

# 場の量子論のカオスと ブラックホール

橋本幸士  
(大阪大学)



# Information Preservation and Weather Forecasting for Black Holes\*

S. W. Hawking<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*DAMTP, University of Cambridge, UK*

## Abstract

It has been suggested [1] that the resolution of the information paradox for evaporating black holes is that the holes are surrounded by firewalls, bolts of outgoing radiation that would destroy any infalling observer. Such firewalls would break the CPT invariance of quantum gravity and seem to be ruled out on other grounds. A different resolution of the paradox is proposed, namely that gravitational collapse produces apparent horizons but no event horizons behind which information is lost. This proposal is supported by ADS-CFT and is the only resolution of the paradox compatible with CPT. The collapse to form a black hole will in general be chaotic and the dual CFT on the boundary of ADS will be turbulent. Thus, like weather forecasting on Earth, information will effectively be lost, although there would be no loss of unitarity.

- 1974年 米谷、ScherkとSchwarz が、弦理論が重力を含むことを発見。重力の量子論へ。  
Yoneya, Prog.Theor.Phys. 51 (1974) 1907.  
Scherk, Schwarz, Nucl.Phys. B81 (1974) 118.
- 1976年 Hawking、ブラックホールの情報喪失問題。  
Hawking, Phys.Rev.D14(1976)2460.
- 1997年 Maldacena が AdS/CFT 対応を発見。  
ある量子重力理論が定義される  
Maldacena, Adv.Theor.Math.Phys. 2 (1998) 231.
- 2008年 ブラックホール=fastest scrambler 予想。  
Sekino, Susskind, JHEP 0810 (2008) 065.
- 2015年 カオス上限予想。  
Maldacena, Shenker, Stanford, JHEP 1608 (2016) 106.
- 2014年 Kitaev が最大カオス量子力学を発見。

1

カオス と 量子カオス

6ページ

2

場の量子論の カオス の例

4ページ

3

ブラックホール による カオス

4ページ

4

ブラックホールの内側 と 量子情報

5ページ

1

## カオス と 量子カオス

6ページ

カオス: 非予測性  
ポアンカレ断面がカオスを知る  
リャプノフ指数がカオスを測る  
量子系にはリャプノフがない?  
素粒子標準模型のカオス?  
量子リャプノフ指数に向けて

