環境と結合した有限サイズ Dicke 模型における量子相転移

今井 良輔, 山中 由也

早稲田大学 基幹理工学研究科

京都大学基礎物理学研究所・研究会
「熱場の量子論とその応用」
August 28, 2017

1. 導入
    - Dicke 模型について
    - 粒子数 $N \to \infty$ 極限での相転移
    - 超放射相転移の実時間観測実験
2. 粒子数 N 有限での模型の性質
    - 基底状態について厳密にわかること
    - $\dfrac{\omega_0}{\lambda} \ll 1$ での基底状態と第一励起状態
3. 散逸と測定の影響
4. まとめ

Dicke model

Cavity QED の模型のひとつ

- N 個の同種 2 準位原子 $\hat{J}^{(1,2,3)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \hat{\sigma}_k^{(1,2,3)}, \quad J = N/2$
- 共振器モードの光子 $\hat{a}$
- 電気双極子相互作用で結合（強さ λ）

$$\hat{H} = \omega_0 \hat{J}^{(3)} + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\lambda}{\sqrt{2J}} \left[\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger \right) \left(\hat{J}^+ + \hat{J}^- \right) \right]$$

対称性 $\quad \Pi^\dagger \hat{H} \Pi = \hat{H}, \quad \Pi := \exp\left\{ i \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{J}^{(3)} - J \right) \pi \right\}$

$\hat{H}$ の固有状態 $|\Psi_l\rangle$

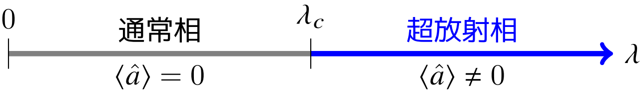
$$\Pi |\Psi_l\rangle = |\Psi_l\rangle \quad \text{or} \quad \Pi |\Psi_l\rangle = -|\Psi_l\rangle$$

光子数 + 励起原子数 の偶奇（パリティ, Z_2）対称性をもつ

粒子数 $N \to \infty$ 極限：超放射相転移

粒子数 $N \to \infty$ 極限の解析

- 有限温度の解析 [Hepp (1973), Wang (1973)]
- 絶対零度 [Emary, PRE (2003)] $\to$ 量子相転移



Emary (2003) の証明の流れ

1. Holstein-Primakoff 変換 ($\hat{J}^{(\alpha)}$ を Boson $\hat{b}$ に)
2. $\alpha, \beta \neq 0$ を用いて Boson 変位 $\hat{a} = \alpha + \hat{c},\ \hat{b} = \beta + \hat{d}$
3. $\hat{H}$ が Fock 空間で対角的になるように Bogoliubov 変換 $\to$ 準粒子
4. 準粒子のエネルギー > 0 の条件から相境界を得る

基底状態 $|\Psi_0\rangle$ がパリティ ± 1 をもつとする。関係 $\Pi \hat{a} \Pi^\dagger = -\hat{a}$ から

$$\langle\Psi_0|\,\hat{a}\,|\Psi_0\rangle = -\langle\Psi_0|\,\Pi^\dagger \hat{a} \Pi\,|\Psi_0\rangle = -(\pm 1)^2 \langle\Psi_0|\,\hat{a}\,|\Psi_0\rangle$$

$$\to \langle\Psi_0|\,\hat{a}\,|\Psi_0\rangle = 0 \quad \textbf{通常相}$$

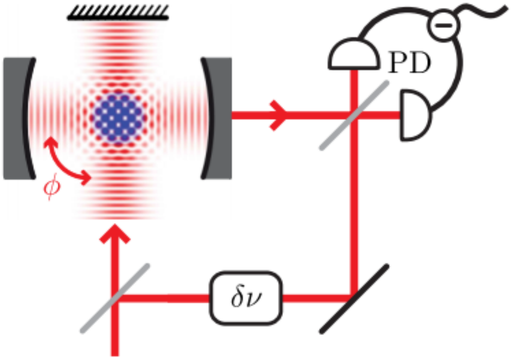
対偶 ⋯ 超放射相の基底状態 $|\psi_0\rangle$ は Π の固有状態ではない

