{g^2}$$

$$\boxed{S_I=\frac{1}{6g^2}}$$

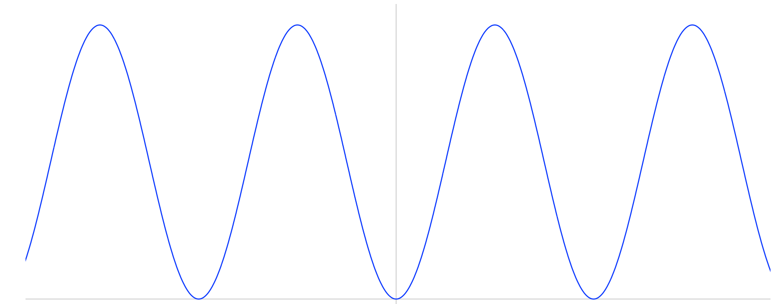
摂動的ボレル和の不定虚部は非摂動寄与(2-Instanton)と関係？

ボレル和の具体的な例

Lipatov(77)
Bogomolny, Fateyev(77)

例）Sine-Gordon型ポテンシャル

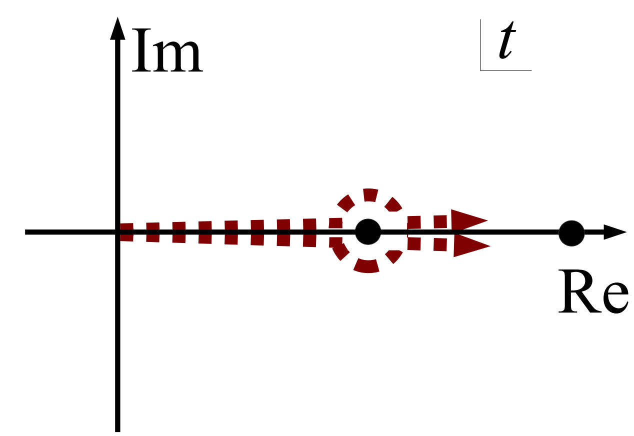
Bender-Wu(73)
Zinn-Justin(83)



$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{1}{8g^2}\sin^2(2gx)\,\psi(x) = E\,\psi(x)$$

$$E_{0,pert} = \sum_{q=0} a_q g^{2q}$$

$$a_q = -\frac{2}{\pi}q! \qquad \text{(for large } q\text{)}$$



特異点が実軸上
に出現

$$\Rightarrow \quad BP_{pert}(t) = \frac{2}{t-1}$$

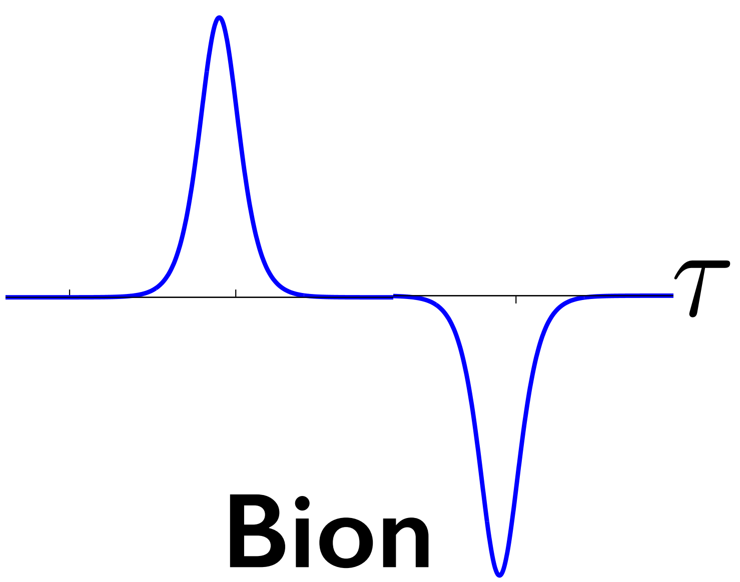
$$\Rightarrow \quad \mathrm{Im}[\mathbb{B}_{pert}(g^2 e^{\mp i\epsilon})] = \mathrm{Im}\left[\int_0^{\infty e^{\pm i\epsilon}} \frac{dt}{g^2}\, e^{-\frac{t}{g^2}} \frac{2}{\pi}\frac{2}{t-1}\right] = \mp\frac{2e^{-\frac{1}{g^2}}}{g^2}$$

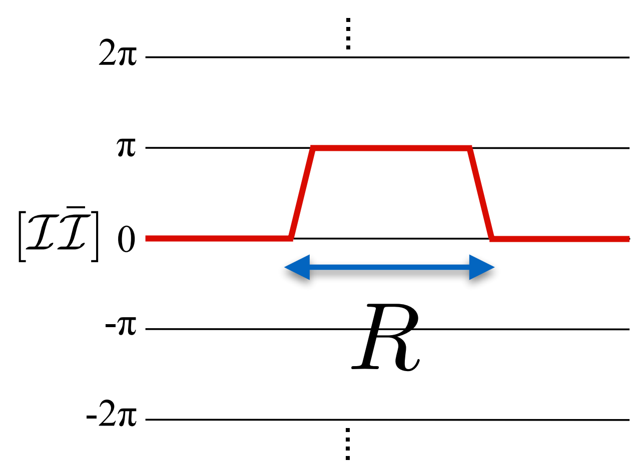
$$\boxed{S_I = \frac{1}{2g^2}}$$

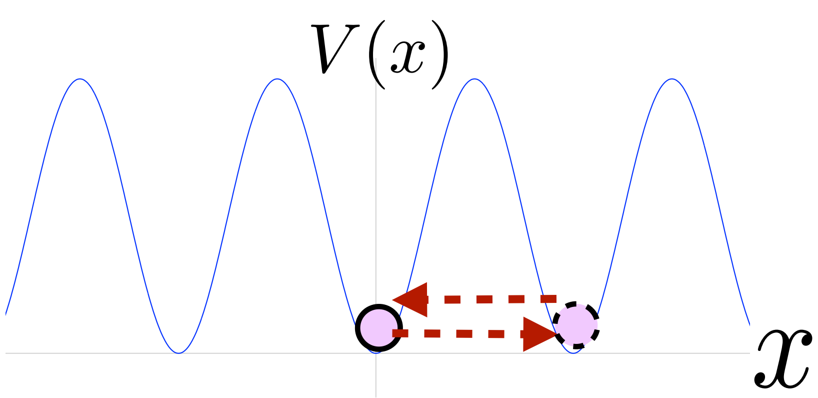
摂動的ボレル和の不定虚部は非摂動寄与(2-Instanton)と関係？

インスタントン-反インスタントン配位 = Bion配位

$$x_{\mathcal{I}\bar{\mathcal{I}}}(\tau) \;=\; \frac{1}{g}\arctan e^{\tau-\tau_{\mathcal{I}}} + \frac{1}{g}\arctan e^{-\tau+\tau_{\bar{\mathcal{I}}}} + n\pi/(2g)$$







実古典解ではないが，経路積分に含まれる配位

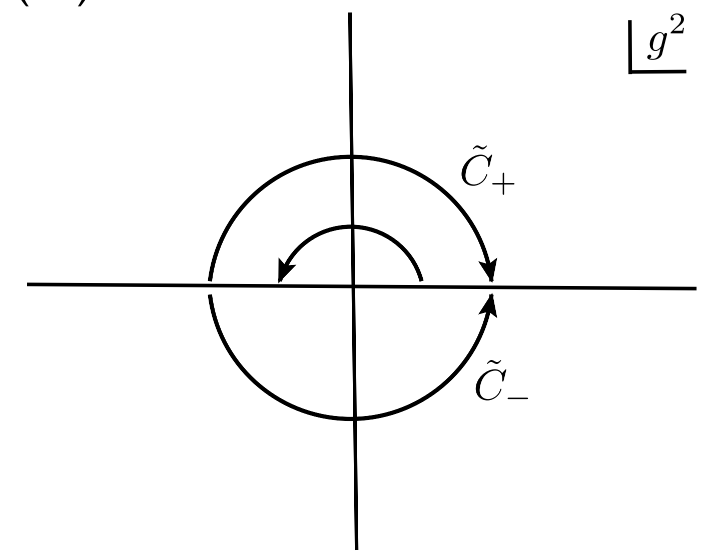
$$V_{\mathcal{I}\bar{\mathcal{I}}}(R) = -\frac{2}{g^2}\exp[-R] + \epsilon R$$

インスタントン間には
実質的な引力が働くため
寄与の計算は困難....？

インスタントン-反インスタントン配位からの寄与

- Bogomolny--Zinn-Justin(BZJ)処方　Bogomolny(79)　Zinn-Justin(81)

1. $-g^2$ を正の実数と見なす
2. モジュライ積分を実行
3. $-g^2 = e^{\mp i\pi} g^2$ と解析接続



$$[\mathcal{I}\bar{\mathcal{I}}]\xi^{-2} = \int_0^\infty \exp\left[-\frac{2}{-g^2}e^{-R} - \epsilon R\right]$$

$$\approx -\left(\gamma + \log\frac{2}{-g^2}\right) + \mathcal{O}(1/\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon) \;\rightarrow\; -\left(\gamma + \log\frac{2}{g^2}\right) \mp i\pi$$

Sine-Gordon

$$\boxed{\Delta E^{1,1} = [\mathcal{I}\bar{\mathcal{I}}] + [\bar{\mathcal{I}}\mathcal{I}] = 2\xi^2\left[\left(\gamma + \log\frac{2}{g^2} \pm i\pi\right)\right]} \qquad \xi \equiv e^{-S_I}/\sqrt{\pi g^2}$$

摂動的ボレル和の不定虚部 $\mp\dfrac{2e^{-2S_I}}{g^2}$ を見事に相殺！

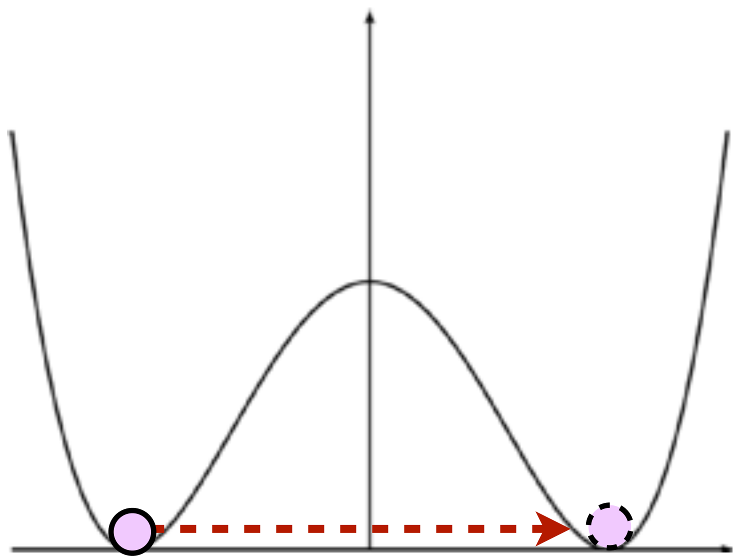
複素化理論の固定点としてのBion配位

これらの非摂動寄与がなぜ重要？

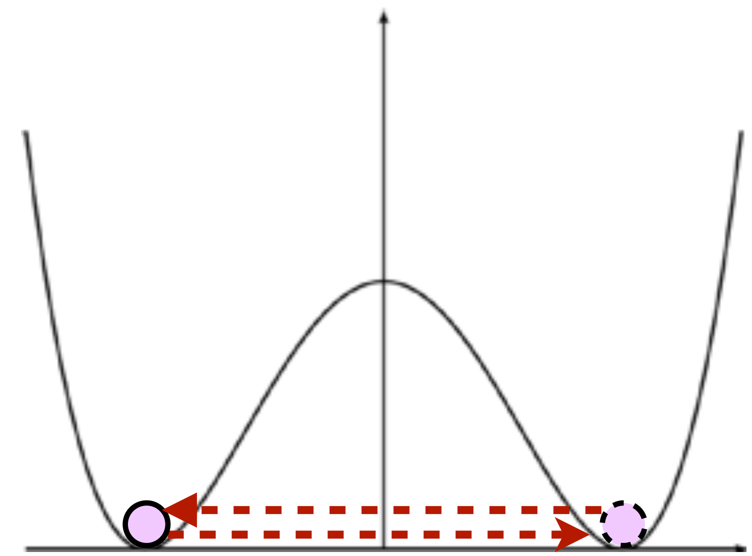
Behtash, Dunne, Schafer, Sulejmanpasic, Unsal(15)
Fujimori, Kamata, TM, Nitta, Sakai (16)(17)

・Bion配位は複素化された理論の**Holomorphic EOM**の古典解

・複素解の**One-loop det + 準モジュライ積分** が**BZJ処方**と等価



トンネル現象



Bion

行き帰り遷移

$$x_{\mathcal{I}}(\tau) \; = \; \tanh \frac{\tau - \tau_0}{2}$$

$$e^{-S_I}$$

$$z_{\mathcal{I}\bar{\mathcal{I}}}(\tau) = \frac{z_T}{2} \coth \frac{\omega \tau_0}{2} \left[\tanh \frac{\omega(\tau + \tau_0)}{2} - \tanh \frac{\omega(\tau - \tau_0)}{2} \right]$$

$$e^{-2S_I} \, (\mathrm{Re} \pm i \mathrm{Im}) \qquad z_T, \; \tau_0 \in \mathbb{C}$$

結果の特異性(ストークス線)の避け方 $g^2 \to g^2 e^{\pm i\epsilon}$ **に依存して**

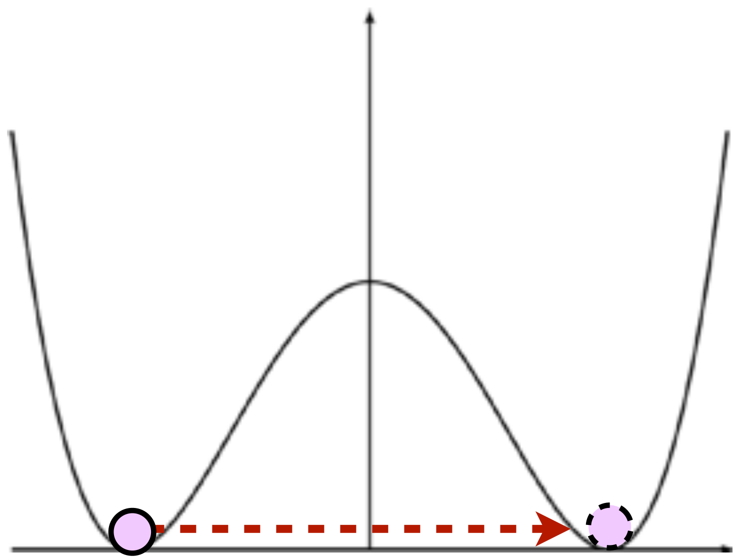
不定虚部が出現し，これが摂動ボレル和の不定虚部を相殺！

これらの非摂動寄与がなぜ重要？

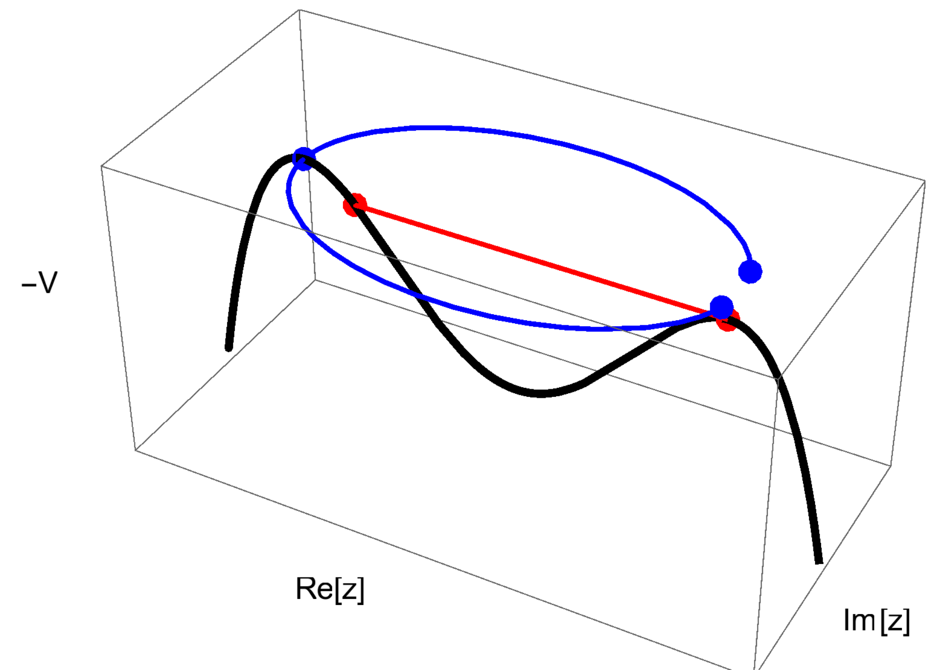
Behtash, Dunne, Schafer, Sulejmanpasic, Unsal(15)
Fujimori, Kamata, TM, Nitta, Sakai (16)(17)

