ベリー曲率と異常輸送現象

早田　智也

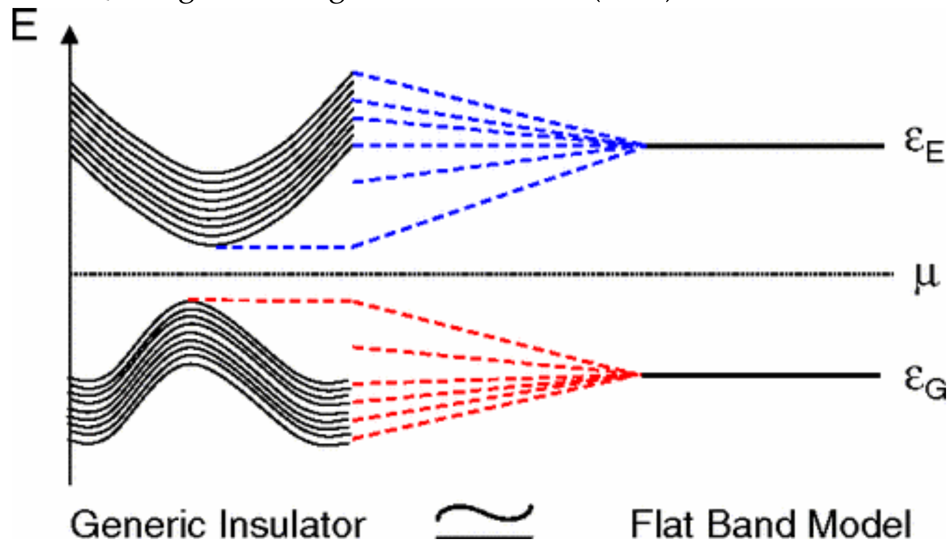
CHUO UNIVERSITY

References: TH-Hidaka, PRB 95 125137 (2017); PTEP 073I01 (2017),
Ishizuka-TH-Ueda-Nagaosa, PRL 117 216601 (2016); PRB 95, 245211 (2017),
TH-Kikuchi-Tanizaki, PRB 96, 085112 (2017)

トポロジーと輸送現象

○ 絶縁体の低エネルギー有効理論

Qi-Hughes-Zhang , PRB 78, 195424 (2008)



- フェルミ準位近傍に自由度無し

○ 生成汎関数は位相的場の理論を用いて現せる

量子ホール効果

$$J_x = \frac{e^2}{2\pi\hbar} C_1 \epsilon_{xy} E_y$$

$$C_1 = -\frac{1}{2\pi}\int dp_x dp_y f_{p_x p_y} \in \boldsymbol{Z}$$

Thouless-Kohmoto-Nightingale-Nijs, PRL 49, 405 (1982)

○ ベリー曲率

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{p}} = u^\dagger \mathrm{i} \nabla_{\boldsymbol{p}} u$$

$$f_{p_x p_y} = \partial_{p_x} a_{p_y} - \partial_{p_y} a_{p_x}$$

- （磁気的）ブリュアンゾーンのトポロジー

量子ホール効果

$$J_x = \frac{e^2}{2\pi\hbar} C_1 \epsilon_{xy} E_y$$

$$C_1 = -\frac{1}{2\pi} \int dp_x dp_y f_{p_x p_y} \in \boldsymbol{Z}$$

Thouless-Kohmoto-Nightingale-Nijs, PRL 49, 405 (1982)

○ チャーン-サイモンズ理論

$$S_{\mathrm{CS}} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \frac{C_1}{2} \int dt dx dy A_\mu \epsilon^{\mu\nu\tau} \partial_\nu A_\tau$$

$$J^\mu = \frac{\partial S_{\mathrm{CS}}}{\partial A_\mu} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} C_1 \epsilon^{\mu\nu\tau} \partial_\nu A_\tau$$

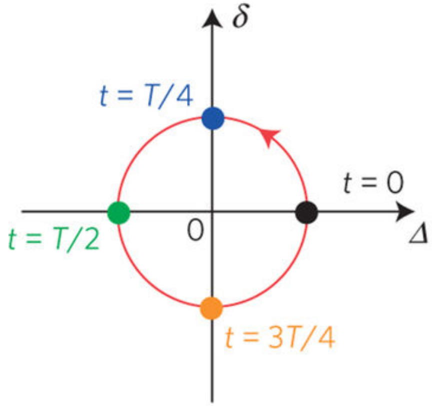
Zhang-Hansson-Kivelson, PRL 62, 82 (1989)
Lopez-Fradkin, PRB 44, 5246 (1991)