2

## 場の量子論の カオス の例

4ページ

3

## ブラックホール による カオス

4ページ

4

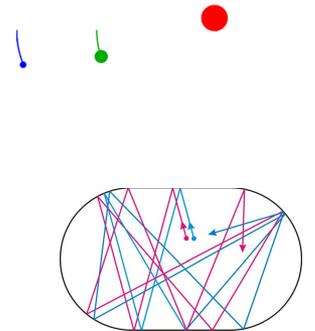
## ブラックホールの内側 と 量子情報

5ページ

古典カオス = 非線形決定力学系における非周期的な有界軌道が初期条件に鋭敏であること

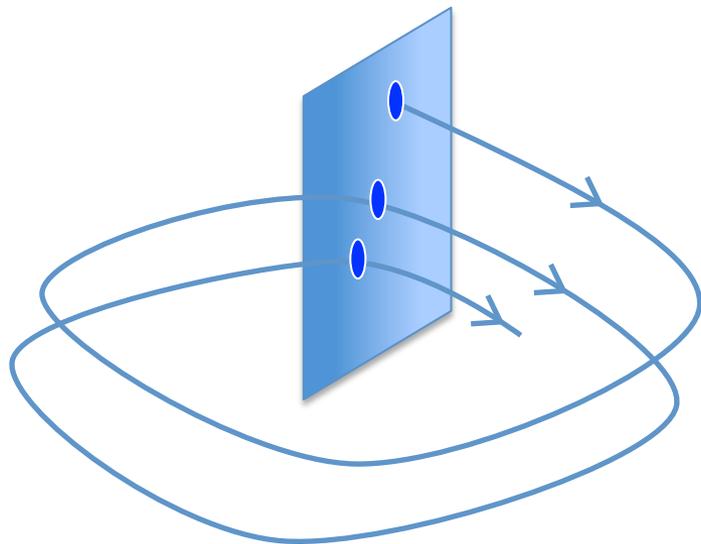
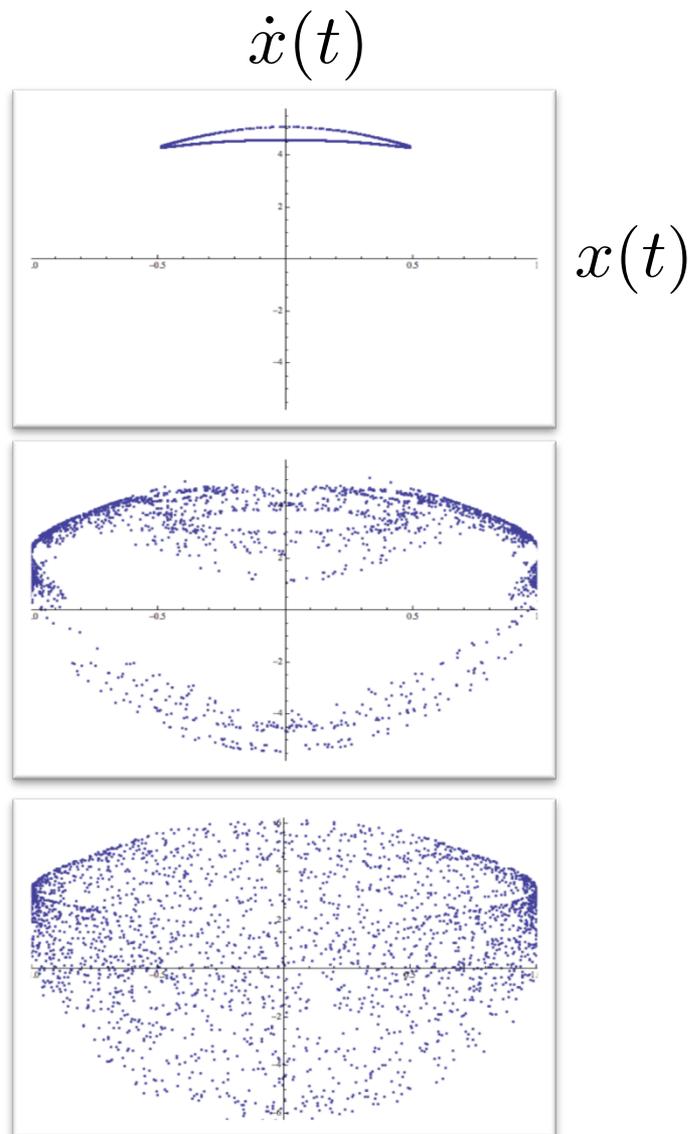
歴史は長い

- 三体問題 [Poincare, 1892]
- バタフライ効果、気象 [Lorenz, 1963]
- ビリヤード [Bunimovich, 1974]
- Yang-Mills理論 [Savvidy 1981, Muller et al. 1992]



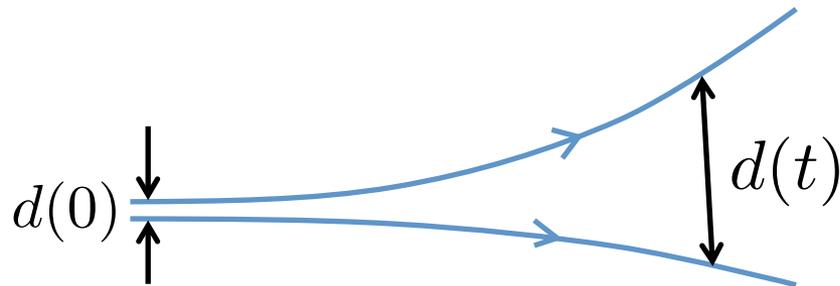
広汎な応用： 情報理論、化学反応、脳、  
経済、社会学、交通予測、暗号、...