・Bion配位は複素化された理論のHolomorphic EOMの古典解

・複素解の**One-loop det + 準モジュライ積分** が**BZJ**処方と等価



トンネル現象



Bion

$$x_{\mathcal{I}}(\tau) = \tanh\frac{\tau-\tau_0}{2}$$

$$z_{\mathcal{I}\bar{\mathcal{I}}}(\tau) = \frac{z_T}{2}\coth\frac{\omega\tau_0}{2}\left[\tanh\frac{\omega(\tau+\tau_0)}{2} - \tanh\frac{\omega(\tau-\tau_0)}{2}\right]$$

⇨ e^{-S_I}

⇨ $e^{-2S_I}\,(\mathrm{Re}\pm i\mathrm{Im})$ $\quad z_T,\ \tau_0 \in \mathbb{C}$

摂動論と合わせた最終的な結果は「超対称性の自発的破れ」等
非摂動的な物理の記述にも成功している！

どうして複素古典解が必要か？

0次元積分における最急降下法では積分経路を変形し

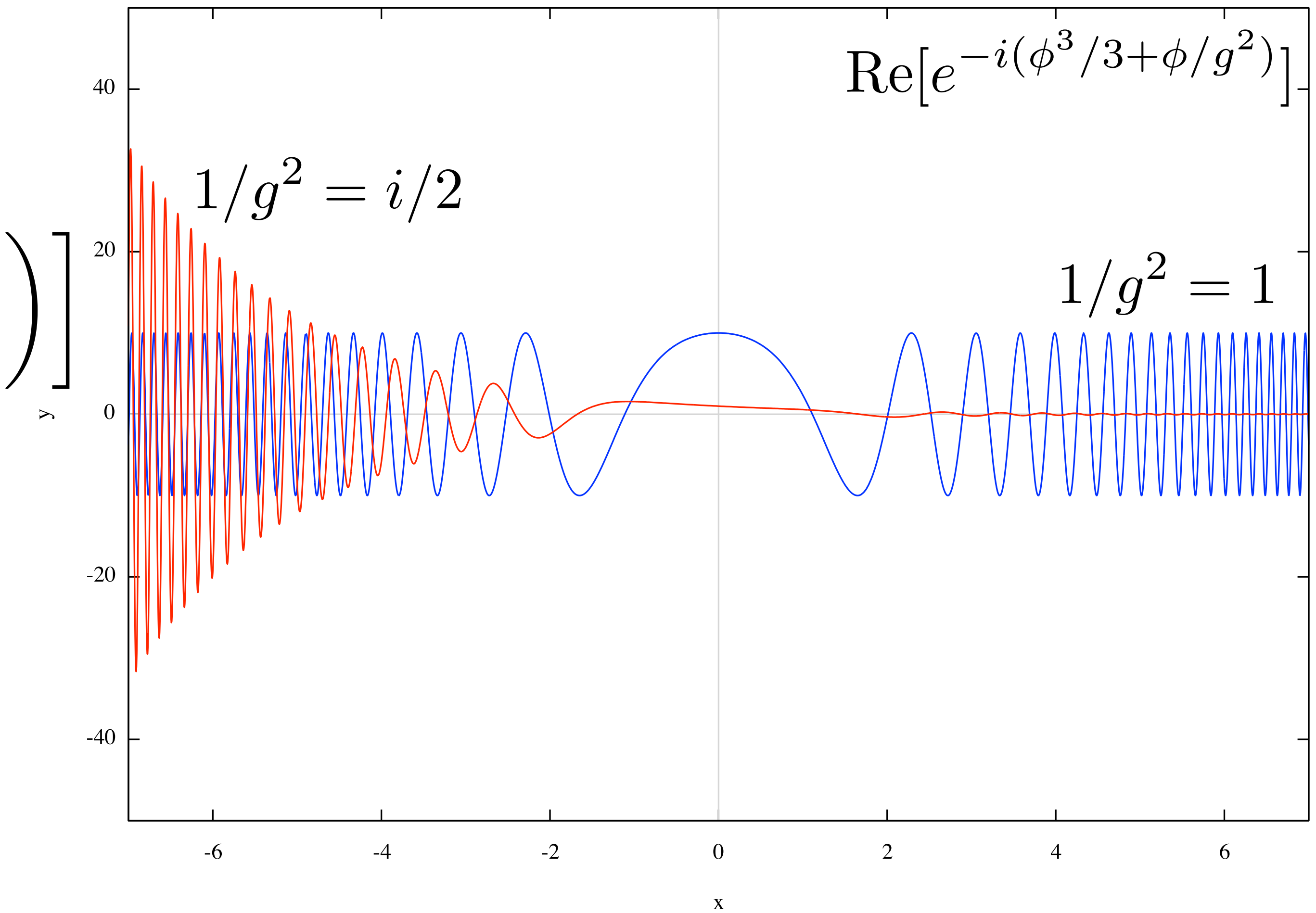
複素固定点に繋がる経路(thimble)に分解

⇨ **経路積分においても複素固定点を考えるのは自然**

・エアリー積分

$$\mathrm{Ai}(g^{-2}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \exp\left[-i\left(\frac{\phi^3}{3}+\frac{\phi}{g^2}\right)\right]$$

$$\approx \sqrt{\frac{g}{4\pi}} \exp\left(-\frac{2}{3g^2}\right)$$



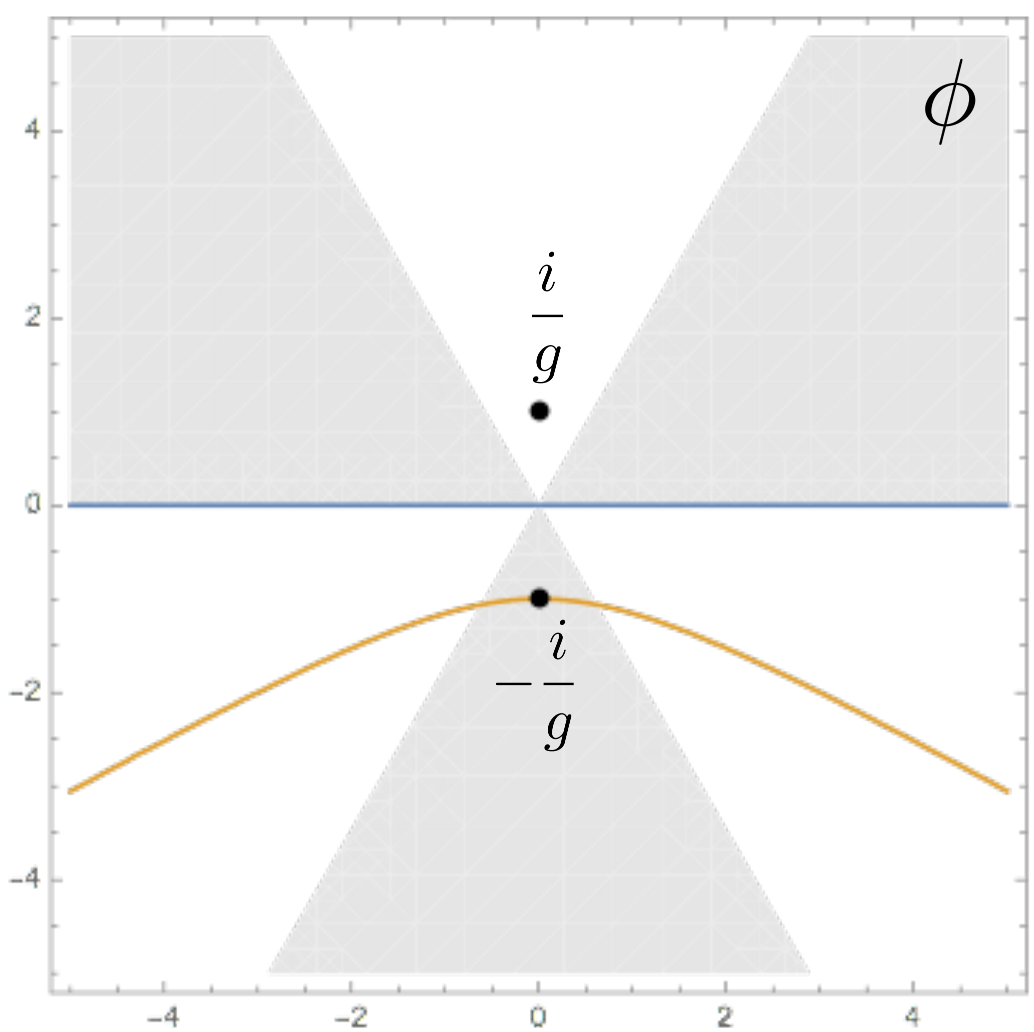
どうして複素古典解が必要か？

最急降下法(Thimble分解)における複素固定点の寄与

・エアリー積分

$$\mathrm{Ai}(g^{-2}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \exp\left[-i\left(\frac{\phi^3}{3} + \frac{\phi}{g^2}\right)\right]$$

複素平面上の2つの複素固定点 $\phi = \pm\frac{i}{g}$



$\arg[g^2] = 0+$

どうして複素古典解が必要か？

最急降下法(Thimble分解)における複素固定点の寄与

・エアリー積分

$$\mathrm{Ai}(g^{-2}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \exp\left[-i\left(\frac{\phi^3}{3} + \frac{\phi}{g^2}\right)\right]$$

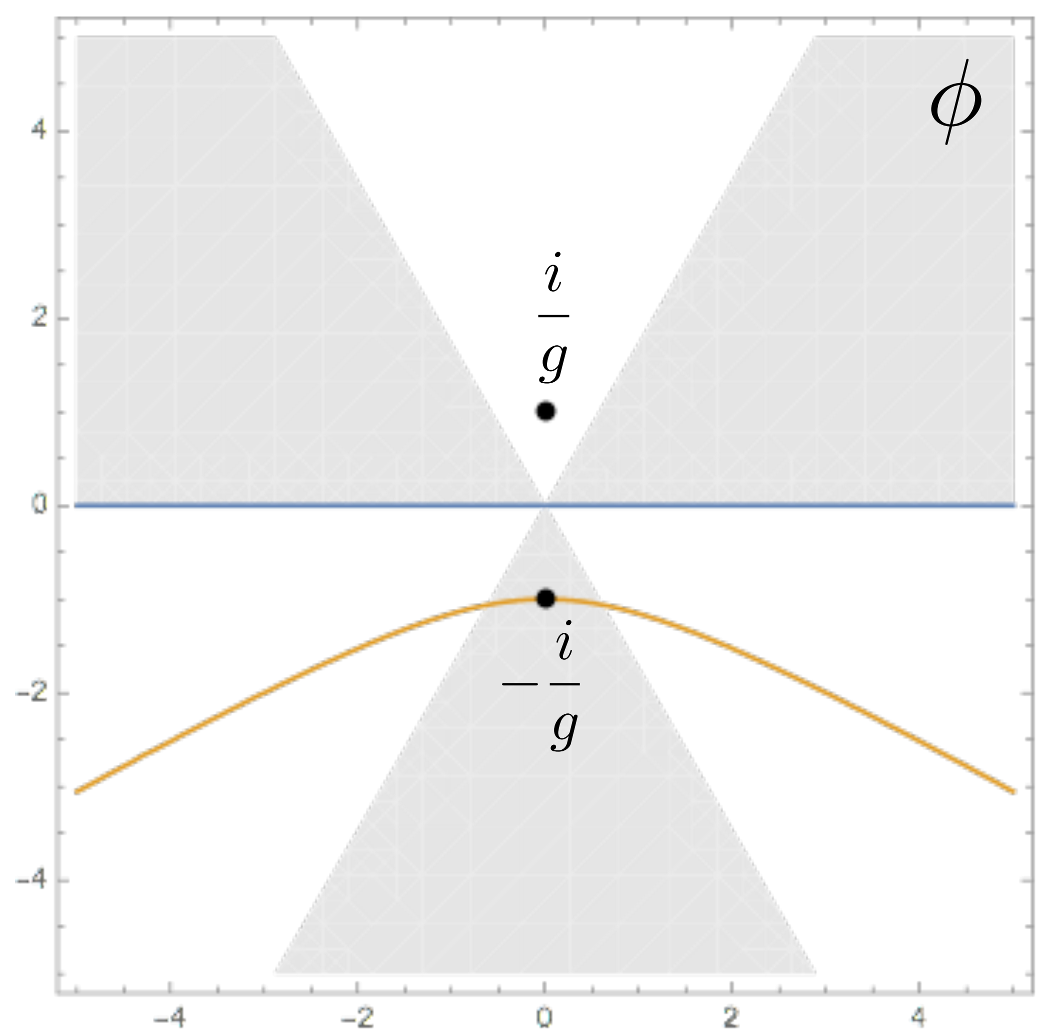
複素平面上の2つの複素固定点 $\phi = \pm\frac{i}{g}$

最急降下法：元の積分経路を，固定点を通り，虚部一定の最急降下径路に分解

$$\mathcal{C} = \sum_{\sigma} n_\sigma \mathcal{J}_\sigma$$

最急降下径路分解

= Thimble分解



$\arg[g^2] = 0+$

どうして複素古典解が必要か？

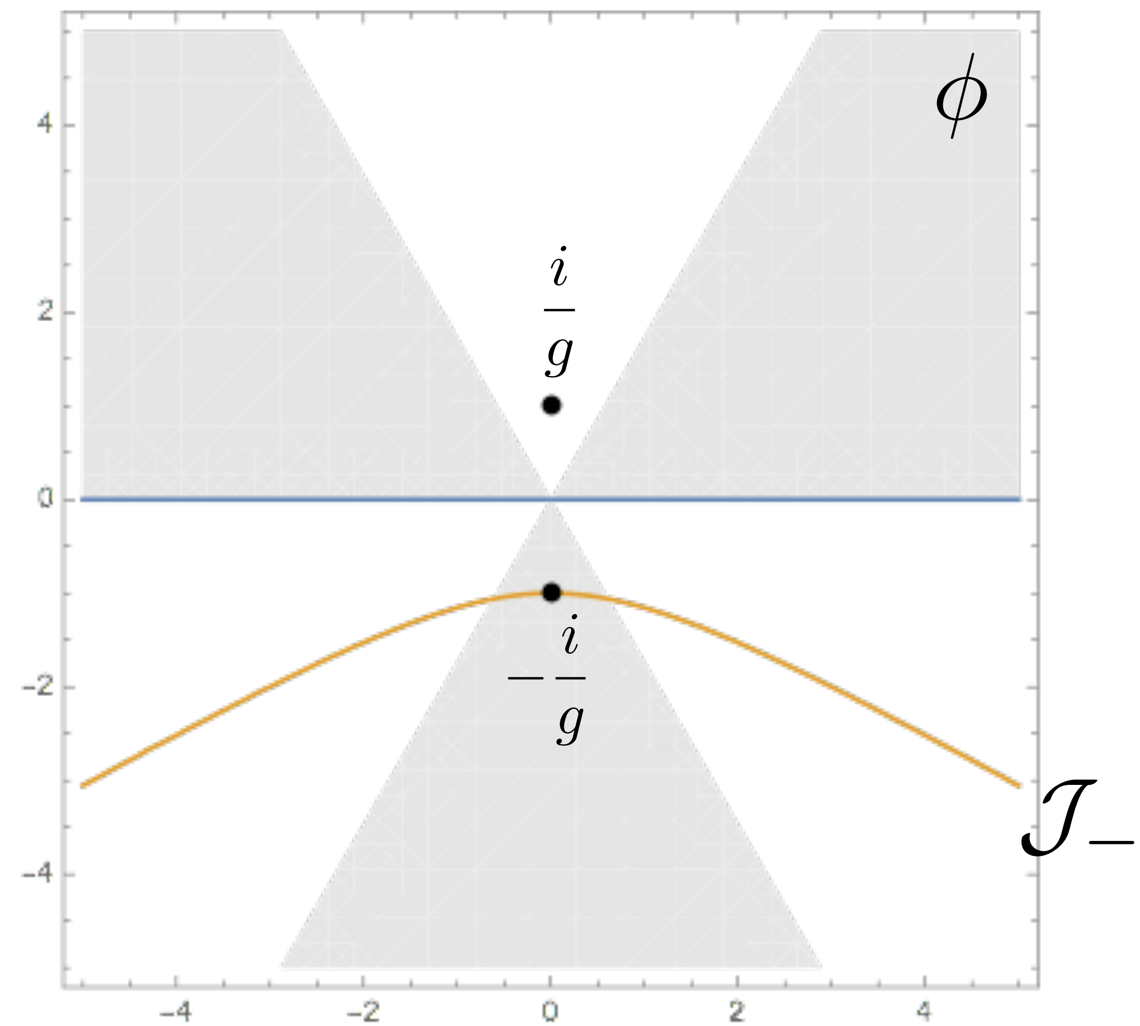
最急降下法(Thimble分解)における複素固定点の寄与

・エアリー積分

$$\mathrm{Ai}(g^{-2}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \exp\left[-i\left(\frac{\phi^3}{3} + \frac{\phi}{g^2}\right)\right]$$