超放射相 = 対称性の自発的破れ (SSB) の発現した相

超放射相転移の実時間観測

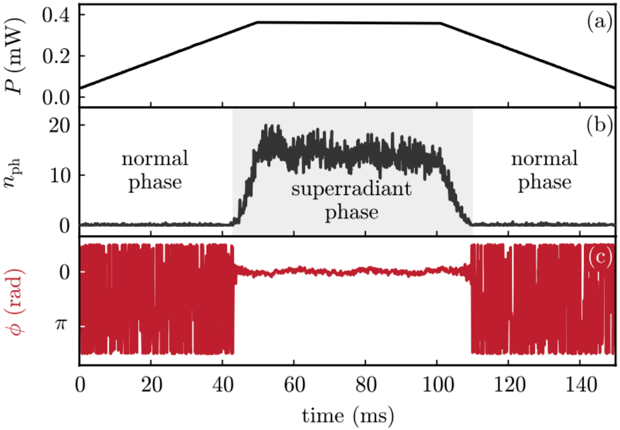
2011 年の K. Baumann [PRL **107**, 140402 (2011)] らによる実験

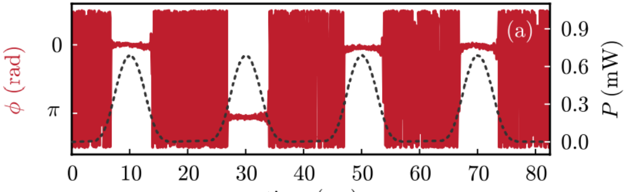
- 冷却原子 BEC (2 準位原子集団としての役割)
  ＋ 光学 Cavity による単一モード光子
- 駆動光、散逸あり（バランス型ヘテロダイン測定）
- 駆動光の強さ $\propto \lambda$、Z_2 対称性破れ（超放射転移）を実時間観測



[K. Baumann PRL **107**, 140402 (2011)]

[K. Baumann PRL **107**, 140402 (2011)]





粒子数 $N \to \infty$ での理解で十分？

- 原子数 $N \simeq 2 \times 10^5 < \infty$
- 有限サイズで SSB が起きない例: 量子 Ising model
- 開放系としての影響は？

そこで

粒子数 N 有限での Dicke 模型の性質を調べ
実験との対応について考察する

量子相転移現象のより深い理解へ繋げたい

基底状態について厳密にわかること

- いくつかの具体的な表示をとる
- Perron-Frobenius 定理、変分的な操作、等により

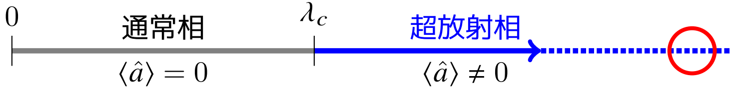
λ **の大小に関わらず**基底状態のパリティは 1 で縮退なし

↓

有限 N の基底状態は SSB を起こしていない

- 実験 (有限 N) の解釈？

$\dfrac{\omega_0}{\lambda} \ll 1$ での基底状態



2 軸で $\pi/2$ 回転するユニタリ変換 $U := \exp\left\{ i\dfrac{\pi}{2}\hat{J}^{(2)} \right\}$ で変換

$$\hat{H} = -\frac{\omega_0}{\lambda}\hat{J}^{(1)} + \frac{\omega}{\lambda}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sqrt{\frac{2}{J}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\hat{J}^{(3)}$$

この性質を調べていく

$\dfrac{\omega_0}{\lambda} = 0$ のとき

$\left[\hat{J}^{(3)}, \hat{H}\right] = \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{H}\right] = 0 \rightarrow$ 固有状態は $\hat{J}^{(3)}, \hat{a}^\dagger\hat{a}$ の同時固有状態

$\hat{J}^{(3)}$ の固有値 m の固有空間中では

$$\hat{h}_m = \frac{\omega}{\lambda}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sqrt{\frac{2}{J}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)m = \frac{\omega}{\lambda}\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m - \frac{2m^2\lambda}{\omega J}$$

$$\hat{a}_m = \hat{a} + \sqrt{\frac{2}{J}}\frac{m\lambda}{\omega}$$

基底状態は固有値 $\pm J$ の固有空間に属する
$\hat{a}_m\left|0_m\right\rangle = 0$ となる状態を用いて書くと

$$\left|\Psi_0^{(+J)}\right\rangle = \left|0_{+J}\right\rangle\left|+J\right\rangle, \quad \left|\Psi_0^{(-J)}\right\rangle = \left|0_{-J}\right\rangle\left|-J\right\rangle$$