ポアンカレ断面

位相空間の中の  
軌道低エネ  
ルギー高エネ  
ルギー

## 1-3

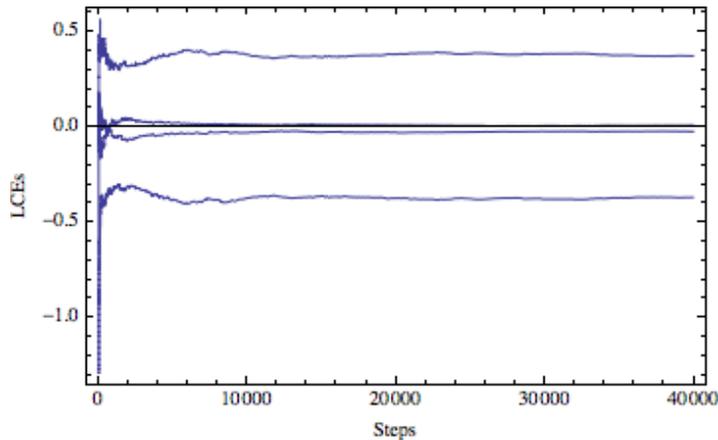
## リャプノフ指数がカオス度を測る



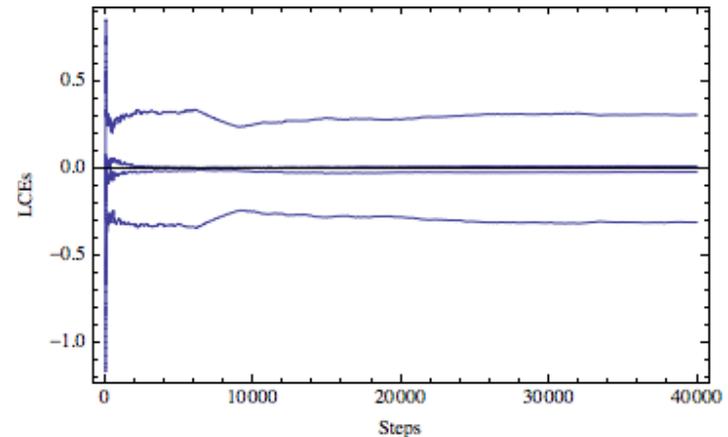
$$d(t) \sim d(0) \exp[Lt]$$

リャプノフ指数

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{d(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \frac{d(t)}{d(0)}$$



$$L \simeq 0.38 \quad (l_1/l_2 = 1)$$



$$L \simeq 0.30 \quad (l_1/l_2 = 2)$$

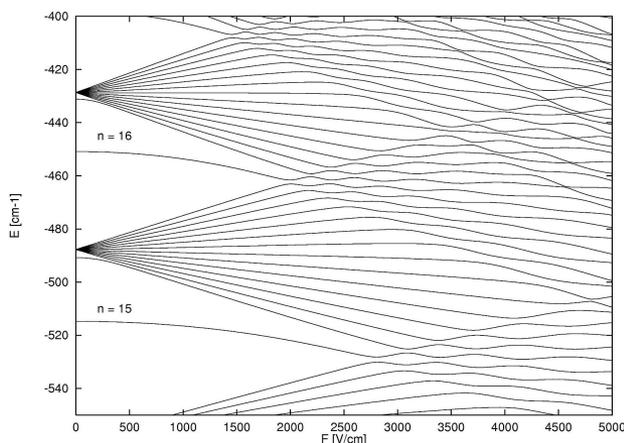
## 1-4

## 量子系にはリャプノフ指数がない？

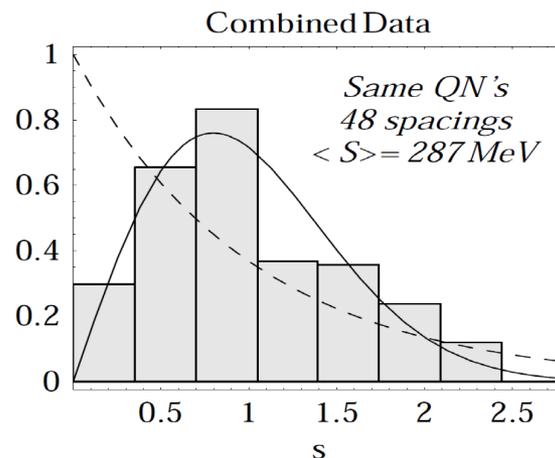
理由1) シュレーディンガー方程式は線形

理由2) 不確定性関係で、微小なズレが存在しない

量子カオスではリャプノフ以外で特徴づけられてきた



電場中のリチウム原子のスペクトル  
[Courtney, Spellmeyer, Jiao, Kleppner, 95]



ハドロン<sup>s</sup>の質量スペクトル  
[Pando-Zayas, 00]

問題：量子??