- $\mathcal{J}_\sigma$ $\quad \mathrm{Im}[S] = \mathrm{Im}[S_0]$, $\quad \mathrm{Re}[S] \le \mathrm{Re}[S_0]$ 最急降下径路
- $n_\sigma = \langle \mathcal{K}_\sigma, \mathcal{C} \rangle$ 最急上昇径路$\mathcal{K}$と元の径路との交叉数

$$\Rightarrow \quad \mathcal{C} = \sum_\sigma n_\sigma \mathcal{J}_\sigma$$



$\arg[g^2] = 0+$

どうして複素古典解が必要か？

最急降下法(Thimble分解)における複素固定点の寄与

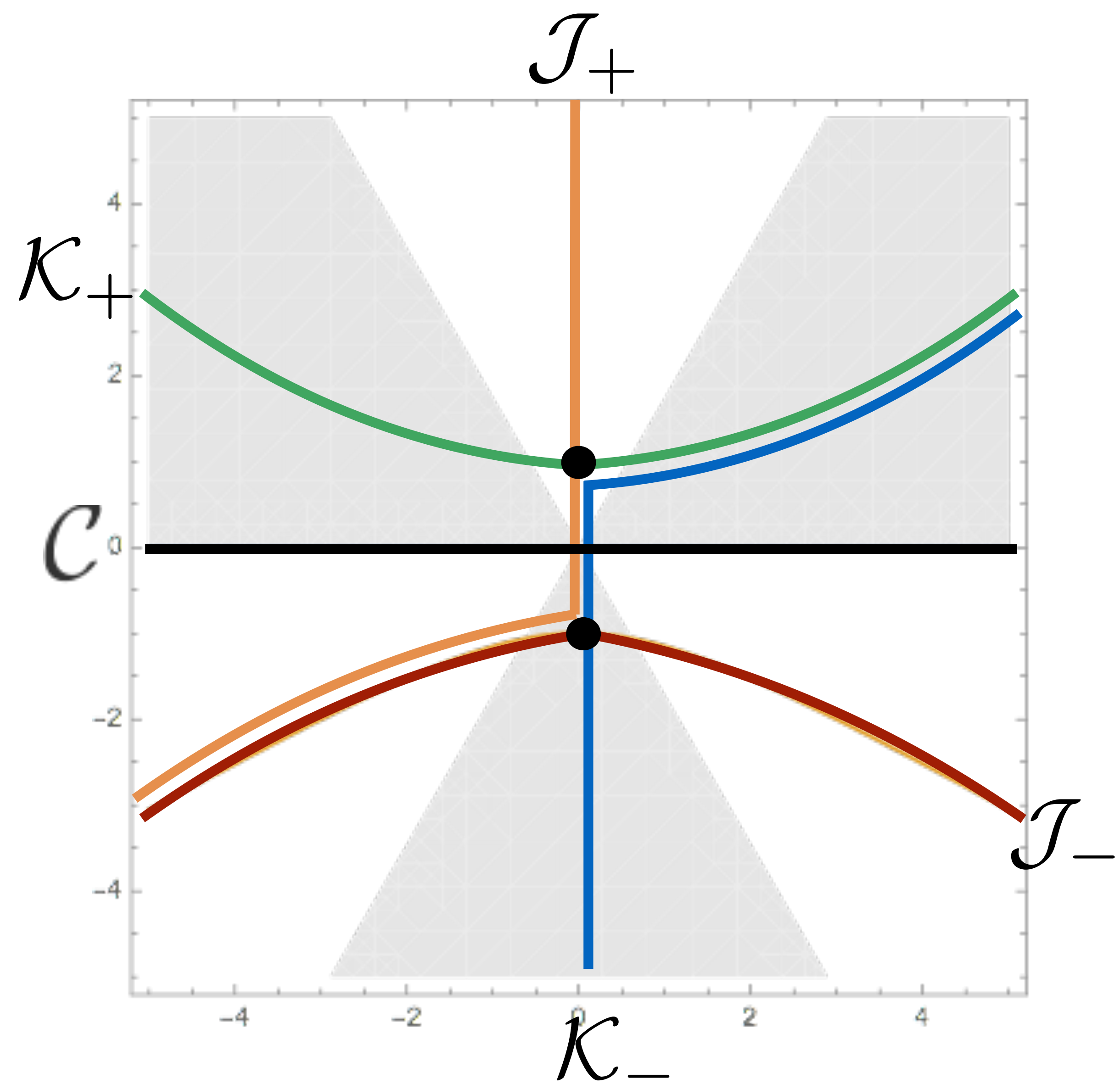
・エアリー積分　$\arg[g^2] = 0+$

$$n_+ = \langle \mathcal{K}_+, \mathcal{C} \rangle = 0$$

$$n_- = \langle \mathcal{K}_-, \mathcal{C} \rangle = 1$$

$$\mathcal{C} = \sum_\sigma n_\sigma \mathcal{J}_\sigma \Rightarrow \boxed{\mathcal{C} = \mathcal{J}_-}$$

$\arg[g^2] = \frac{2\pi}{3}-$ までこの分解を維持



$\arg[g^2] = 0+$

どうして複素古典解が必要か？

最急降下法(Thimble分解)における複素固定点の寄与

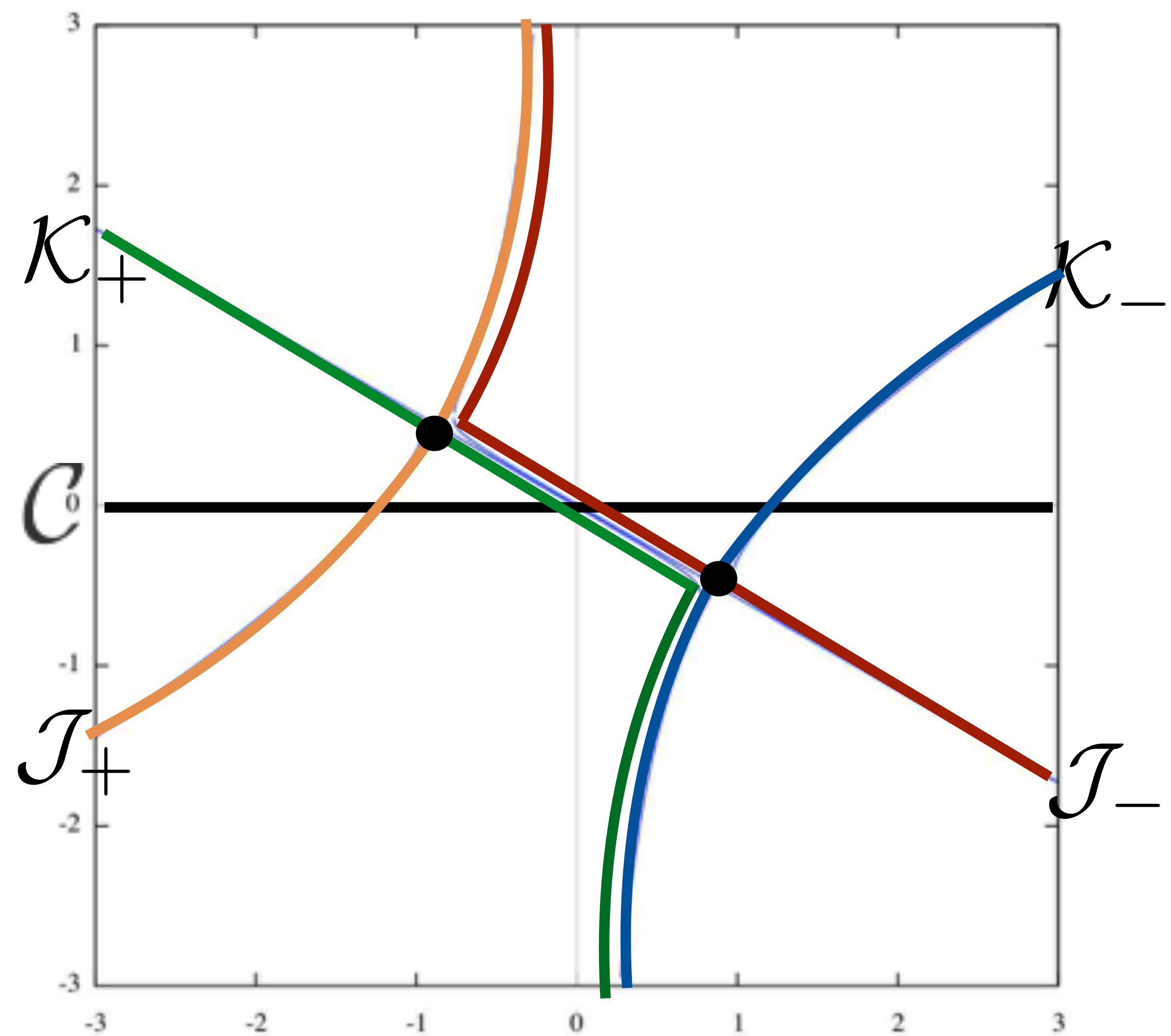
・エアリー積分　$\arg[g^2] = \frac{2\pi}{3} +$

$$n_+ = \langle \mathcal{K}_+, \mathcal{C} \rangle = 1$$

$$n_- = \langle \mathcal{K}_-, \mathcal{C} \rangle = 1$$

$$\mathcal{C} = \sum_\sigma n_\sigma \mathcal{J}_\sigma \Rightarrow \boxed{\mathcal{C} = \mathcal{J}_+ + \mathcal{J}_-}$$

ストークス現象：特定のarg[g^2]で
thimble分解が不連続変化



$\arg[g^2] = \frac{2\pi}{3} +$

どうして複素古典解が必要か？

最急降下法(Thimble分解)における複素固定点の寄与

・エアリー積分

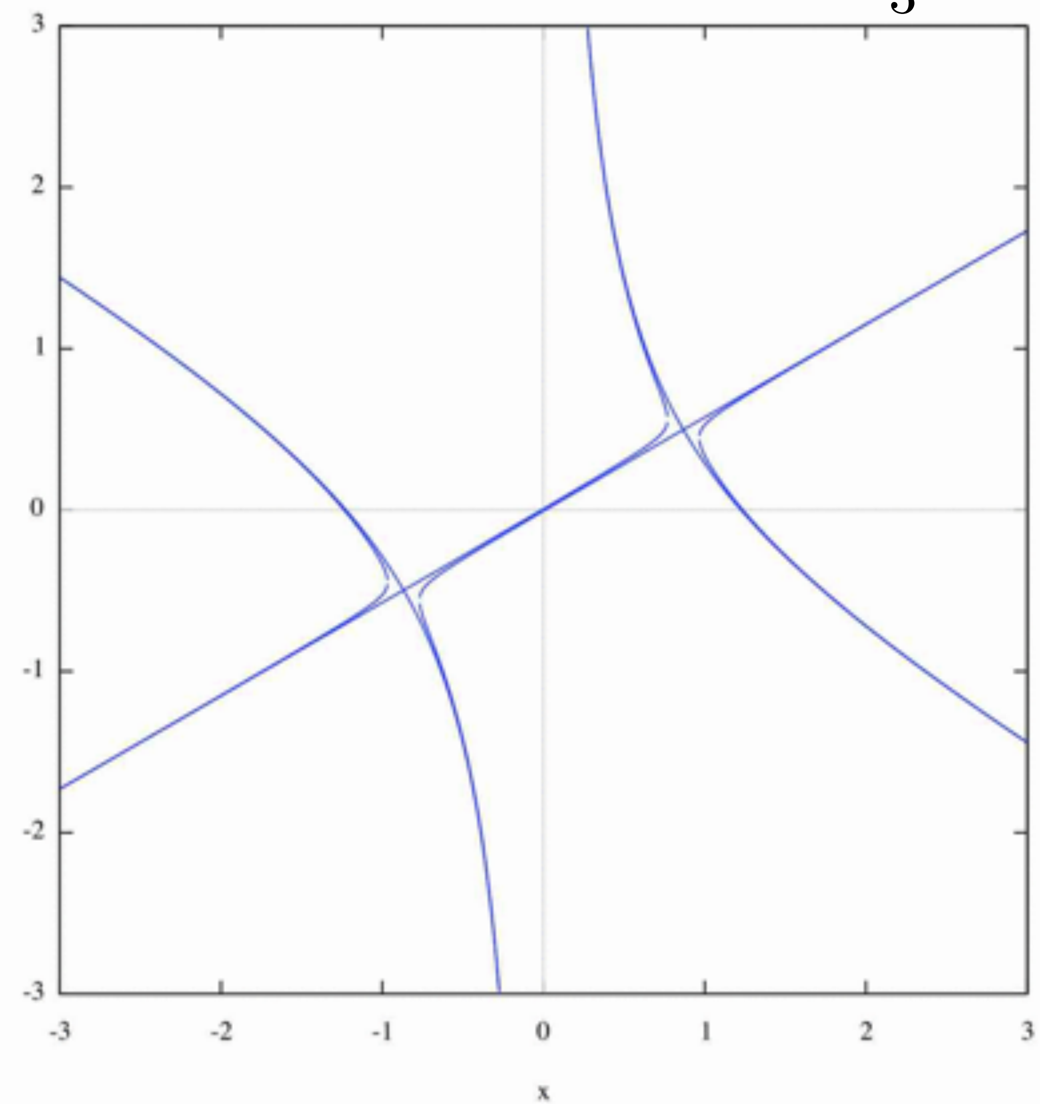
ストークス現象：特定のarg[g^2]でthimble分解が不連続変化

$$\arg[g^2]=\frac{2\pi}{3}- \qquad\qquad \arg[g^2]=\frac{2\pi}{3}+$$

$$\boxed{\mathcal{C}=\mathcal{J}_-} \Longleftrightarrow \boxed{\mathcal{C}=\mathcal{J}_+ + \mathcal{J}_-}$$

摂動ボレル和の不定性はストークス線上でのthimble分解の不定性に対応！

ストークス現象 $\arg[g^2]=-\frac{2\pi}{3}\to\pi$



cf.) Real-time formalism, Finite-density lattice system

どうして複素古典解が必要か？

・変形ベッセル積分

$$Z(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dz\, e^{-\frac{1}{2\lambda}\sin^2 z} = \frac{\pi e^{-\frac{1}{4\lambda}}}{\sqrt{\lambda}} I_0\left(\frac{1}{4\lambda}\right)$$

固定点：$z_0 = 0$ 、 $z_1 = \pm\pi/2$

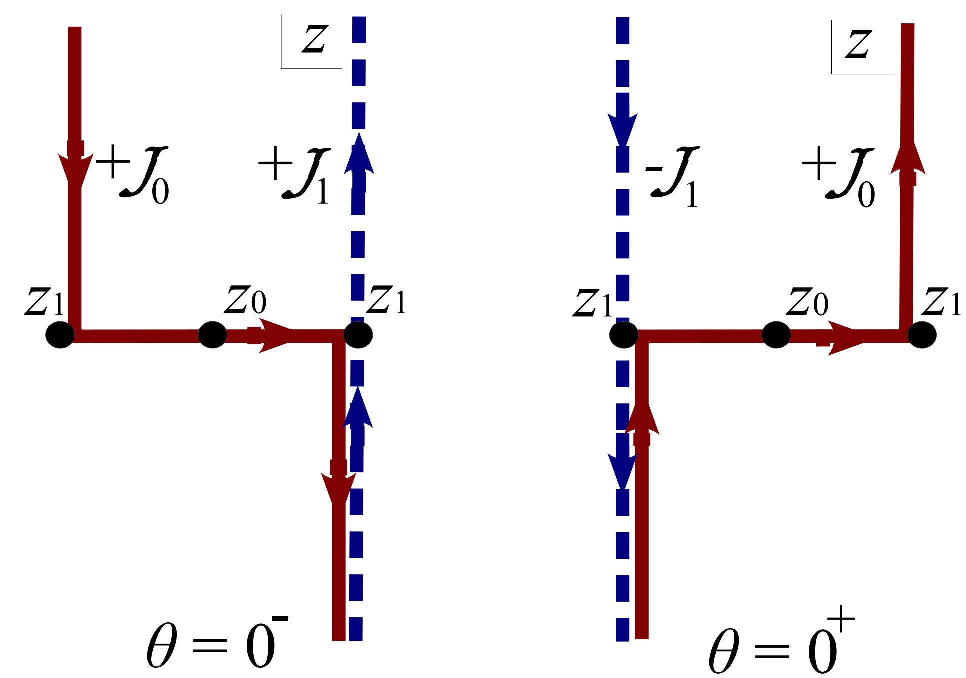
$\arg[\lambda] = 0-$

$$\boxed{\mathcal{C} = \mathcal{J}_0(0^-) + \mathcal{J}_1(0^-)}$$

$\arg[\lambda] = 0+$

$$\boxed{\mathcal{C} = \mathcal{J}_0(0^+) - \mathcal{J}_1(0^+)}$$

arg[λ]=0でのストークス現象



- 各Thimbleがトランス級数の各セクター（摂動+非摂動）に対応
- 摂動寄与 $\mathcal{J}_0$ が虚部を持ち， arg[λ]=0± で不定になる
- 適切にThimbleの寄与を加えることで不定性のない結果が得られる