の 2 つ。それぞれコヒーレント状態

$$\hat{a}\left|\Psi_0^{(+J)}\right\rangle = -\frac{\sqrt{2J}\lambda}{\omega}\left|\Psi_0^{(+J)}\right\rangle, \quad \hat{a}\left|\Psi_0^{(-J)}\right\rangle = \frac{\sqrt{2J}\lambda}{\omega}\left|\Psi_0^{(-J)}\right\rangle$$

$\omega_0/\lambda = 0$ での基底状態は 2 重に縮退していて
それぞれ SSB を示す

$0 < \frac{\omega_0}{\lambda} \ll 1$ のとき

$\frac{\omega_0}{\lambda} = 0$ から摂動として $0 < \frac{\omega_0}{\lambda} \ll 1$ を加えると、基底状態 $|\Psi_0\rangle$ は

$$|\Psi_0\rangle \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|\Psi_0^{(-J)}\right\rangle + \left|\Psi_0^{(+J)}\right\rangle\right] + \mathcal{O}\left(\frac{\omega^0}{\lambda}\right)$$

となる。($\because$　基底状態のパリティは 1)

第一励起状態は

$$|\Psi_1\rangle \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|\Psi_0^{(-J)}\right\rangle - \left|\Psi_0^{(+J)}\right\rangle\right] + \mathcal{O}\left(\frac{\omega^0}{\lambda}\right)$$

エネルギーギャップの見積もり

摂動計算の結果:

$$|\Psi_0\rangle = \sum_m \int dx\, \psi_m(x)\, |m, x\rangle, \quad \psi_m(x) \in \mathbb{R} \geq 0$$

$$\psi_{\frac{1}{2}}(x) = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\omega_0}{\lambda}\right)^{J-1/2}\right),\ \psi_{-\frac{1}{2}}(x) = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\omega_0}{\lambda}\right)^{J-1/2}\right)$$

試行状態 $|\Psi'\rangle$ を次のように定義する。

$$|\Psi'\rangle = \sum_{m>0} \int dx\, \psi_m(x)\, |m, x\rangle - \sum_{m<0} \int dx\, \psi_m(x)\, |m, x\rangle$$

性質 $\quad \Pi\, |\Psi'\rangle = -\, |\Psi'\rangle,\ \langle \Psi_0 | \Psi' \rangle = 0.$

基底状態とのエネルギー差 $\Delta E'$ を求めると

$$\begin{aligned}\Delta E' &:= \langle \Psi' | \hat{H} | \Psi' \rangle - \langle \Psi_0 | \hat{H} | \Psi_0 \rangle \\ &= \omega_0 \sqrt{J(J+1) + \frac{1}{4}} \int dx\, \psi_{\frac{1}{2}}(x) \psi_{-\frac{1}{2}}(x) \\ &= \omega_0 \sqrt{J(J+1) + \frac{1}{4}} \times \mathcal{O}\left(\left(\frac{\omega_0}{\lambda} \right)^{N-1} \right)\end{aligned}$$

$\Delta E := E_{\text{1st ex.}} - E_{\text{g.s.}}$ とすると

$$\Delta E \leq \Delta E' = \omega_0 \sqrt{J(J+1) + \frac{1}{4}} \times \mathcal{O}\left(\left(\frac{\omega_0}{\lambda} \right)^{N-1} \right)$$

$N \to \infty$ で、ΔE が指数的に閉じていく

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\Psi_0\rangle + |\Psi_1\rangle] + \mathcal{O}\left(\frac{\omega^0}{\lambda}\right) \simeq \left|\Psi_0^{(-J)}\right\rangle$$
$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\Psi_0\rangle - |\Psi_1\rangle] + \mathcal{O}\left(\frac{\omega^0}{\lambda}\right) \simeq \left|\Psi_0^{(+J)}\right\rangle$$

固有状態の**適当な**重ね合わせで対称性を破る状態が作れる！

$|\Psi(t=0)\rangle = |+\rangle$ として、時間発展を考えると

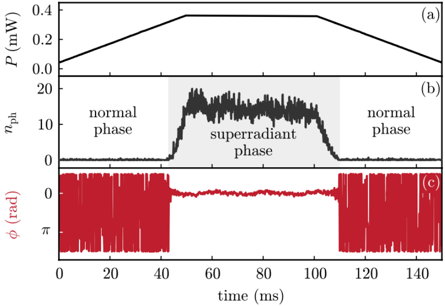
$$|\langle +|\Psi(t)\rangle|^2 = \cos^2\frac{\Delta E t}{2}, \quad |\langle -|\Psi(t)\rangle|^2 = \sin^2\frac{\Delta E t}{2}$$