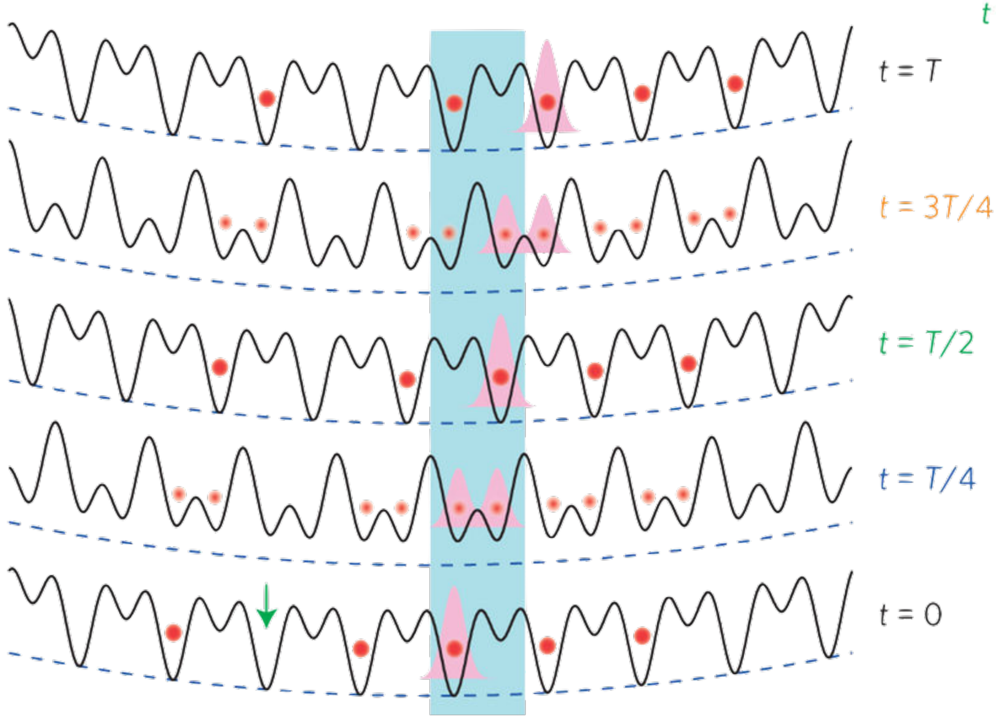
サウレス（断熱）ポンピング

Thouless, PRB 27, 6083 (1983)

○ 周期駆動されたハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \sum_i -(t + (-)^i \delta) a_{i+1}^\dagger a_i + \Delta (-)^i a_i^\dagger a_i + (\mathrm{h.c.})$$





Nakajima et.al., Nat. Phys. 12, 296 (2016)

サウレス（断熱）ポンピング

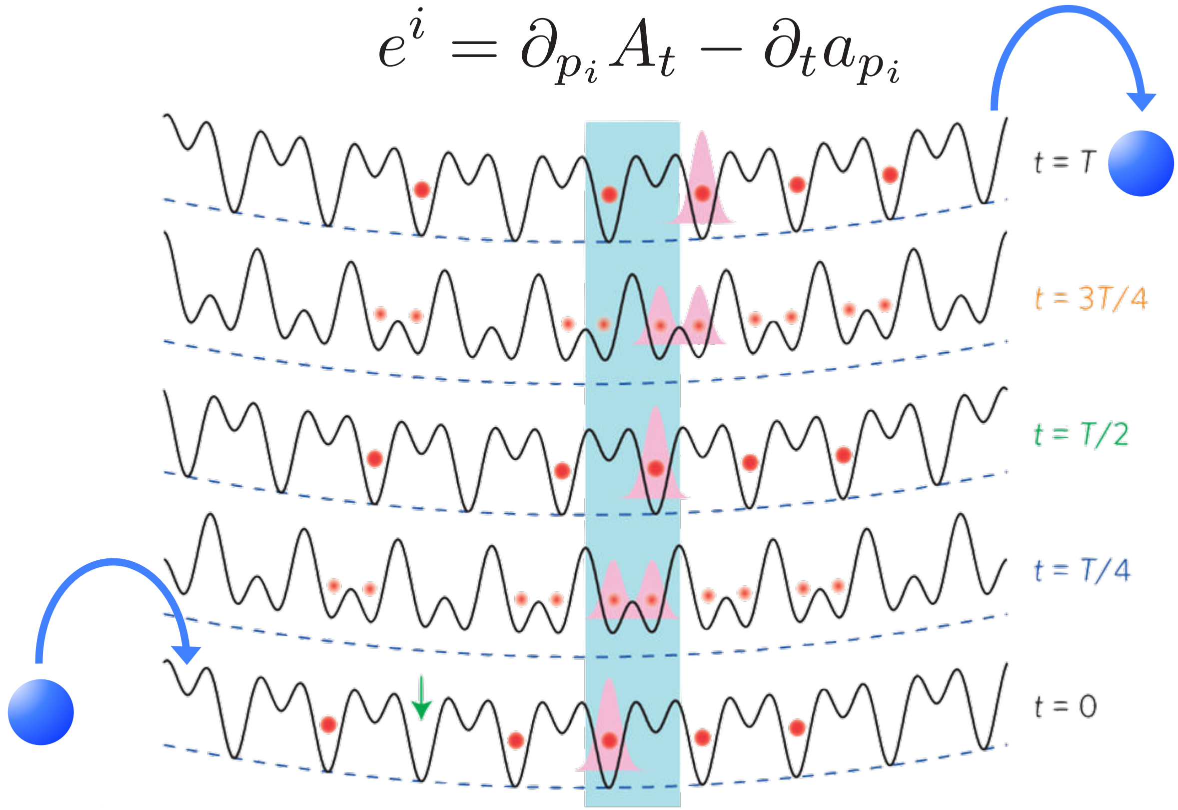
Thouless, PRB 27, 6083 (1983)

$$\bar{e} = \frac{1}{(2\pi)} \int_{T\times \mathrm{BZ}} dp_x dt\; e^x \in \boldsymbol{Z}$$