Bionトランス級数としての厳密結果

厳密結果は複素解トランス級数で完全再現

Fujimori, Kamata, TM, Nitta, Sakai (16)(17)

Ex.) CPN量子力学の基底エネルギー

$$E^{(2)} = g^2 - m\frac{\coth\frac{m}{g^2}}{\sinh^2\frac{m}{g^2}}\left[\frac{\mathrm{Ei}\left(\frac{2m}{g^2}\right)+\mathrm{Ei}\left(-\frac{2m}{g^2}\right)}{2} - \gamma - \log\frac{2m}{g^2}\right] = \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\frac{2pm}{g^2}} E_p^{(2)}$$

厳密結果　　　トランス級数

$$E_0^{(2)} = g^2 + 2m\int_0^\infty dt\frac{e^{-t}}{t-\frac{2m}{g^2\pm i0}}$$

摂動的寄与

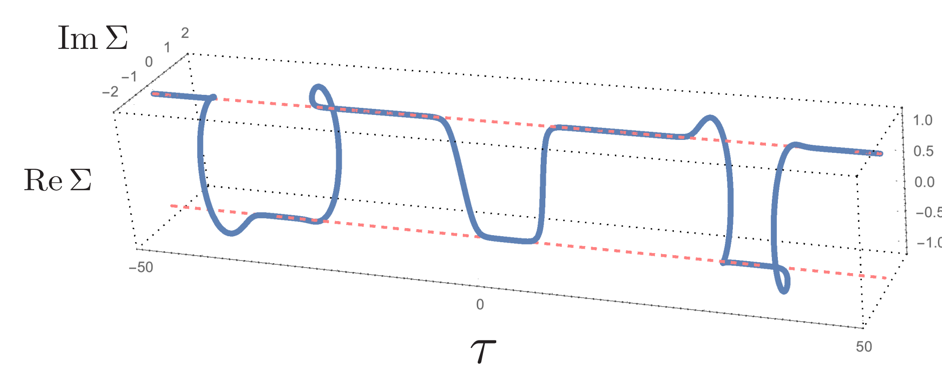
$$E_p^{(2)} = 2m\int_0^\infty dt e^{-t}\left[\frac{(p+1)^2}{t-\frac{2m}{g^2\pm i0}} + \frac{(p-1)^2}{t+\frac{2m}{g^2}}\right] + 4mp^2\left(\gamma + \log\frac{2m}{g^2} \pm \frac{i\pi}{2}\right)$$

非摂動的寄与

複素解背景の摂動寄与　　　複素解の半古典寄与

複素p-bion解

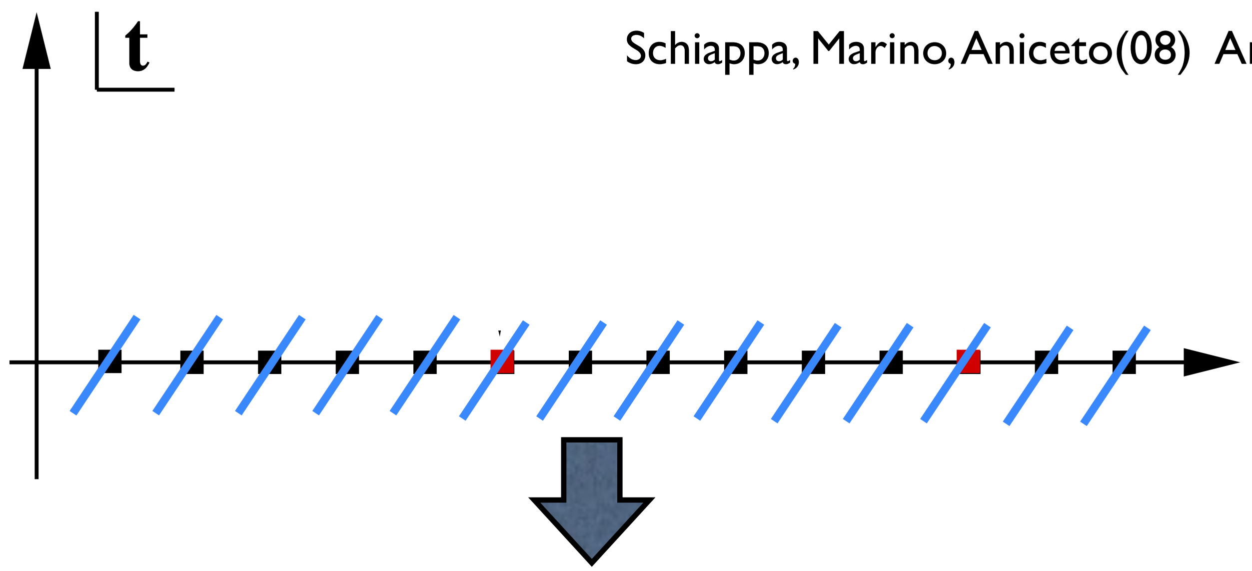
$$\varphi \approx e^{i\phi_0}\mathrm{cs}[\Omega(\tau-\tau_0), k]$$
$$\tilde{\varphi} \approx e^{-i\phi_0}\mathrm{cs}[\Omega(\tau-\tau_0), k]$$



トランス級数内の各セクターの不定虚部は順次相殺され厳密結果に！

量子論のリサージェンス理論とトランス級数

Schiappa, Marino, Aniceto(08) Argyres, Dunne,Unsal(12) Our group(13)



・全ての複素古典解寄与の和では，不定虚部は相殺され厳密結果を得る

$$0 \;=\; \mathrm{Im}\left(\mathbb{B}_{[0,0]} + \mathbb{B}_{[2,0]}[\mathcal{I}\bar{\mathcal{I}}] + \mathbb{B}_{[4,0]}[\mathcal{I}\mathcal{I}\bar{\mathcal{I}}\bar{\mathcal{I}}] + \ldots\right)$$

不定虚部の相殺

・複素古典解とトランス級数に基づく展開で非摂動的定式化が可能！？

$$F(g^2) \approx \sum_{q=0}^{\infty} c_{(0,q)} g^{2q} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nA/g^2} \sum_{q=0}^{\infty} c_{(n,k)} g^{2q}$$

トランス級数

注.）異なるトポロジカル数毎にリサージェンス構造が存在

量子論での各種の例

- 1D Double-well, Sine-Gordon, CPN 模型

  Betahsh,et,al(15) Fujimori, Kamata, TM, Nitta, Sakai(16)(17)

- 2D CPN シグマ模型 with compactification

  Argyres, Dunne, Unsal(13) TM, Nitta, Sakai(14)

- 3D Chern-Simons理論 with exact results

  Gukov, Marino, Putrov(16) Honda(16)

- 4D N=2 超対称ゲージ理論 on S^4

  Schiappa, Marino, Aniceto(13) Honda(16)

- 行列模型 & 位相的弦理論

  Marino(07) Marino, Schiappa, Weiss(09), Hatsuda, Dorigoni(15)

ボレル平面上の特異点が複素古典解に対応.
そこからの寄与の和が厳密結果を与える!

非摂動的観点から見ると
摂動展開は
（それが漸近級数である限り）
破綻してこそ意味がある

具体例１：CPN sigma model

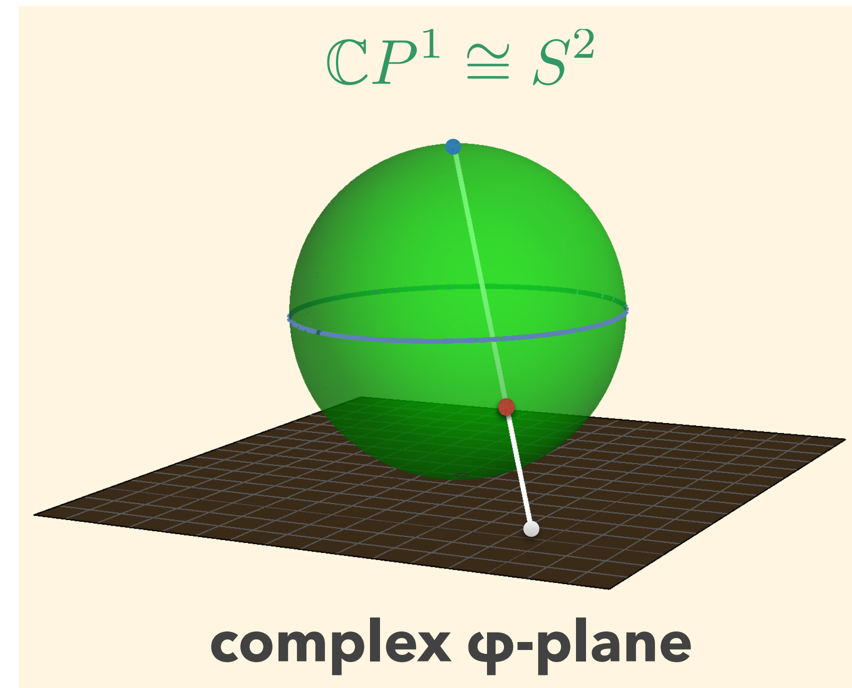
[Fujimori, Kamata, TM, Nitta, Sakai(16)(17)]

CP1シグマ模型

- **CP1模型 on R1 x S1**

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2}\frac{|\partial_\mu \varphi|^2}{(1+|\varphi|^2)^2} + \mathcal{L}_F$$

asymptotic-free theory



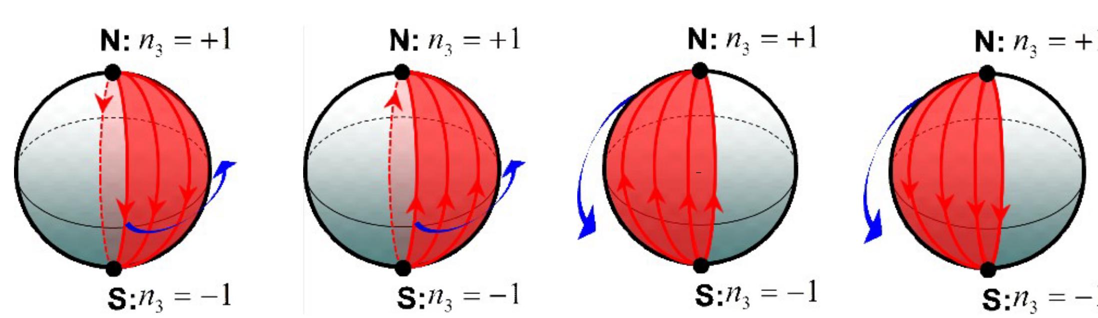
- **Twisted boundary conditions**

$$\varphi(y+L) = e^{imL}\varphi(y)$$

(m=π/L : Z_2 t.b.c.)

→ **BPS Fractional instantons**

cf.) m=π/L



Lee, Yi(97)
Lee, Lu(97)
Kraan, van Baal(97)
Eto, et.al. (04)
Bruckmann (05)

Small-L での有効理論

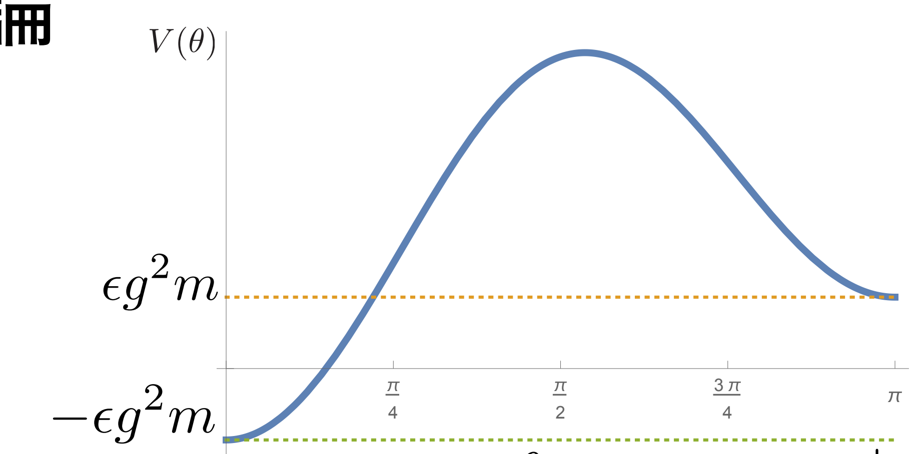
- CP1量子力学（ $\epsilon = 1$: 超対称　　$\epsilon = n \in \mathbb{N}$ ：可解）

$$L \;=\; \frac{1}{g^2} G\Big[\partial_t\varphi\partial_t\bar{\varphi} - m^2\varphi\bar{\varphi} + i\bar{\psi}\mathcal{D}_t\psi + \epsilon m(1+\varphi\,\partial_\varphi \log G)\bar{\psi}\psi\Big]$$

- フェルミオン数射影よる基底状態実効理論

$$[H, \psi\bar{\psi}] = 0 \;\Rightarrow\; \bar{\psi}|\Psi\rangle = 0$$

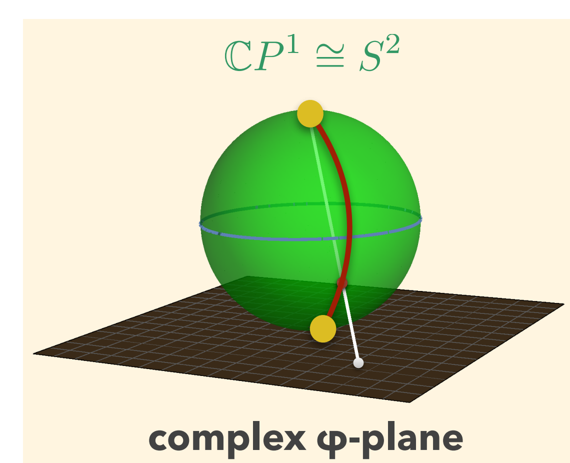
$$\Rightarrow\; V \;=\; \frac{m^2}{4}\sin\theta \;-\; \epsilon m g^2 \cos\theta$$



$$\theta = 2\arctan|\varphi|$$

- 2つのlocal minimaを持つポテンシャル

北極と南極に対応



- Kink解　$S_I = \dfrac{m}{g^2}$

2つの極小点間のトンネル効果を表す

厳密結果

厳密な基底エネルギー in CP1

[Fujimori, Kamata, TM, Nitta, Sakai(16)(17)]

- 基底状態エネルギー $\delta\epsilon = \epsilon - n$

$$E \;=\; E^{(1)}\delta\epsilon \;+\; E^{(2)}\delta\epsilon^2 \;+\; \mathcal{O}(\delta\epsilon^3)$$

$$E^{(1)} = g^2 - m\coth\frac{m}{g^2} = -m + g^2 - \sum_{p=0}^{\infty} 2me^{-\frac{2pm}{g^2}}$$

$$E^{(2)} = g^2 - m\frac{\coth\frac{m}{g^2}}{\sinh^2\frac{m}{g^2}}\left[\frac{\mathrm{Ei}\left(\frac{2m}{g^2}\right)+\mathrm{Ei}\left(-\frac{2m}{g^2}\right)}{2} - \gamma - \log\frac{2m}{g^2}\right]$$

摂動寄与と非摂動寄与が含まれるはず

厳密な基底エネルギー in CP1

$$E^{(2)} = g^2 - m\frac{\coth\frac{m}{g^2}}{\sinh^2\frac{m}{g^2}}\left[\frac{\mathrm{Ei}\left(\frac{2m}{g^2}\right)+\mathrm{Ei}\left(-\frac{2m}{g^2}\right)}{2} - \gamma - \log\frac{2m}{g^2}\right]$$

- 摂動寄与

$$E_0^{(2)} \approx g^2 - 2m\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)!\left(\frac{g^2}{2m}\right)^n$$

ボレル和を実行 arg[g^2] = ±0

- 固定点寄与

$$E_{\mathrm{np}}^{(2)} \approx -2m\sum_{p=1}^{\infty}e^{-\frac{2mp}{g^2}}\left[(p+1)^2\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)!\left(\frac{g^2}{2m}\right)^n + (p-1)^2\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)!\left(-\frac{g^2}{2m}\right)^n - 2p^2\left(\gamma+\log\frac{2m}{g^2}\right)\right]$$