コヒーレント状態の間を周期 $T = \dfrac{2\pi}{\Delta E}$ で振動する。

$T = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^{N-1}\right)$ N 大 $\to$ 周期 T 大 (実験 $N \simeq 2 \times 10^5$)

なぜ重ねあわせ状態が生まれるのか

[K. Baumann PRL **107**, 140402 (2011)]



λ_c 付近で非断熱的な遷移が生じると考えると
重ね合わせが生じる理由を説明できる

$|+\rangle$ や $|-\rangle$ という特別な重ねあわせが特別に現れる理由は？

散逸と測定の影響

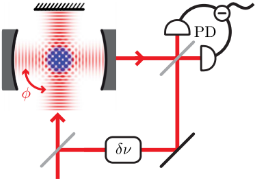
$|\Psi_0\rangle, |\Psi_1\rangle$ の線型結合を初期条件とすると、状態の時間発展は

$$|\Psi(t)\rangle = c_+(t)\,|+\rangle + c_-(t)\,|-\rangle$$

で有効的に記述できる → 2 状態近似

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\Delta E}{2} \\ -\frac{\Delta E}{2} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{\Delta E}{2}\hat{\sigma}^{(1)}$$

考慮すること：　フォトンの散逸 + **連続測定**



[K. Baumann PRL **107**, 140402 (2011)]

設定

- Δt の間に共振器から光子が出てきて測定が起きる確率 $= \gamma \Delta t$
- $\hat{x} = \dfrac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2\omega}}$ の正負を測る（現実より単純な測定）

測定による状態変化 $\cdots$ Kraus 演算子

$$\hat{M}_+ = \sqrt{\gamma \Delta t}\,\hat{P}_+, \quad \hat{M}_- = \sqrt{\gamma \Delta t}\,\hat{P}_-, \quad \hat{M}_0 = \sqrt{1 - \gamma \Delta t}$$

$$\left(\hat{P}_+ = \int_0^\infty dx\ |x\rangle\langle x|\,,\ \hat{P}_- = \int_{-\infty}^0 dx\ |x\rangle\langle x| \right)$$

状態 $\rho(t)$ の時間発展は

$$\hat{\rho}(t) \to \hat{\rho}(t + \Delta t) = e^{-i\hat{H}\Delta t} \left[\sum_k \hat{M}_k \hat{\rho}(t) \hat{M}_k^\dagger \right] e^{i\hat{H}\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$ で Lindblad 方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}(t) = -i\left[\hat{H}, \hat{\rho}(t)\right] - \gamma \left[\sum_{k=\pm} \hat{P}_k \hat{\rho}(t) \hat{P}_k - \hat{\rho}(t) \right]$$

ΔE は γ に比べ指数的に小さい $\to \Delta E = 0$ (実験: $\Delta E/\gamma \simeq 10^{-5000}$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\rho_{++} & \rho_{+-}\\ \rho_{-+} & \rho_{--}\end{pmatrix} = -\gamma\begin{pmatrix}0 & \rho_{+-}\\ \rho_{-+} & 0\end{pmatrix}$$

非対角成分が消失する（位相緩和）

例) $\hat{\rho}(t=0) = |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$t \to \infty$ で

$$\begin{pmatrix}\rho_{++} & \rho_{+-}\\ \rho_{-+} & \rho_{--}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle-|$$

$\frac{\omega_0}{\lambda} \ll 1$ では $\cdots$

- 固有状態は散逸と測定に対して安定では**ない**。
- 適当な線形結合をとった $|\pm\rangle$ が安定。対称性を破る。
  $\to$ 実験で観測される 2 つの状態に対応

まとめ

- 粒子数 N 有限の場合での Dicke model についての厳密な結果
  - $\lambda \neq 0$ なら基底状態に縮退なし
    → SSB なし
  - 基底状態 $|\Psi_0\rangle$ と第一励起状態 $|\Psi_1\rangle$ の適当な重ね合わせ
    → 対称性を破る状態 $|\pm\rangle$
  - N の増加に伴って指数的にエネルギーギャップが閉じる
    → 振動の長周期化
- 散逸と測定の影響
  - 対称性を破る状態 ($\neq$ 固有状態) が安定化