問題：フェルミオン??

素粒子標準模型

= ゲージ場、ヒッグス場、物質場

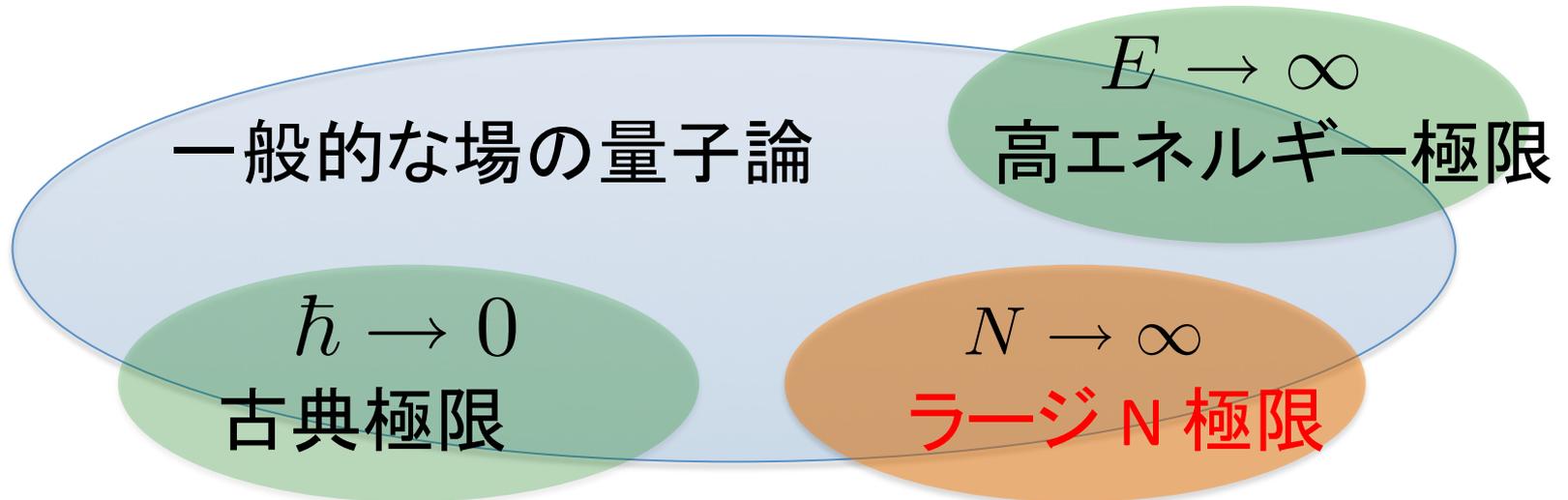


ボソニックなので古典解析可

- 古典Yang-Mills カオス [Matinyan, Savvidy, Savvidy '81]
- 古典Yang-Mills-Higgs カオス [Savvidy '84] [Muller, Trayanov '92]
- QGPへの応用など [Biro, Matinyan, Muller '94]
- [Kunihiro, Muller, Ohnishi, Schafer, Takahashi, Yamamoto '10] [Iida, Kunihiro, Muller, Ohnishi, Schafer, Takahashi '13], ..

解: ラージN極限でAdS側へ

[Murata, Yoshida, KH `16]



解: Out-of-Time-Ordered correlators (OTO相関)

$$\langle Q(t)P(0)Q(t)P(0) \rangle \sim \left( \frac{\delta Q(t)}{\delta Q(0)} \right)^2$$

$$\sim f_0 - \hbar f_1 e^{Lt}$$

[Larkin, Ovchinnikov `69]  
[Kitaev `14] [Maldacena,  
Shenker, Stanford `15]

1

## カオス と 量子カオス

5ページ

カオス: 非予測性

ポアンカレ断面がカオスを知る

リャプノフ指数がカオスを測る

量子系にはリャプノフがない?