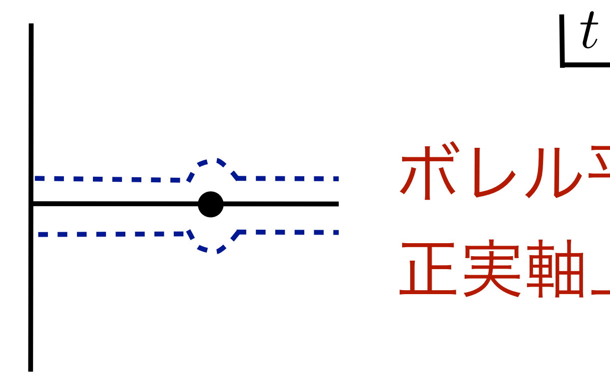
ボレル和を実行 arg[g^2] = ±0

厳密な基底エネルギー in CPI

$$E^{(2)} = g^2 - m \frac{\coth \frac{m}{g^2}}{\sinh^2 \frac{m}{g^2}} \left[\frac{\mathrm{Ei}\left(\frac{2m}{g^2}\right) + \mathrm{Ei}\left(-\frac{2m}{g^2}\right)}{2} - \gamma - \log \frac{2m}{g^2} \right]$$

- 摂動寄与

$$E_0^{(2)} \;=\; g^2 + 2m \int_0^\infty dt \frac{e^{-t}}{t - \frac{2m}{g^2 \pm i0}}$$



ボレル平面上の
正実軸上の特異点

- 固定点寄与

$$E_p^{(2)} = 2m \int_0^\infty dt e^{-t} \left[\frac{(p+1)^2}{t - \frac{2m}{g^2 \pm i0}} + \frac{(p-1)^2}{t + \frac{2m}{g^2}} \right] + 4mp^2 \left(\gamma + \log \frac{2m}{g^2} \pm \frac{i\pi}{2} \right)$$

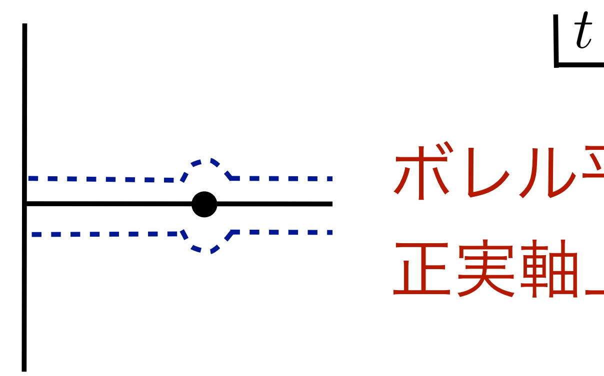
厳密な基底エネルギー in CPI

$$E^{(2)} = g^2 - m\frac{\coth\frac{m}{g^2}}{\sinh^2\frac{m}{g^2}}\left[\frac{\mathrm{Ei}\left(\frac{2m}{g^2}\right)+\mathrm{Ei}\left(-\frac{2m}{g^2}\right)}{2} - \gamma - \log\frac{2m}{g^2}\right]$$

- 摂動寄与

$$E_0^{(2)} \; = \; g^2 + 2m\int_0^\infty dt\frac{e^{-t}}{t-\frac{2m}{g^2\pm i0}}$$

0-bion背景での摂動的寄与



ボレル平面上の
正実軸上の特異点

- 固定点寄与

$$E_p^{(2)} = 2m\int_0^\infty dt e^{-t}\left[\frac{(p+1)^2}{t-\frac{2m}{g^2\pm i0}} + \frac{(p-1)^2}{t+\frac{2m}{g^2}}\right] + 4mp^2\left(\gamma + \log\frac{2m}{g^2} \pm \frac{i\pi}{2}\right)$$

p-bion背景での摂動的寄与 **p-bionの半古典的寄与**

厳密な基底エネルギー in CPI

$$E^{(2)} = g^2 - m\frac{\coth\frac{m}{g^2}}{\sinh^2\frac{m}{g^2}}\left[\frac{\mathrm{Ei}\left(\frac{2m}{g^2}\right)+\mathrm{Ei}\left(-\frac{2m}{g^2}\right)}{2} - \gamma - \log\frac{2m}{g^2}\right]$$

- 摂動寄与

$$E_0^{(2)} = g^2 + \boxed{2m\int_0^\infty dt\,\frac{e^{-t}}{t-\frac{2m}{g^2\pm i0}}} \longrightarrow \mp 2mi\pi$$

摂動的寄与の不定虚部は，1-bionの半古典的寄与の不定虚部と相殺

- 固定点寄与

p=1 bion

$$E_p^{(2)} = 2m\int_0^\infty dte^{-t}\left[\frac{(p+1)^2}{t-\frac{2m}{g^2\pm i0}}+\frac{(p-1)^2}{t+\frac{2m}{g^2}}\right]+4mp^2\left(\gamma+\log\frac{2m}{g^2}\boxed{\pm\frac{i\pi}{2}}\right)$$

厳密な基底エネルギー in CPI

$$E^{(2)} = g^2 - m\frac{\coth\frac{m}{g^2}}{\sinh^2\frac{m}{g^2}}\left[\frac{\mathrm{Ei}\left(\frac{2m}{g^2}\right) + \mathrm{Ei}\left(-\frac{2m}{g^2}\right)}{2} - \gamma - \log\frac{2m}{g^2}\right]$$

- 摂動寄与

$$E_0^{(2)} = g^2 + 2m\int_0^\infty dt\frac{e^{-t}}{t - \frac{2m}{g^2 \pm i0}}$$

- 固定点寄与

(*p*-1)-bion　　相殺　　*p*-bion

$$E_p^{(2)} = \boxed{2m\int_0^\infty dt e^{-t}\Bigg[\frac{(p+1)^2}{t - \frac{2m}{g^2 \pm i0}}} + \frac{(p-1)^2}{t + \frac{2m}{g^2}}\Bigg] + 4mp^2\left(\gamma + \log\frac{2m}{g^2} \boxed{\pm\frac{i\pi}{2}}\right)$$

(*p*-1)-bion背景での摂動的寄与の不定虚部は，*p*-bionの半古典的寄与の不定虚部と相殺！

厳密な基底エネルギー in CPI

$$E^{(2)} = g^2 - m\frac{\coth\frac{m}{g^2}}{\sinh^2\frac{m}{g^2}}\left[\frac{\mathrm{Ei}\left(\frac{2m}{g^2}\right)+\mathrm{Ei}\left(-\frac{2m}{g^2}\right)}{2} - \gamma - \log\frac{2m}{g^2}\right]$$

- 摂動寄与

$$E_0^{(2)} \;=\; g^2 + 2m\int_0^\infty dt\frac{e^{-t}}{t-\frac{2m}{g^2\pm i0}}$$

Bender-Wu法による高次摂動係数

$$A_l \sim -\frac{1}{2^{l-1}}\frac{\Gamma(l+2(1-\epsilon))}{\Gamma(1-\epsilon)^2}$$

摂動寄与と一致！

- 固定点寄与

$$E_p^{(2)} = 2m\int_0^\infty dte^{-t}\left[\frac{(p+1)^2}{t-\frac{2m}{g^2\pm i0}}+\frac{(p-1)^2}{t+\frac{2m}{g^2}}\right]+4mp^2\left(\gamma+\log\frac{2m}{g^2}\pm\frac{i\pi}{2}\right)$$

複素p-bion解の寄与と一致！

複素固定点(複素解)寄与

Euclidean e.o.m

$$\frac{\delta S_E}{\delta \varphi} = -\partial_\tau^2 \varphi + \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} = 0$$

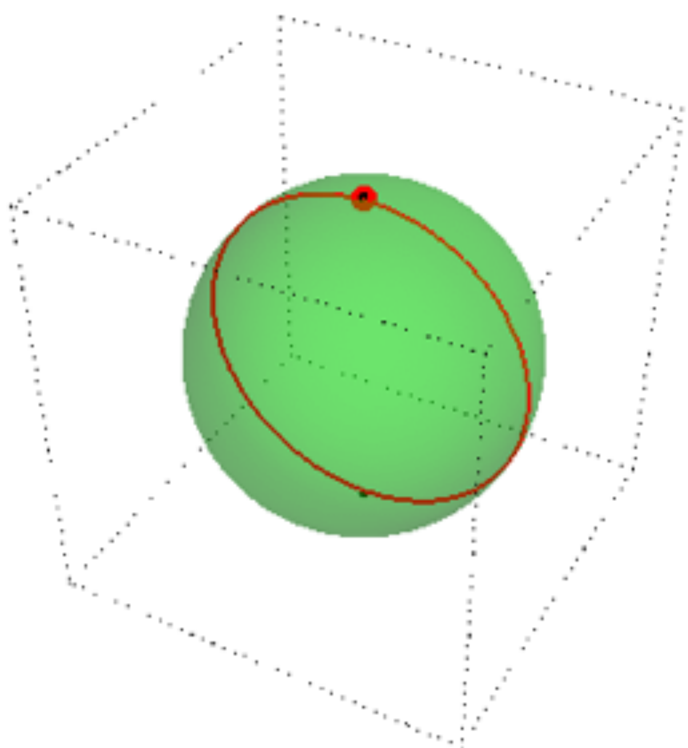
運動方程式の実解：Real bion解

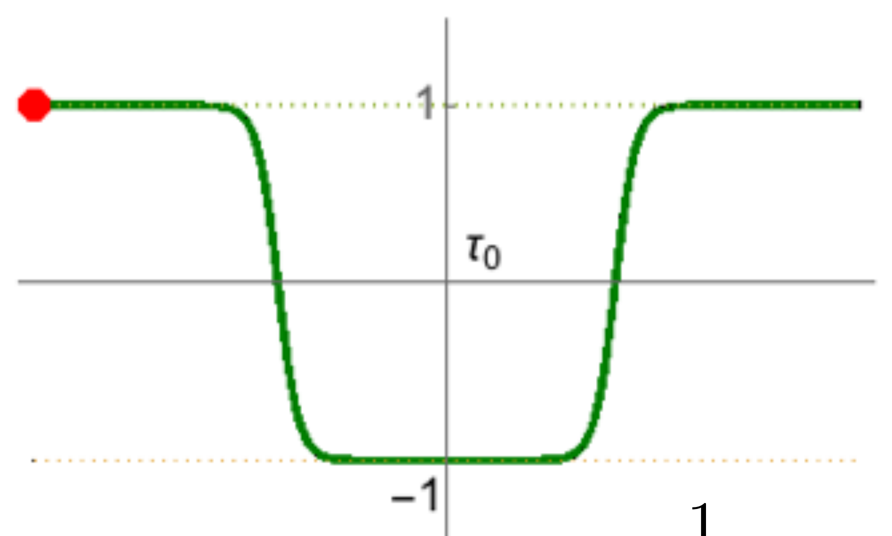
実解

$$\varphi = \sqrt{\frac{\omega^2}{\lambda}} \frac{e^{i\phi_0}}{i \sinh \omega(\tau - \tau_0)}$$

$$\omega^2 = m^2 + \lambda$$
$$\lambda = \epsilon m g^2$$

モジュライパラメタは τ_0 : position　ϕ_0 : phase





$$\frac{1-|\varphi|^2}{1+|\varphi|^2}$$: kink profile

$$\tau_+ - \tau_- = \frac{1}{\omega} \log \frac{4\omega^2}{\omega^2 - m^2}$$

理論(変数)の複素化

・ φ の実部と虚部を複素化 ⇨ 変数の複素化

$$\varphi = \varphi_{\mathrm{R}} + i\varphi_{\mathrm{I}} \qquad \bar{\varphi} = \varphi_{\mathrm{R}} - i\varphi_{\mathrm{I}} \;\to\; \tilde{\varphi}$$

$$\mathbb{C}P^1 \cong \frac{SU(2)}{U(1)} \;\to\; \frac{SU(2)^{\mathbb{C}}}{U(1)^{\mathbb{C}}} \cong T^*\mathbb{C}P^1$$

CP¹の複素化

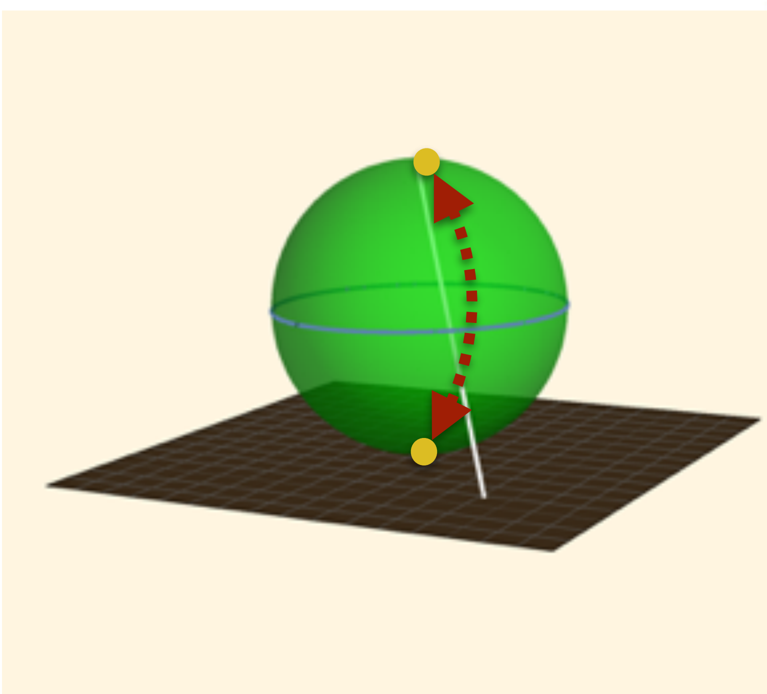
・Holomorphic actionに解析接続

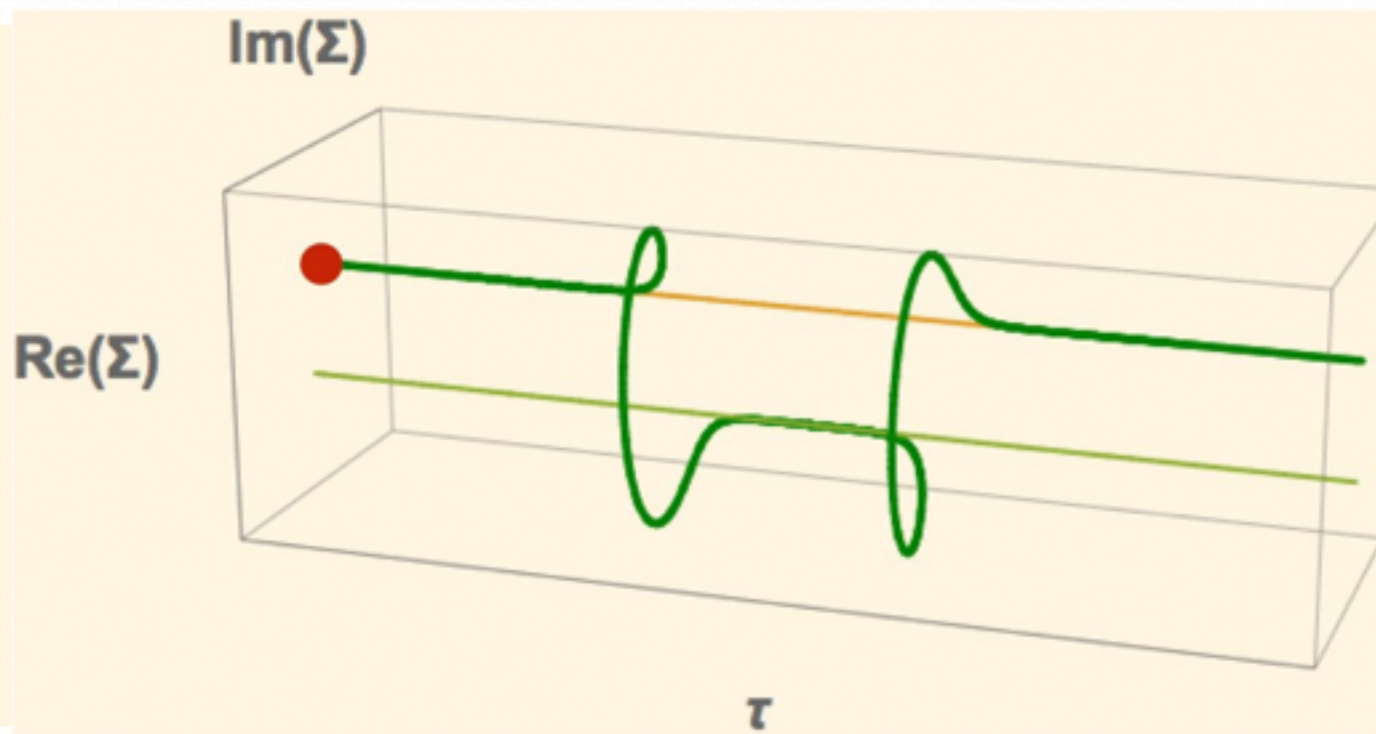
⇨ $S[\varphi, \bar{\varphi}] \;\to\; S[\varphi, \tilde{\varphi}]$ holomorphic