○ ベリー曲率

$$A_t = u^\dagger \mathrm{i}\partial_t u$$

$$e^i = \partial_{p_i} A_t - \partial_t a_{p_i}$$



Nakajima et.al., Nat. Phys. 12, 296 (2016)

サウレス（断熱）ポンピング

Thouless, PRB 27, 6083 (1983)

$$\bar{e} = \frac{1}{(2\pi)} \int_{T\times \mathrm{BZ}} dp_x dt \; e^x \in \boldsymbol{Z}$$

○ ベリー曲率

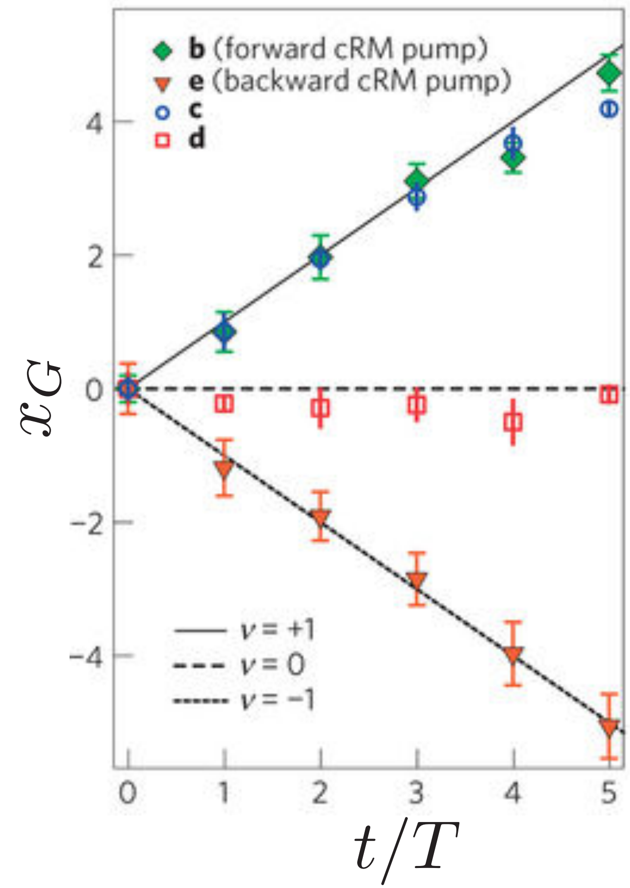
$$A_t = u^\dagger \mathrm{i}\partial_t u$$

$$e^i = \partial_{p_i} A_t - \partial_t a_{p_i}$$

○ 冷却原子系を用いた実験的観測

Nakajima et.al., Nat. Phys. 12, 296 (2016)

Lohse et.al., Nat. Phys. 12, 350 (2016)



サウレス（断熱）ポンピング

Thouless, PRB 27, 6083 (1983)

$$\bar{e} = \frac{1}{(2\pi)} \int_{T\times\mathrm{BZ}} dp_x dt\ e^x \in \boldsymbol{Z}$$

○ ベリー曲率

$$A_t = u^\dagger \mathrm{i}\partial_t u$$

$$e^i = \partial_{p_i} A_t - \partial_t a_{p_i}$$

○ チャーン-サイモンズ理論

$$\boxed{A_\mu = (A_t, A_x, a_{p_x})}$$

$$S_{\mathrm{CS}} = \frac{1}{4\pi} \int dt dx dp_x A_\mu \epsilon^{\mu\nu\tau} \partial_\nu A_\tau$$

$$J^x = \frac{\partial S_{\mathrm{CS}}}{\partial A_x} = \frac{1}{2\pi} e^x$$

Qi-Hughes-Zhang , PRB 78, 195424 (2008)

TH-Hidaka, PRB 95 125137 (2017)

絶縁体 ➔ 金属

ワイルハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \psi_{\boldsymbol{p}}^{\dagger}\, \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\psi_{\boldsymbol{p}}$$

○ エネルギー固有値

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}u_{\boldsymbol{p}}^{\pm} = \pm|\boldsymbol{p}|u_{\boldsymbol{p}}^{\pm}$$

○ ベリー曲率

$$\boxed{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{p}}^{\pm} = u^{\pm}(\boldsymbol{p})^{\dagger}\mathrm{i}\nabla_{\boldsymbol{p}}u^{\pm}(\boldsymbol{p})}$$

$$\boldsymbol{b}^{\pm}(\boldsymbol{p}) \equiv \nabla_{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{a}^{\pm}(\boldsymbol{p}) = \mp\boldsymbol{p}/2p^3$$