量子リャプノフ指数に向けて

2

## 場の量子論の カオス の例

4ページ

3

## ブラックホール による カオス

4ページ

4

## ブラックホールの内側 と 量子情報

5ページ

1

カオス と 量子カオス

5ページ

2

場の量子論の カオス の例

4ページ

例1) 線形シグマ模型

カイラル凝縮のカオス

例2) AdS/CFTでの古典メソン解析

$N_c$ が大きくなるほどカオスは減る

3

ブラックホール による カオス

4ページ

4

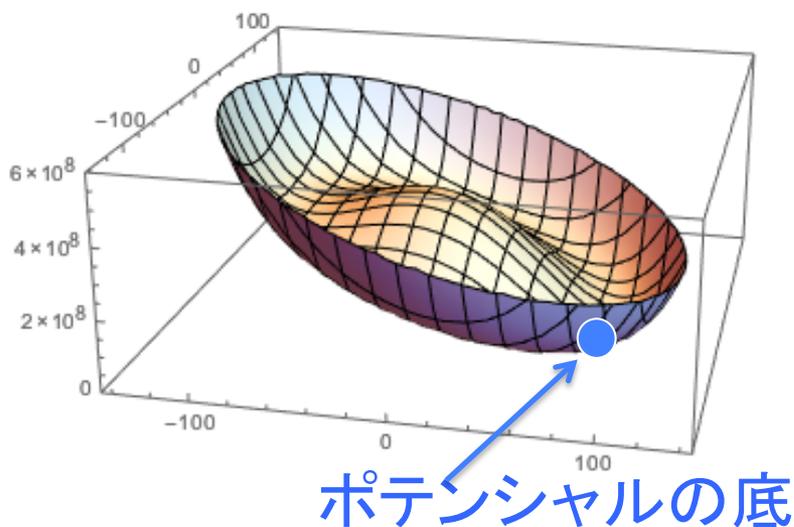
ブラックホールの内側 と 量子情報

5ページ

## 例1) 線形シグマ模型

$$S = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} ((\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \pi)^2) - V \right],$$

$$V \equiv \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) + \frac{g_4}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 + a\sigma + V_0$$



$$(\langle \sigma \rangle, \langle \pi \rangle) = (f_\pi, 0)$$

2-flavor QCDの中性パイオンセクタ

SU(2)の $\sigma_3$ の回転の破れ

- カイラル凝縮によって自発的に
- クォーク質量によって陽に

## 2-2

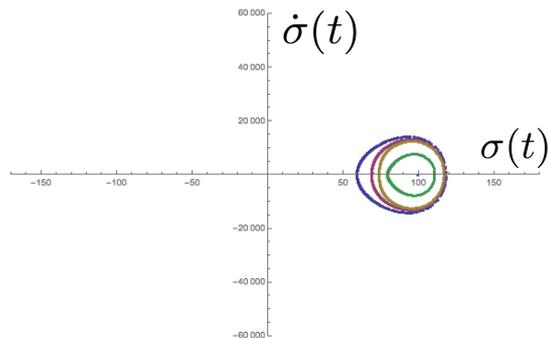
## カイラル凝縮のカオス

[Murata, Yoshida, KH `16]

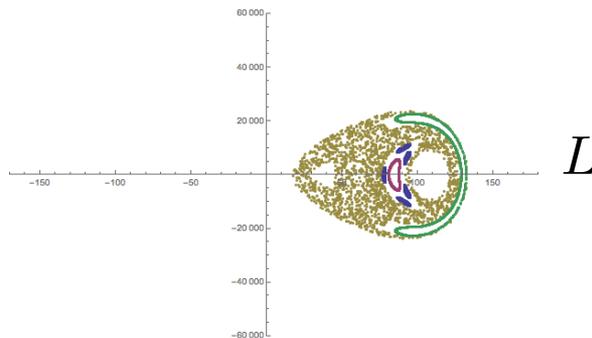
空間一様な場の時間変化にカオス

ポアンカレ切断:  $\pi(t) = 0$ 

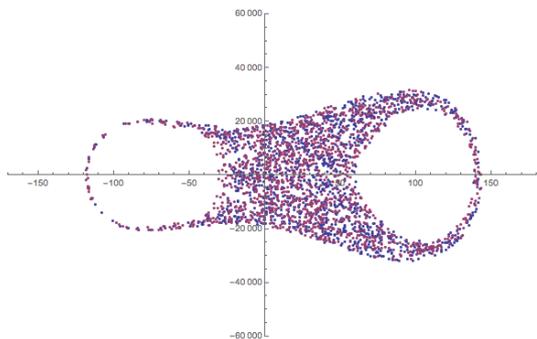
E=100[MeV]