運動方程式の複素解：Complex bion解

複素解

$$\varphi = \sqrt{\frac{\omega^2}{\lambda}} \frac{e^{i\phi_0}}{\cosh \omega(\tau - \tau_0)} \qquad \tilde{\varphi} = -\varphi^*$$





$$\tau_+ - \tau_- = \frac{1}{\omega}\left(\log \frac{4\omega^2}{\omega^2 - m^2} + \pi i\right)$$: “複素相対距離”

Multi-bion 解

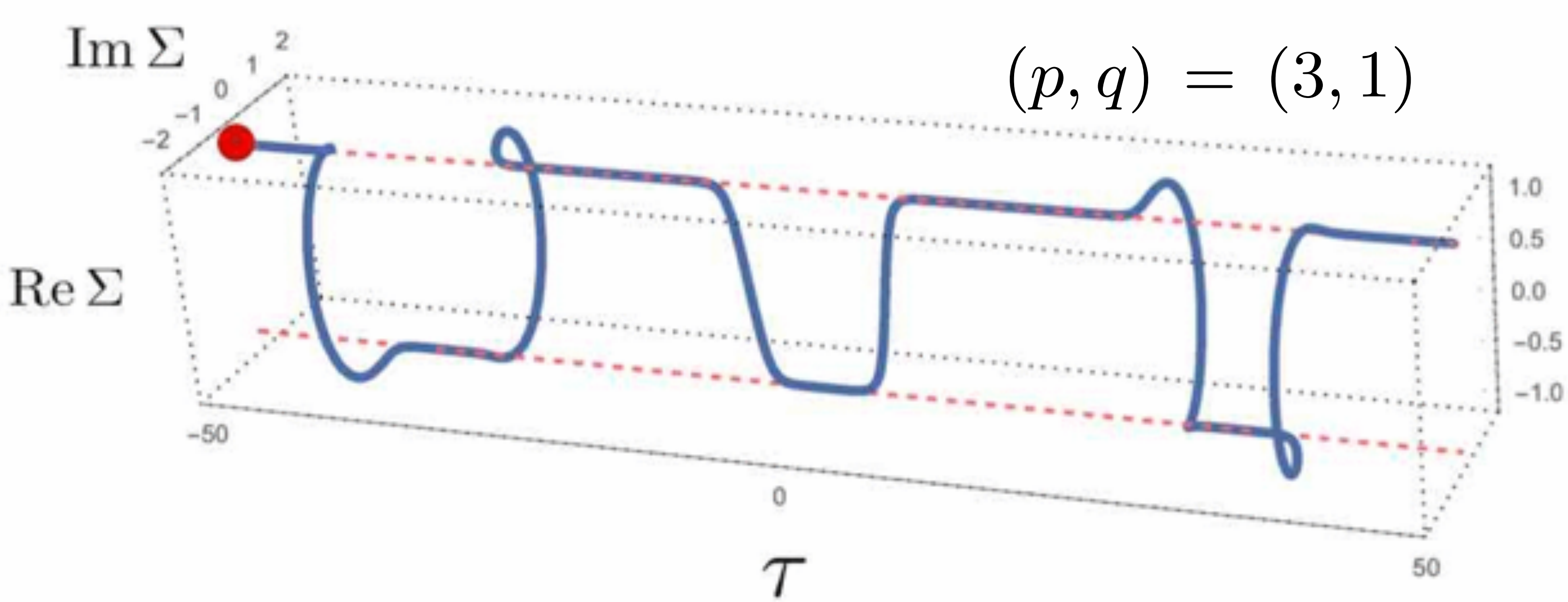
[Fujimori, Kamata, TM, Nitta, Sakai(16)(17)]

Multi-bion解

$$\varphi = e^{i\phi_c}\frac{f(\tau-\tau_c)}{\sin^2\alpha}, \qquad \tilde{\varphi} = e^{-i\phi_c}\frac{f(\tau-\tau_c)}{\sin^2\alpha}$$

$$f(\tau) = \mathrm{cs}(\Omega\tau, k) \equiv \mathrm{cn}(\Omega\tau, k)/\mathrm{sn}(\Omega\tau, k)$$

- 整数(p,q)で分類される
- pはbion数
- qは解の形状を規定



$$S \approx pS_{\mathrm{bion}} + 2\pi i\epsilon l$$

$$S_{\mathrm{bion}} = \frac{2m}{g^2} + 2\epsilon\log\frac{\omega+m}{\omega-m}$$

$(p,\ q)$解は無限個のmulti-bion解のタワーを構成！

複素解のThimble積分実行

準モジュライパラメタ (Nearly massless modes)

= kink間相対距離 τ_r と相対位相 ϕ_r

Real and complex bionsからの寄与

$$\frac{Z_1}{Z_0} \approx \int d\tau_r d\phi_r \, \exp[-V_{\rm eff}(\tau_r, \phi_r)]$$

複素化されたモジュライ空間での実効ポテンシャル TM, Sakai, Nitta (14)

$$V_{\rm eff}(\tau_r, \phi_r) = -\frac{4m}{g^2}\cos\phi_r \, e^{-m\tau_r} + 2\epsilon m\tau_r$$

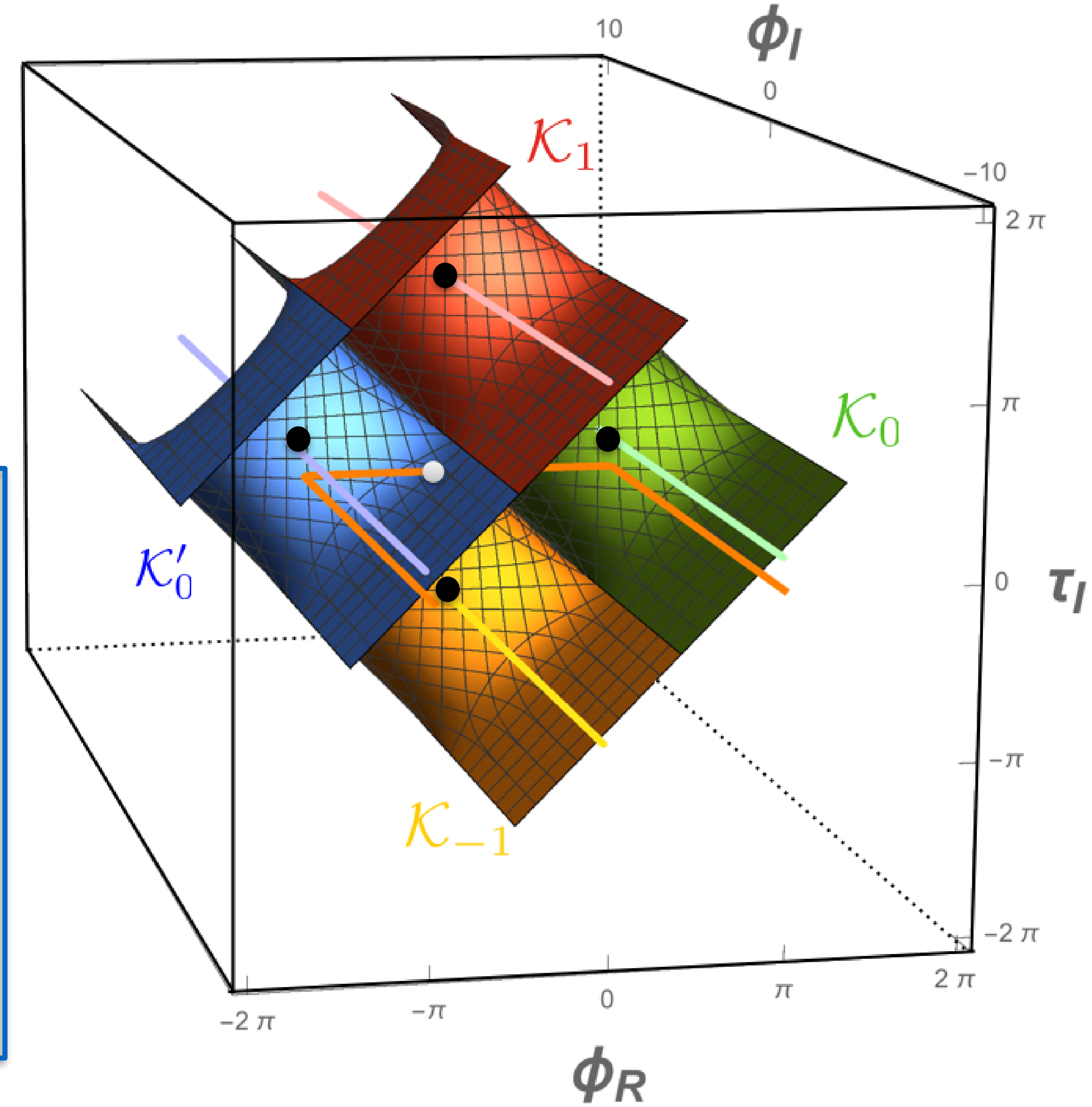
Lefschetz Thimble 積分法

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}} = \sum_{\sigma} n_\sigma \mathcal{J}_\sigma$$

$n_\sigma = \langle \mathcal{C}_{\mathbb{R}}, \mathcal{K}_\sigma \rangle$ 交叉数

$\mathcal{J}_\sigma$: upward flow → **Thimble**

$\mathcal{K}_\sigma$: down flow → **Dual thimble**



Thimbleは4次元空間上の面に対応

$$(\tau_r, \phi_r) \in \mathbb{C}^2$$

上図は3次元射影 for $\theta = \arg[g^2] < 0$

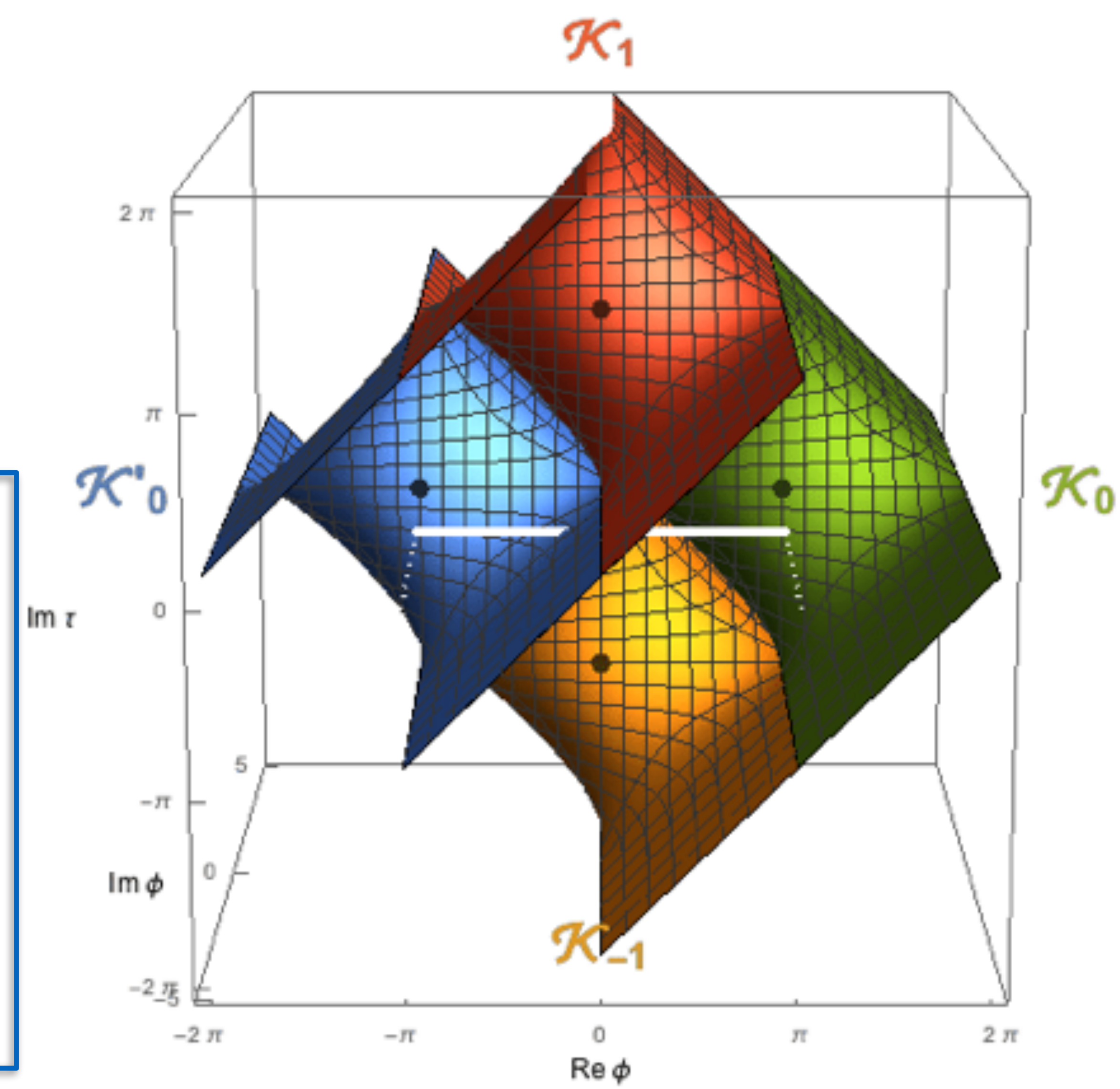
Lefschetz Thimble 積分法

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}} = \sum_{\sigma} n_\sigma \mathcal{J}_\sigma$$

$n_\sigma = \langle \mathcal{C}_{\mathbb{R}}, \mathcal{K}_\sigma \rangle$ 交叉数

$\mathcal{J}_\sigma$: upward flow → Thimble

$\mathcal{K}_\sigma$: down flow → Dual thimble



Thimbleは4次元空間上の面に対応

$$(\tau_r, \phi_r) \in \mathbb{C}^2$$

上図は3次元射影 for $\theta = \arg[g^2] < 0$

Lefschetz Thimble 積分法

$$Z_{\mathrm{q.m.}} = \sum_{\sigma} n_\sigma Z_\sigma$$

・Thimble $\boldsymbol{J_\sigma}$ に沿った積分

$$Z_\sigma \;=\; \int_{\mathbb{R}} d\tau' \int_{i\mathbb{R}} d\phi' \, e^{-V} \;=\; \frac{i}{2m}\left(\frac{g^2 e^{i\theta}}{2m}\right)^{2\epsilon} e^{-2\pi i \epsilon \sigma}\,\Gamma\left(\epsilon\right)^2$$

・元の積分経路とdual thimble $\boldsymbol{K_\sigma}$ との交叉数

$$(n_{-1}\,,\, n_0\,,\, n_1) = \begin{cases} (\,-1\,,\,1\,,\,0\,) & \text{for } \theta = -0 \\ (\,0\,,\,-1\,,\,1\,) & \text{for } \theta = +0 \end{cases}$$

ストークス現象 $\Rightarrow$ 不定虚部を生み出す

複素固定点からの寄与

基底エネルギーへの寄与

$$E_{\text{bion}} = -2m\left(\frac{g^2}{2m}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{\sin\epsilon\pi}{\pi}\Gamma(\epsilon)^2 e^{-\frac{2m}{g^2}} \times \begin{cases} e^{\pi i\epsilon} & \text{for } \theta = -0 \\ e^{-\pi i\epsilon} & \text{for } \theta = +0 \end{cases}.$$

$$= \boxed{-2m} e^{-\frac{2m}{g^2}}\delta\epsilon + \boxed{4m\left(\gamma + \log\frac{2m}{g^2} \pm \frac{i\pi}{2}\right)} e^{-\frac{2m}{g^2}}\delta\epsilon^2 + \mathcal{O}(\delta\epsilon^3)$$

厳密結果の p=1 部分と完全に一致

$$\boxed{E_p^{(1)} = -2m,} (p \geq 1)$$

$$E_p^{(2)} = 2m\int_0^\infty dte^{-t}\left[\frac{(p+1)^2}{t-\frac{2m}{g^2 \pm i0}} + \frac{(p-1)^2}{t+\frac{2m}{g^2}}\right] \boxed{+4mp^2\left(\gamma + \log\frac{2m}{g^2} \pm \frac{i\pi}{2}\right)}$$

全ての複素固定点からの寄与

基底エネルギーへの寄与

$$\frac{Z_p}{Z_0} \approx \frac{1}{p!}\left[\frac{2m\beta\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(1-\epsilon)}e^{-\frac{2m}{g^2}\mp\pi i\epsilon}\left(\frac{2m}{g^2}\right)^{2(1-\epsilon)}\right]^p$$

$$= -2m\, e^{-\frac{2m}{g^2}}\delta\epsilon + 4mp^2\left(\gamma+\log\frac{2m}{g^2}\pm\frac{i\pi}{2}\right)e^{-\frac{2m}{g^2}}\delta\epsilon^2 + \mathcal{O}(\delta\epsilon^3)$$