運動量空間上の“磁気” モノポール

異常ホール効果

○ 磁場に依存しないホール効果

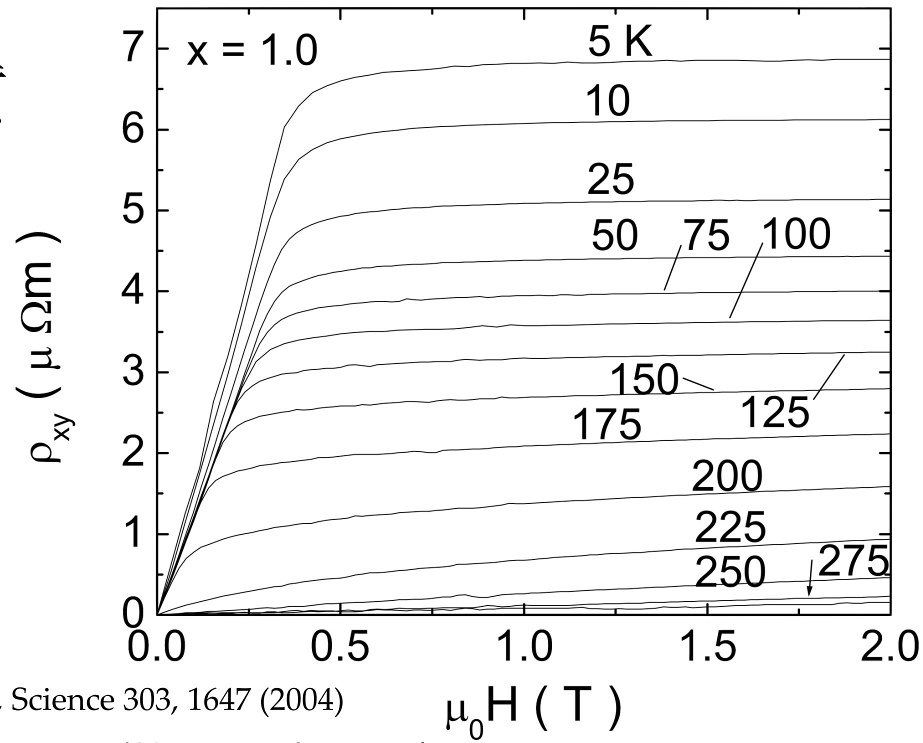
Sundaram- Niu, PRB 59, 14915 (1999)
Jungwirth-Niu-MacDonald, PRL **88**, 207208 (2002)

$$J_x = \frac{e^2}{2\pi\hbar}\tilde{C}_1\epsilon_{xy}E_y$$

$$\tilde{C}_1 = -\frac{1}{2\pi}\int dp_x dp_y f_{p_x p_y} n_{\mathrm{F.D.}} \notin \boldsymbol{Z}$$

○ 時間反転対称性の破れた物質
強磁性金属、強磁性半導体、
トポロジカル絶縁体の薄膜…

$$\rho_{xy} = R_0 H + \underline{\rho^s_{xy}}$$



Lee et.al., Science 303, 1647 (2004)

カイラル磁気効果

○ 磁場に比例する電流

Nielsen-Ninomiya, PLB130, 389 (1983)

Fukushima-Kharzeev-Warringa, PRD 78, 074033 (2008)

$$\boldsymbol{j} = \kappa e^2 \mu_5 \boldsymbol{B}/2\pi^2 c$$

$$\boxed{\text{カイラル化学ポテンシャル } 2\mu_5 = \mu_{\mathrm{R}} - \mu_{\mathrm{L}}}$$

○ モノポール電荷

$$\kappa = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{F.S.}} d^2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{Z}$$

$$\boldsymbol{j} = -\frac{e^2}{c}\boldsymbol{B}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\varepsilon\boldsymbol{b}\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}} n_{\mathrm{F.D.}}$$

$$= \kappa\frac{e^2}{4\pi^2 c}\mu_{\mathrm{R,L}}\boldsymbol{B}$$

Stephanov- Yin, PRL 109, 162001 (2012)

Son- Yamamoto, PRL 109, 181602 (2012)

Chen-Pu-Wang-Wang, PRL 110, 262301 (2013)

TH-Kikuchi-Tanizaki, PRB 96, 085112 (2017)

カイラル磁気効果

○ 磁場に比例する電流

Nielsen-Ninomiya, PLB130, 389 (1983)

Fukushima-Kharzeev-Warringa, PRD 78, 074033 (2008)

$$\boldsymbol{j} = \kappa e^2 \mu_5 \boldsymbol{B}/2\pi^2 c$$

カイラル化学ポテンシャル $2\mu_5 = \mu_R - \mu_L$

○ 負性磁気抵抗効果

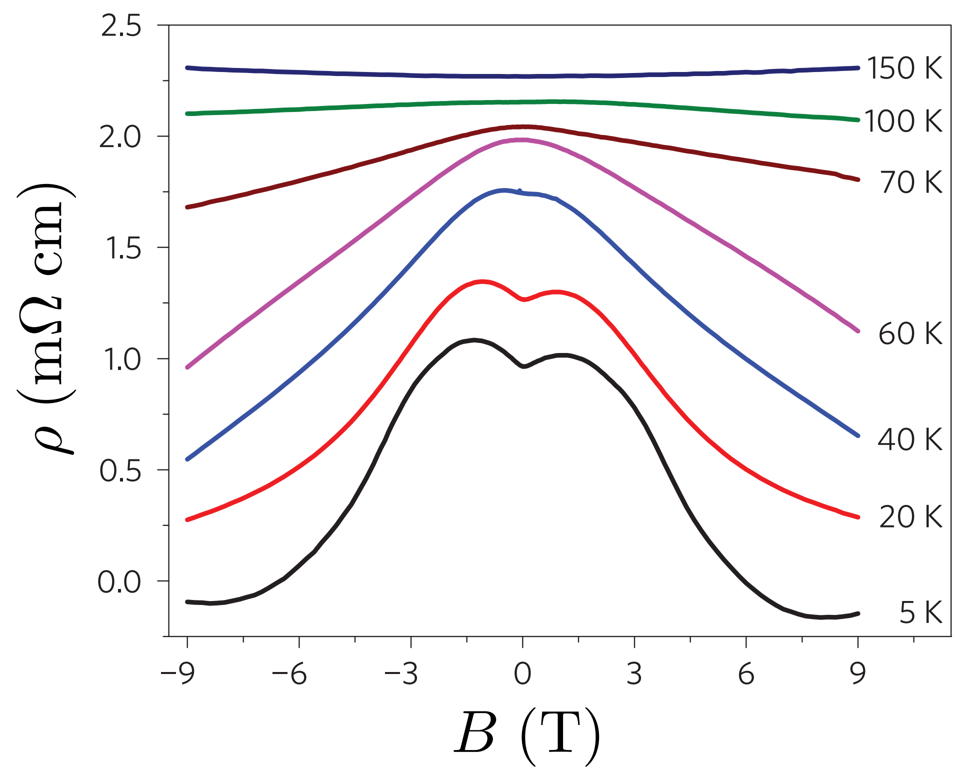
$$\mu_5 \sim \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$$