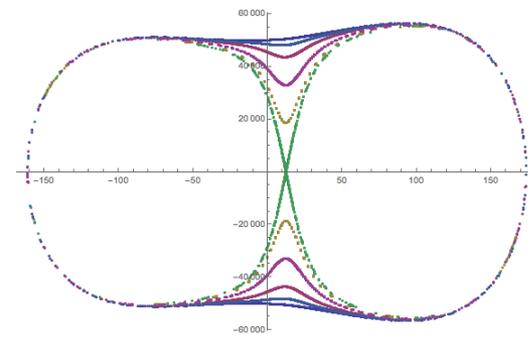
E=130[MeV]



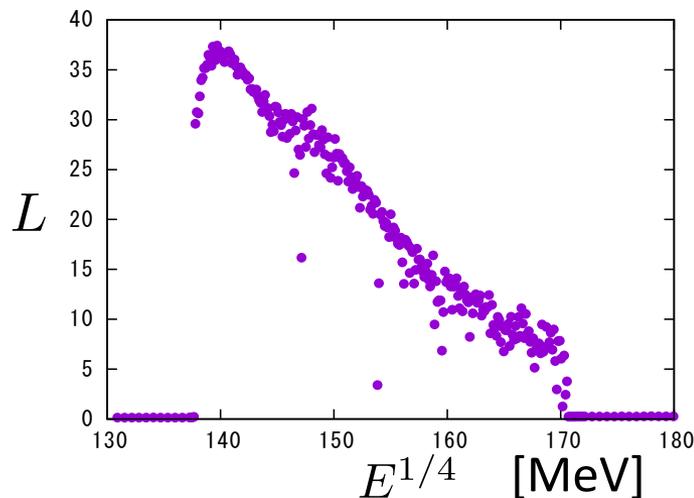
E=150[MeV]



E=200[MeV]



リャプノフ指数



カオス・非カオス転移

$$f_{\pi} \sim 93[\text{MeV}] \quad m_{\pi} \sim 135[\text{MeV}] \quad m_{\sigma} \sim 500[\text{MeV}]_5$$

## 例2) AdS/CFTでの古典メソン解析

Large N メソン作用 = AdS中のSU(2) D7ブレーン作用

$$S = \int d^4x \text{Tr} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}_a^2 - \frac{8\pi^2 m_q^2}{\lambda} \phi_a^2 + \frac{36\pi^2}{5N_c} [\phi_8, \phi_9]^2 \right] \quad (a, b = 8, 9)$$

[Kruczenski, Mateos, Myers, Winters '03]

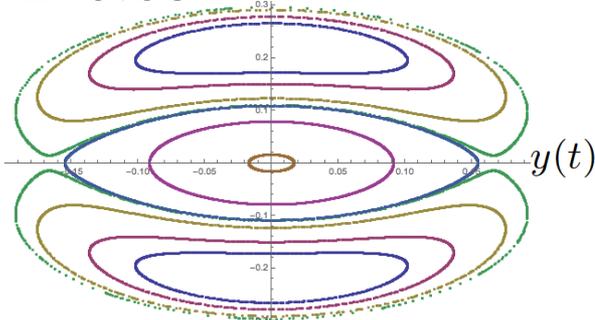
$$\text{メソン: } \left( \phi_8^{ij}(t), \phi_9^{ij}(t) \right) \propto \left( \langle \bar{q}^i q^j(t) \rangle, \langle \bar{q}^i \gamma_5 q^j(t) \rangle \right)$$

N=2 超対称 QCD :