厳密結果との精確な一致

$$E_p^{(1)} = -2m, \quad (p \geq 1)$$

$$E_p^{(2)} = 2m\int_0^\infty dt e^{-t}\left[\frac{(p+1)^2}{t-\frac{2m}{g^2 \pm i0}} + \frac{(p-1)^2}{t+\frac{2m}{g^2}}\right] + 4mp^2\left(\gamma+\log\frac{2m}{g^2}\pm\frac{i\pi}{2}\right)$$

完全なトランス級数展開

厳密な基底エネルギー in CP I

$$E^{(2)} = g^2 - m\frac{\coth\frac{m}{g^2}}{\sinh^2\frac{m}{g^2}}\left[\frac{\mathrm{Ei}\left(\frac{2m}{g^2}\right)+\mathrm{Ei}\left(-\frac{2m}{g^2}\right)}{2} - \gamma - \log\frac{2m}{g^2}\right]$$

- 摂動寄与

$$E_0^{(2)} \;=\; g^2 + 2m\int_0^\infty dt\frac{e^{-t}}{t-\frac{2m}{g^2\pm i0}}$$

Bender-Wu摂動展開と完全に一致

- 固定点寄与

$$E_p^{(2)} = 2m\int_0^\infty dt e^{-t}\left[\frac{(p+1)^2}{t-\frac{2m}{g^2\pm i0}}+\frac{(p-1)^2}{t+\frac{2m}{g^2}}\right]+\boxed{4mp^2\left(\gamma+\log\frac{2m}{g^2}\pm\frac{i\pi}{2}\right)}$$

Timble計算に基づくp-bion寄与と完全に一致

厳密な基底エネルギー in CPI

$$E^{(2)}=g^2-m\frac{\coth\frac{m}{g^2}}{\sinh^2\frac{m}{g^2}}\left[\frac{\mathrm{Ei}\left(\frac{2m}{g^2}\right)+\mathrm{Ei}\left(-\frac{2m}{g^2}\right)}{2}-\gamma-\log\frac{2m}{g^2}\right]$$

- 摂動寄与

$$E_0^{(2)} \;=\; g^2+2m\int_0^\infty dt\frac{e^{-t}}{t-\frac{2m}{g^2\pm i0}}$$

Bender-Wu摂動展開と完全に一致

- 固定点寄与

$$E_p^{(2)}=\boxed{2m\int_0^\infty dte^{-t}\left[\frac{(p+1)^2}{t-\frac{2m}{g^2\pm i0}}+\frac{(p-1)^2}{t+\frac{2m}{g^2}}\right]}+4mp^2\left(\gamma+\log\frac{2m}{g^2}\pm\frac{i\pi}{2}\right)$$

p-bion周りでの摂動展開に対応

全てのMulti-bion解の寄与に基づく
完全なリサージェンス構造を確認！

4次元Yang-MillsやQCDでは？

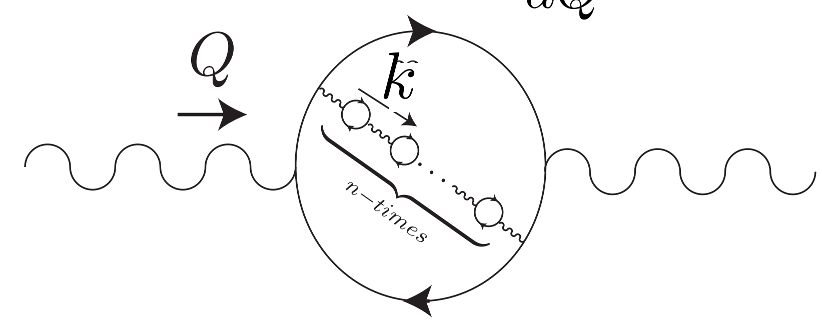
QCDにおける赤外リノーマロン不定性

't Hooft(79)

◆アドラー関数と赤外リノーマロン

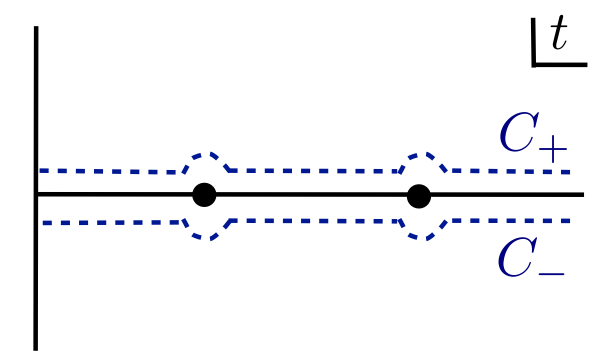
- Renormalized loop挿入によりfurther subtraction不要
- 各loop寄与は $-\beta_0 \alpha_s \log(-k^2/\mu^2)$
- 外線運動量Qだけに依存しUV & IR finite

$$D(Q^2) = 4\pi^2 \frac{d\Pi(Q^2)}{dQ^2}$$



$$D(Q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_s \int_0^{\infty} d\hat{k}^2 \frac{F(\hat{k}^2)}{\hat{k}^2} \left[\beta_0 \alpha_s \log \frac{\hat{k}^2 Q^2}{\mu^2} \right]^n \approx \alpha_s \sum_n \left(-\frac{\alpha_s \beta_0}{2} \right)^2 n! + \text{UV contr.}$$

$$\Rightarrow \quad BP(t) = \alpha_s(\mu) \sum_n \left(-\frac{\alpha_s(\mu)\beta_0 t}{2} \right)^n = \frac{\alpha_s(\mu)}{1 + \alpha_s(\mu)\beta_0 t/2}$$



$$\Rightarrow \quad t = -\frac{2}{\alpha_s(\mu)\beta_0}$$

正の実軸上の特異点

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B}(g^2) = \mathrm{Re}\mathbf{B} \pm i\pi \frac{1}{\beta_0} e^{\frac{8\pi}{\beta_0 g^2(\mu)}}$$

$$\sim e^{-2nS_I/N}$$

$$\sim (\Lambda/Q)^4$$

大まかには $2S_I/N_c$ 作用

QCD scaleに関連

正則化されたQCD型理論？

QCDをweak coupling領域で扱うために変形が必要

- ゲージ場作用をゲージ対称に変形する方向性

  Double-trace deformation, et.al. Unsal(09)

- 随伴表現クォークなどを導入する方向性

  QCD(adj.), Z3-QCD, et.al.

  Unsal(07) Kouno, et.al. (12)
  Kanazawa,TM(14) Iritani,Itou,TM(15)
  Cherman(16), Sulejmanpasic(16)

- 時空をコンパクト化する方向性

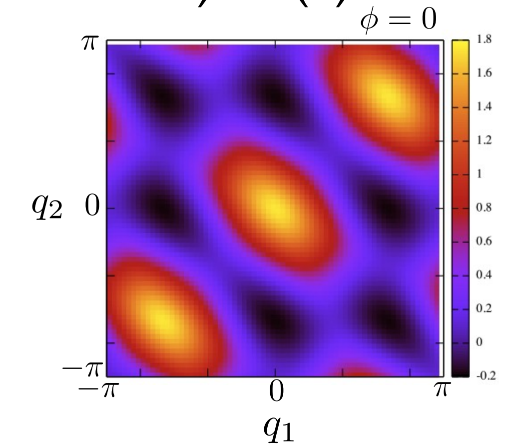
  R3 x S1, T3 x S1, et.al. Yamazaki,Yonekura (17)

QCD(adj.) on $\mathbf{R}^3 \times S^1$

◆細谷機構による非自明なPolyakov-loop holonomy in S^1

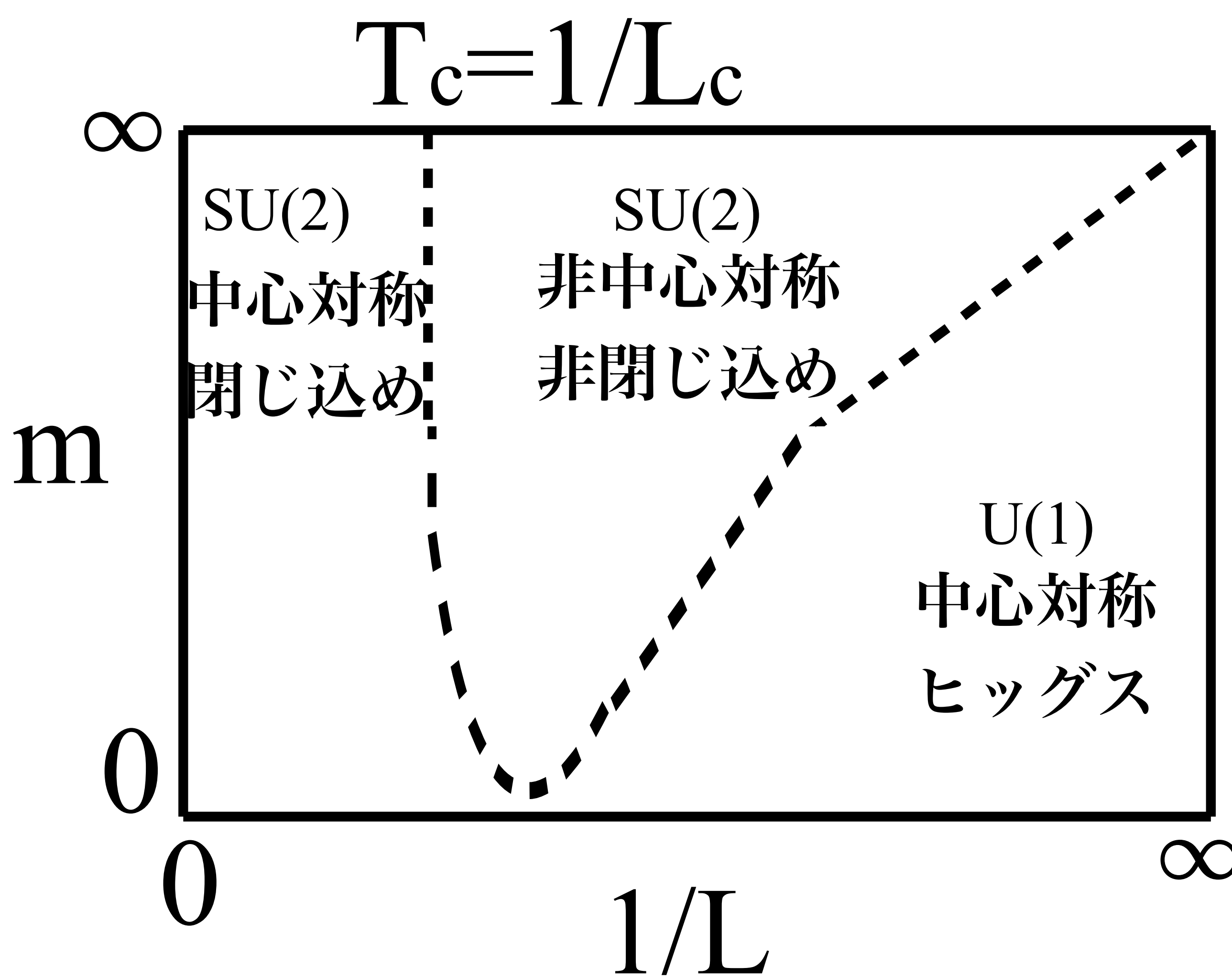
$$P = \mathrm{Tr}\left(\mathcal{P}\exp[ig\int_C A_4 dx_4]\right) = \mathrm{diag}[e^{2\pi i q_1}, e^{2\pi i q_2}, ..., e^{2\pi i q_N}]$$

cf.) SU(3)



➡ **U(1)^(Nc-1) 中心対称相の出現**

cf.)SU(2)



Schematic phase diagam

Cossu, D'Elia (08)
Cossu, Hatanaka, Hosotani, Noaki(13)
Kashiwa, TM (13)
TM, Kanazawa (14)

U(1)相におけるソリトン解

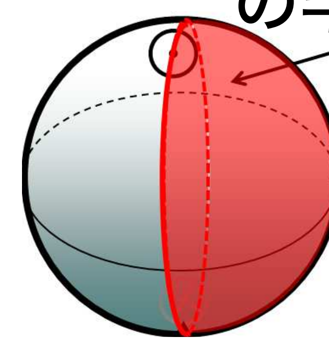
BPS解： 1/*N* 分数インスタントン (Q=1/*N*)

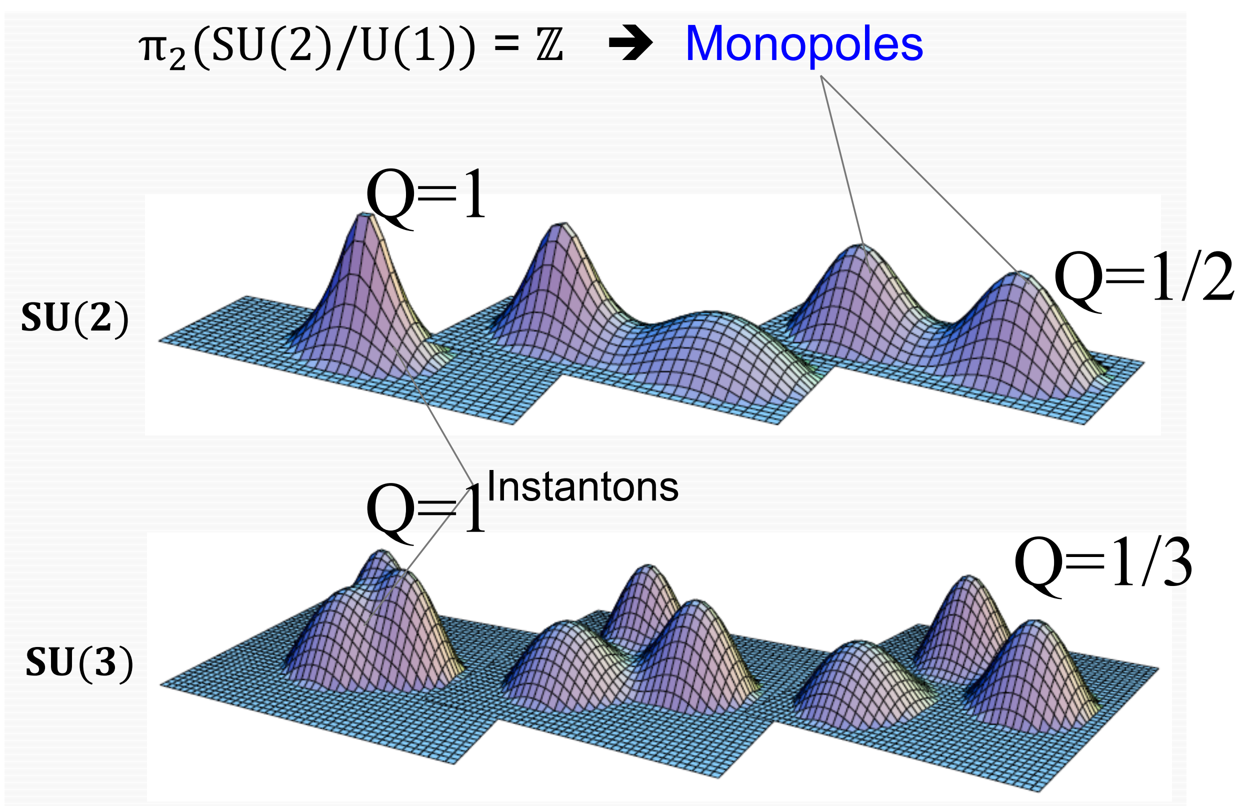
$$P = \mathrm{diag}[1, e^{2\pi i/N}, e^{4\pi i/N}, \cdots, e^{2\pi(N-1)i/N}] \qquad (P^N = \mathbf{1})$$