• ディラック半金属

Li, et.al., Nat. Phys. 12, 550 (2016)

• ワイル半金属

Huang, et. al., PRX 5, 031023 (2015)



カイラル磁気効果

○荷電粒子の方位角相関

PRL **118,** 122301 (2017) PHYSICAL REVIEW LETTERS week ending 24 MARCH 2017

Observation of Charge-Dependent Azimuthal Correlations in *p*-Pb Collisions and Its Implication for the Search for the Chiral Magnetic Effect

V. Khachatryan *et al.**
(CMS Collaboration)

(Received 1 October 2016; revised manuscript received 3 December 2016; published 24 March 2017)

Charge-dependent azimuthal particle correlations with respect to the second-order event plane in *p*-Pb and PbPb collisions at a nucleon-nucleon center-of-mass energy of 5.02 TeV have been studied with the CMS experiment at the LHC. The measurement is performed with a three-particle correlation technique, using two particles with the same or opposite charge within the pseudorapidity range $|\eta| < 2.4$, and a third particle measured in the hadron forward calorimeters ($4.4 < |\eta| < 5$). The observed differences between the same and opposite sign correlations, as functions of multiplicity and η gap between the two charged particles, are of similar magnitude in *p*-Pb and PbPb collisions at the same multiplicities. These results pose a challenge for the interpretation of charge-dependent azimuthal correlations in heavy ion collisions in terms of the chiral magnetic effect.

“Constraints on the chiral magnetic effect using charge-dependent azimuthal correlations in p-Pb and Pb-Pb collisions at the LHC,” CMS Collaboration, arXiv:1708.01602v1 [nucl-ex]

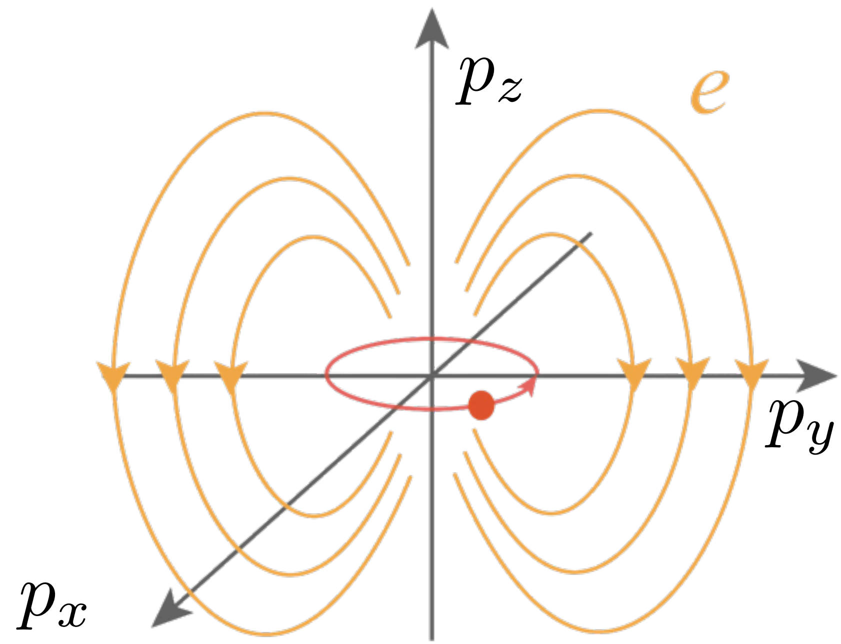
サウレス（断熱）ポンピング

Ishizuka-TH-Ueda-Nagaosa, PRL 117 216601 (2016);
PRB 95, 245211 (2017)

$$\bar{\boldsymbol{e}} = \int_0^T dt \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \boldsymbol{e} n_{\mathrm{F.D.}}$$

○ 運動量空間における電磁誘導

$$\nabla_p \times \boldsymbol{e} = -\partial_t \boldsymbol{b} - 4\pi \boldsymbol{j}_m$$



駆動されたワイルノード

○ 光電流

$$\bar{e}_{z\mathrm{R,L}} = \pm\pi \frac{4v_0^2}{15v^2v_z^2}(gD)^2\omega\cos(\chi)$$

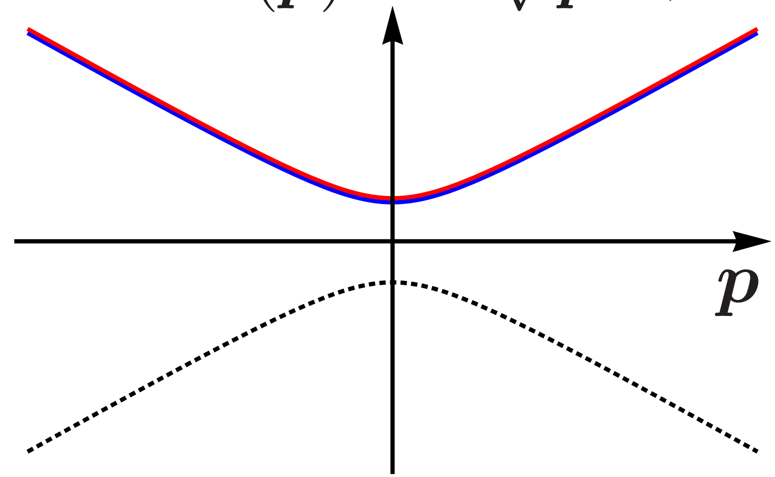
可換➔ 非可換

ディラックハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$$



- 二重縮退

○ SU(2) ベリー曲率

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{mn} &= u_m^\dagger \mathrm{i}\nabla_p u_n \\ \boldsymbol{f} &= \nabla_p \times \boldsymbol{a} - \mathrm{i}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} \end{aligned}}$$

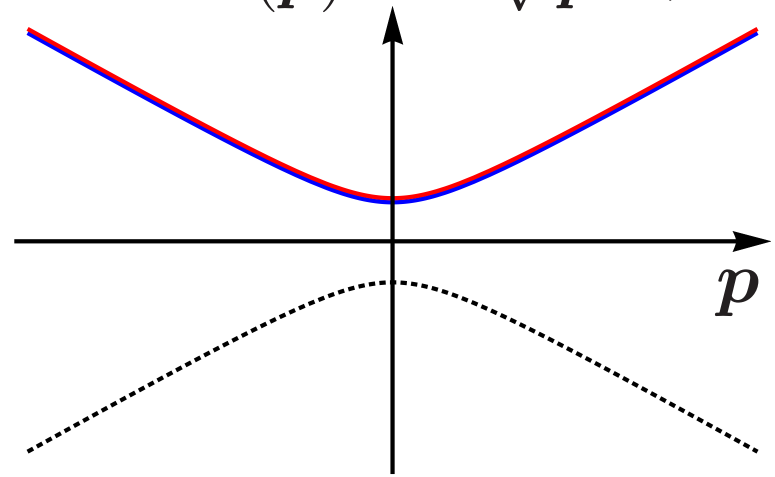
$$\boldsymbol{f} = -\frac{m}{2\varepsilon(\boldsymbol{p})^3}\left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{m^2 + m\varepsilon(\boldsymbol{p})}\boldsymbol{p}\right)$$

ディラックハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m$$

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



- 二重縮退

○ SU(2) ベリー曲率

$$\boxed{\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{R}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, t) \quad m \to m(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, t)}$$

$$\boldsymbol{f} \to f_{pt},\ f_{px}\ f_{xy}$$

スピン電磁場

異常ホール効果

$$\boldsymbol{J} = \frac{e}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\boldsymbol{E}^{\hat{a}} \times \boldsymbol{b}^{\hat{a}}\right] n(\boldsymbol{p})$$

- スピン電場によるホール効果

異常ホール効果

$$\boldsymbol{J} = \frac{e}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\boldsymbol{E}^{\hat{a}} \times \boldsymbol{b}^{\hat{a}}\right] n(\boldsymbol{p})$$