- Z_N twisted B.C.を課すことと等価
- BPS解は1/N target spaceへのマップに対応

ex.) SU(2) case

Target space の半分



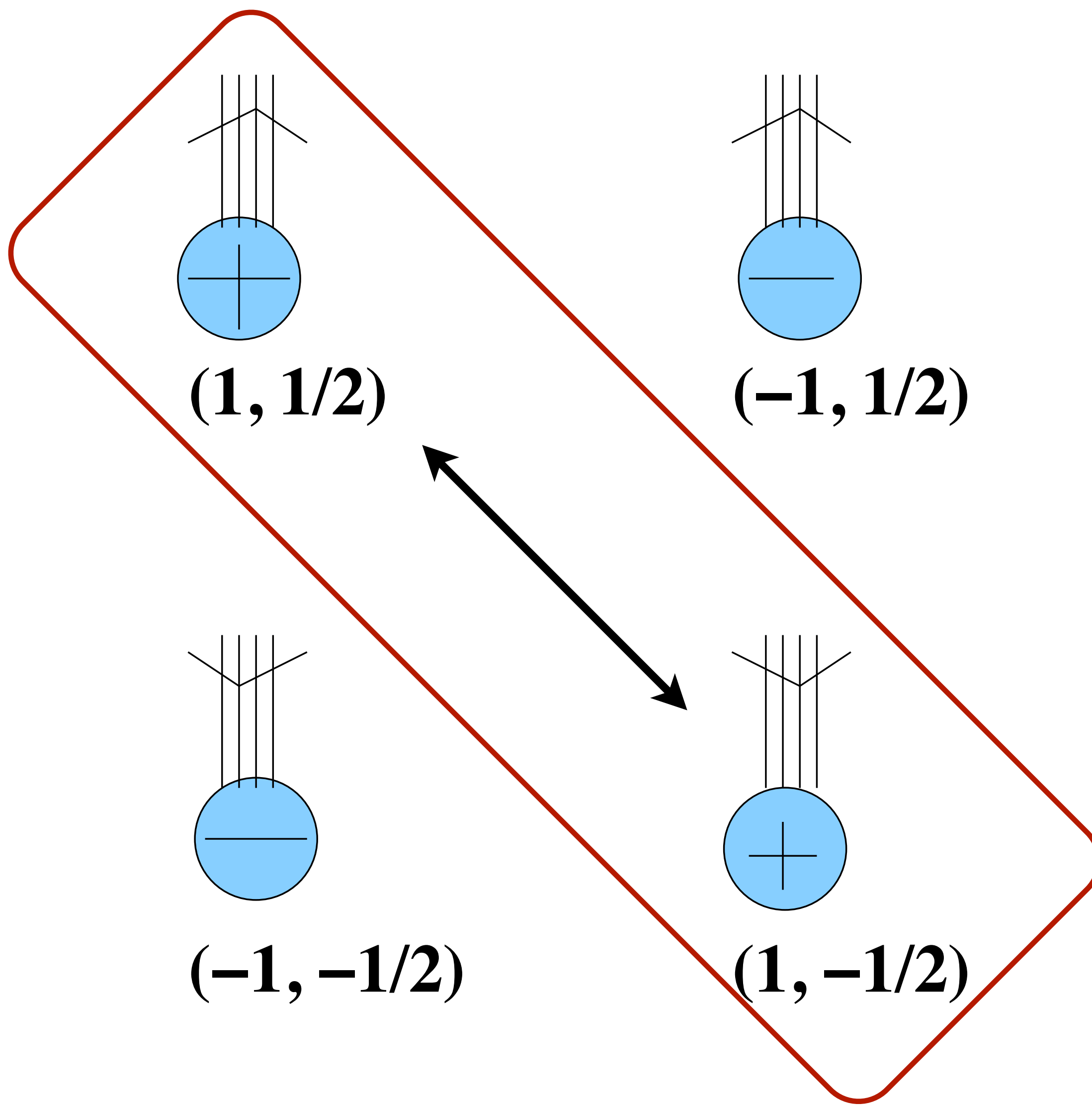


Magnetic bionsによる閉じ込め

Unsal(07)

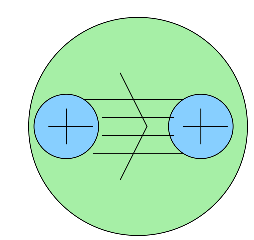
$$\left(\int F,\ \int F\tilde{F}\right) = (\text{磁荷, インスタントン数})$$

cf.)SU(2)



Magnetic bion凝縮

閉じ込め



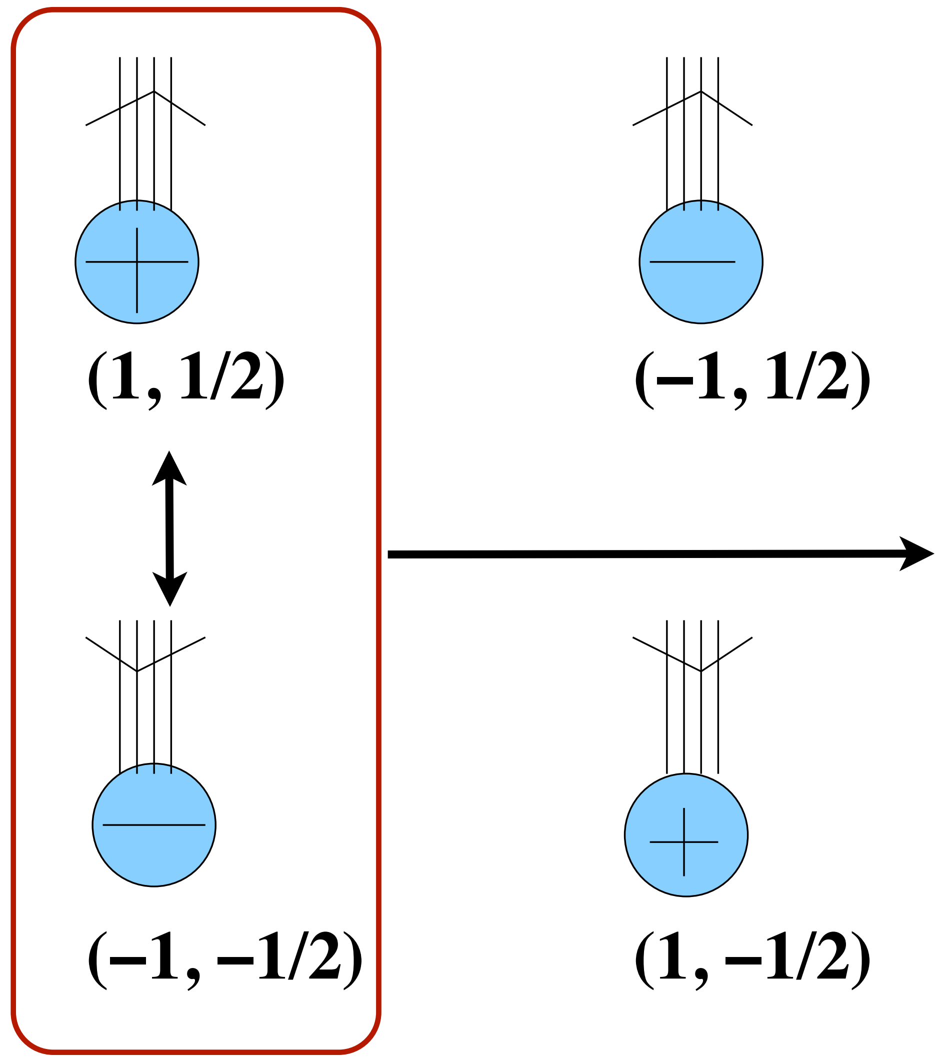
Fermion zero mode交換に基づくMagnetic bionの凝縮による閉じ込め(massive dual photon)

Neutral bionsと赤外リノーマロン

Argyres-Unsal (12)

$$\left(\int F,\ \int F\tilde{F}\right) = \text{（磁荷, インスタントン数）}$$

cf.)SU(2)



Neutral bion

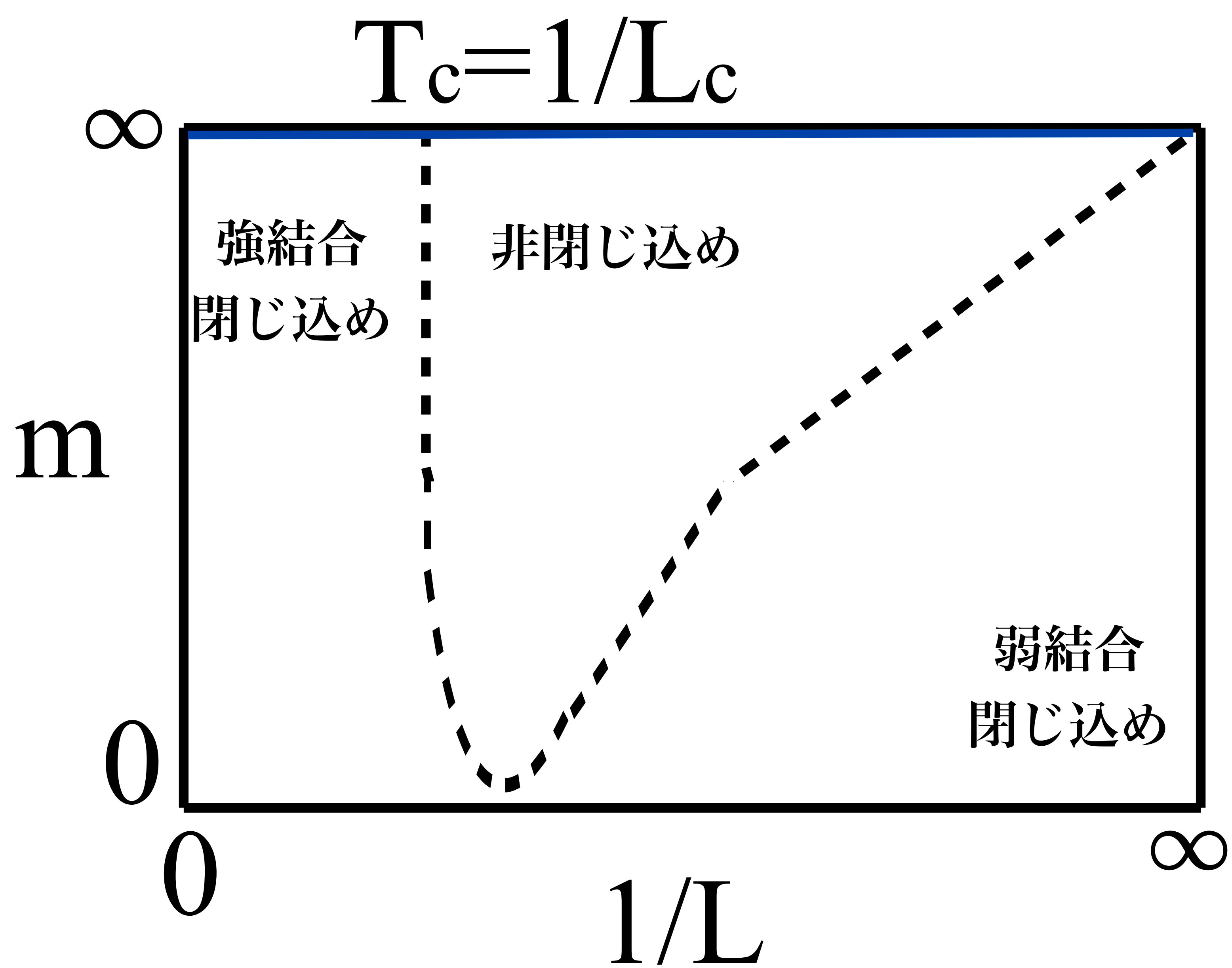
=

IR-renormalon ?

$$\approx e^{-\frac{2S_{\rm I}}{N}}$$

Neutral bion(もしくは対応する複素解)の寄与は不定虚部を持ち，リノーマロン不定虚部を相殺すると予想出来る

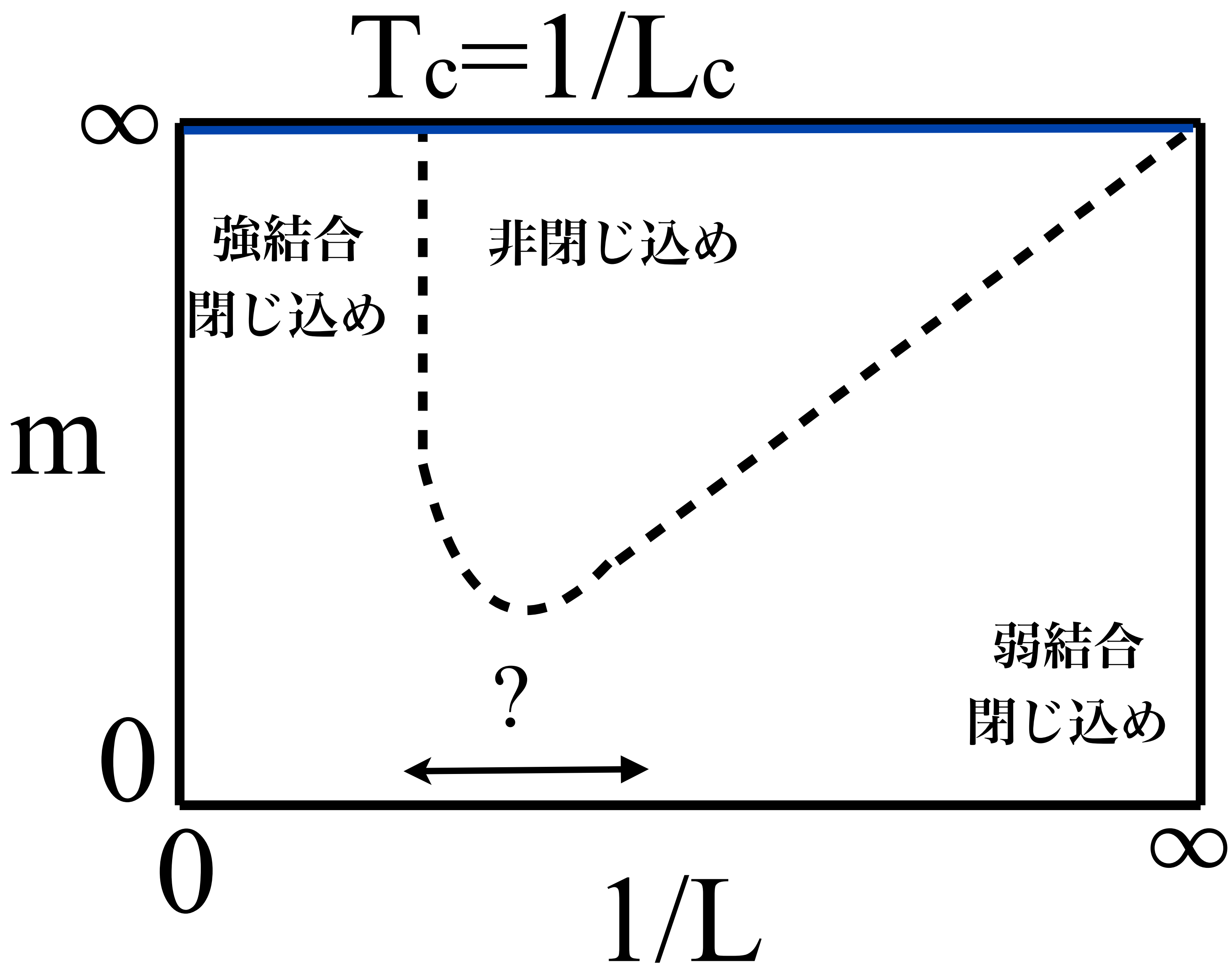
QCD(adj)での結果はQCDに繋がるか？



問題は弱結合-強結合閉じ込め相の連続性があるか否か

(2つの相を分けるorder parameterは存在しない)

QCD(adj)での結果はQCDに繋がるか？



問題は弱結合-強結合閉じ込め相の連続性があるか否か

(2つの相を分けるorder parameterは存在しない)

まとめ

- 複素解の寄与まで含めたトランス級数によって，量子論の厳密結果を再現

- 量子力学，2次元場の量子論，厳密に解ける理論などにおいては，リサージェンス構造を確認

- QCDを含むリノーマロンを持つ理論においては，defomed理論とのcontinuityが鍵

数学の分野も巻き込んだ今後の進展が期待される

昔からのインスタントン展開と何が違うの？

- トランス級数にリサージェンス理論による数学的裏付けが与えられた.
- 複素古典解とThimble分解という観点から経路積分を理解する(定義する)可能性が得られた.
- 分数インスタントンの複合状態(Bion)もしくはそれに対応する複素解がリノーマロンを説明する可能性が出てきた.

何が出来るのか？

- 格子理論と異なる見方に基づいた場の量子論・経路積分の非摂動的定式化の可能性

Kontsevich(14)

- 複素古典解の寄与を少しでも取り入れることで，新しい非摂動的近似法として使える

- 非超対称場の量子論であっても複素古典解を見つけることで，非摂動解析を近似的に実行出来る可能性.

Dolan, Burns ('80)

- **Resurgence and Transseries in Quantum, Gauge and String Theories — CERN 2014**
- **Resurgence and Localization in String Theory and Quantum Field Theory — SIMONS CENTER 2015**
- **Resurgence, Physics and Numbers — PISA 2015**
- **Resurgence Gauge and String theory — IST 2016**
- **Stokes phenomenon, Resurgence and Physics at IRMA — IRMA Strasbourg 2016**
- **Resurgence at Kavli IPMU — IPMU 2016 Dec.**
- **RIMS-iTHEMS International Workshop on Resurgence Theory — RIKEN Kobe 2017 Sep.**
- **Resurgent Asymptotics in Physics and Mathematics — KITP-UCSB 2017**