カイラル磁気効果

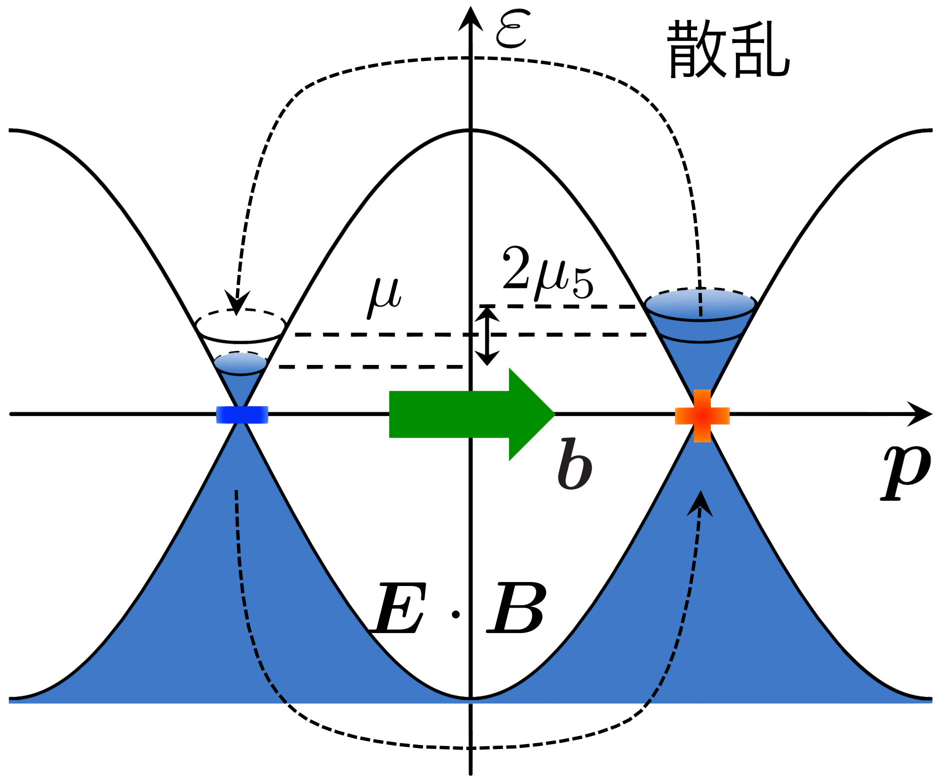
$$\boldsymbol{J} = \frac{e}{2}\int \frac{dtd^3p}{(2\pi)^3}\left[\boldsymbol{B}^{\hat{a}}(\boldsymbol{b}^{\hat{a}} \cdot \nabla_p \varepsilon) + e\boldsymbol{B}(\boldsymbol{e}^{\hat{a}} \cdot \boldsymbol{b}^{\hat{a}})\right] n(\boldsymbol{p})$$

- スピン磁場によるカイラル磁気効果
- 磁場で向き制御された断熱ポンピング

スペクトラルフロー

Son-Spivak, PRB 88, 104412 (2013)

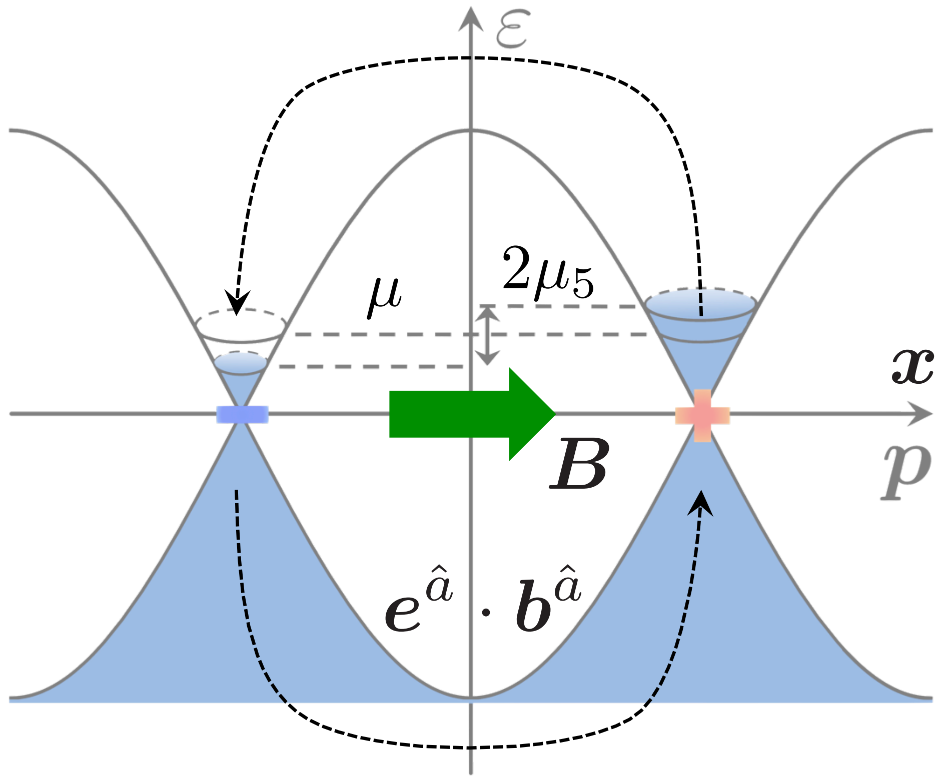
○ カイラル化学ポテンシャルのダイナミクス



$$\partial_t \delta n + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{j} = \frac{\chi e^2}{4\pi^2 c} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} - \frac{\delta n}{\tau}$$

実空間上のスペクトラルフロー

○ 磁場で向き制御された断熱ポンピング



スピンホール効果

$$\boldsymbol{J}_s^{\hat{a}} = \lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[e\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{b}^{\hat{a}} \right] n(\boldsymbol{p})$$

○ ラッティンジャー模型

$$\boxed{\{\Gamma_a, \Gamma_b\} = 2\delta_{ab}}$$

$$\mathcal{H} = \varepsilon(\boldsymbol{p}) + \sum_{i=1}^{5} d_a(\boldsymbol{p}) \Gamma_a$$

➔非散逸的なスピン輸送

Murakami-Nagaosa-Zhang, Science 301 1348 (2003)

Murakami-Nagaosa-Zhang, PRL 93 156804 (2004)

スピンホール効果

$$\boldsymbol{J}_s^{\hat{a}} = \lambda \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[e\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{b}^{\hat{a}} \right] n(\boldsymbol{p})$$

スピンカイラル磁気効果

$$\boldsymbol{J}_s^{\hat{a}} = \lambda \int \frac{dt d^3 p}{(2\pi)^3} \Big[e\boldsymbol{B}(\boldsymbol{b}^{\hat{a}} \cdot \nabla_p \varepsilon) + \frac{3}{10} \Big(\boldsymbol{B}^{\hat{a}} (\boldsymbol{e}^{\hat{b}} \cdot \boldsymbol{b}^{\hat{b}}) + (bab) + (bba) \Big) \Big] n(\boldsymbol{p})$$

- 磁場によるスピンカレントのカイラル磁気効果
- スピン磁場で向き制御された断熱スピンポンピング

スピンホール効果

$$\boldsymbol{J}_s^{\hat{a}} = \lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[e\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{b}^{\hat{a}} \right] n(\boldsymbol{p})$$

スピンカイラル磁気効果

$$\boldsymbol{J}_s^{\hat{a}} = \lambda \int \frac{dtd^3p}{(2\pi)^3} \Big[e\boldsymbol{B}(\boldsymbol{b}^{\hat{a}} \cdot \nabla_p \varepsilon) \\ + \frac{3}{10} \Big(\boldsymbol{B}^{\hat{a}}(\boldsymbol{e}^{\hat{b}} \cdot \boldsymbol{b}^{\hat{b}}) + (bab) + (bba) \Big) \Big] n(\boldsymbol{p})$$

断熱スピンポンピング

$$\boldsymbol{J}_s^{\hat{a}} = \lambda \int \frac{dtd^3p}{(2\pi)^3} \left[-\boldsymbol{e}^{\hat{a}} \right] n(\boldsymbol{p})$$

まとめ

異常ホール効果

Sundaram- Niu, PRB 59, 14915 (1999)
Jungwirth-Niu-MacDonald, PRL **88**, 207208 (2002)

$$\boldsymbol{j} = e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{E}\right) n$$

カイラル磁気効果

Nielsen-Ninomiya, PLB130, 389 (1983)
Fukushima-Kharzeev-Warringa, PRD 78, 074033 (2008)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j} &= -e^2 \boldsymbol{B} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \varepsilon \boldsymbol{b} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} n \\ &= \kappa \frac{e^2}{4\pi^2} \mu_{\mathrm{R,L}} \boldsymbol{B}\end{aligned}$$

断熱ポンピング

Thouless, PRB 27, 6083 (1983)

$$\bar{\boldsymbol{e}} = \int_0^T dt \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \boldsymbol{e} n$$

創発的対称性
とトポロジー

Tomoya Hayata

熱場の量子論とその応用@ YITP, 28 Aug, 2017

トポロジーとボルツマン方程式

Sundaram- Niu, PRB 59, 14915 (1999)

Xiao-Chang-Niu, RMP 82, 1959 (2010)

○ ボルツマン方程式

$$\partial_t n + \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} n + \dot{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} n = I(n)$$

・分布関数 $n(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$

○ 運動方程式

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \nabla_{\boldsymbol{p}} \varepsilon}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{b}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -e\boldsymbol{E} - \dot{\boldsymbol{x}} \times \frac{e}{c}\boldsymbol{B}$$

・運動量空間上のローレンツ力

トポロジーとボルツマン方程式

Sundaram- Niu, PRB 59, 14915 (1999)

Xiao-Chang-Niu, RMP 82, 1959 (2010)

○ ボルツマン方程式

$$\partial_t n + \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} n + \dot{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} n = I(n)$$

・分布関数　$n(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$

○ 運動方程式

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \nabla_{\boldsymbol{p}} \varepsilon}$$

$$\sqrt{\omega}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v} + e\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b}) \frac{e}{c}\boldsymbol{B}$$

$$\sqrt{\omega}\dot{\boldsymbol{p}} = -e\boldsymbol{E} - \boldsymbol{v} \times \frac{e}{c}\boldsymbol{B} - \left(e\boldsymbol{E} \cdot \frac{e}{c}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{b}$$

・不変測度

$$\boxed{\sqrt{\omega} = 1 + \frac{e}{c}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{b}}$$

位相空間上の位相的場の理論

○ 電流密度

$$j_a = \mathrm{Pf}(\omega)\dot{\xi}_a n(t,\xi)/(2\pi)^d$$

$$= \frac{\epsilon_{aba_1\cdots a_{2d-2}}}{(2\pi)^d 2^{d-1}(d-1)!}\omega_{a_1a_2}\cdots\omega_{a_{2d-1}a_{2d-2}}\omega_{bt}n(t,\xi)$$

$$\mathrm{Pf}(\omega) = \epsilon_{a_1\cdots a_{2d}}\omega_{a_1a_2}\cdots\omega_{a_{2d-1}a_{2d}}/2^d d!$$

○ 生成汎関数

$$\boxed{n(t,\xi)=1}$$

$$S_{\mathrm{CS}} = \int\frac{dtd^{2d}\xi}{(2\pi)^d(d+1)!}\epsilon_{\mu_0\ldots\mu_{2d}}\mathcal{A}_{\mu_0}\partial_{\mu_1}\mathcal{A}_{\mu_2}\cdots\partial_{\mu_{2d-1}}\mathcal{A}_{\mu_{2d}}$$

Bulmash-Hosur-Zhang-Qi, PRX 5, 021018 (2015)

TH-Hidaka, PRB 95 125137 (2017)