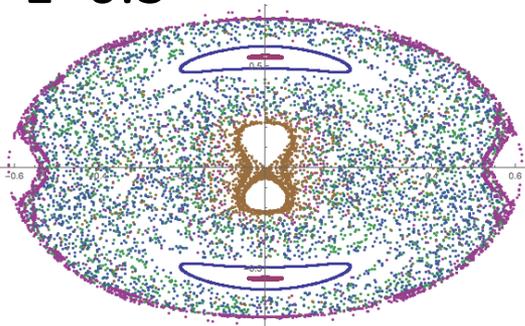
- N=4 超対称Yang-Mills + N=2 quark hypermultiplets
- 理論のパラメタ:  $\lambda, N_c$  and  $m_q$ 
  - 2-flavor, quark mass  $m_q$
  - SU( $N_c$ ) gauge group with large  $N_c$
  - Large 't Hooft coupling  $\lambda$

## ポアンカレ切斷

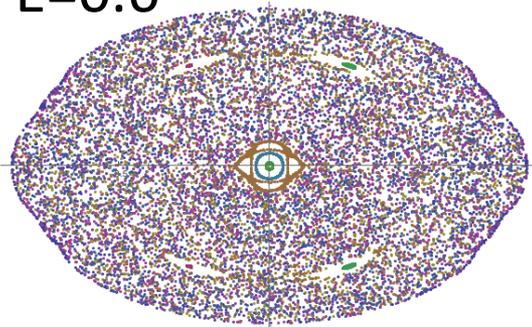
$E=0.05$   $\dot{y}(t)$



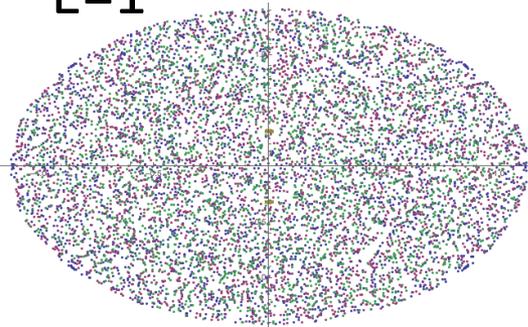
$E=0.3$



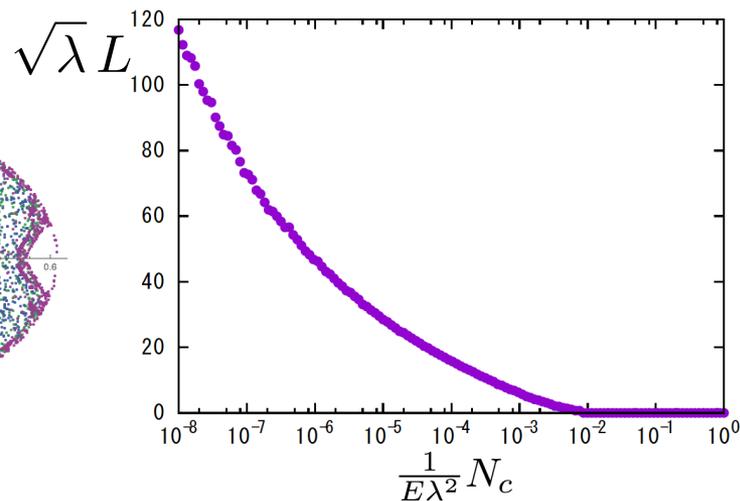
$E=0.6$



$E=1$



## リャプノフ指数



カオス・非カオス転移

$$\lambda = 100 \quad N_c = 10 \quad m_q = 1$$

1

カオス と 量子カオス

6ページ

2

場の量子論の カオス の例

4ページ

例1) 線形シグマ模型

カイラル凝縮のカオス

例2) AdS/CFTでの古典メソン解析

$N_c$ が大きくなるほどカオスは減る

3

ブラックホール による カオス

4ページ

4

ブラックホールの内側 と 量子情報

5ページ

1

カオス と 量子カオス

6ページ

2

場の量子論の カオス の例

4ページ

3

ブラックホール による カオス

4ページ

ブラックホールの地平面はカオス  
カオス上限予想  
地平面近傍の粒子の運動のカオス  
ユニバーサルなカオス

4

ブラックホールの内側 と 量子情報

5ページ

## 3-1

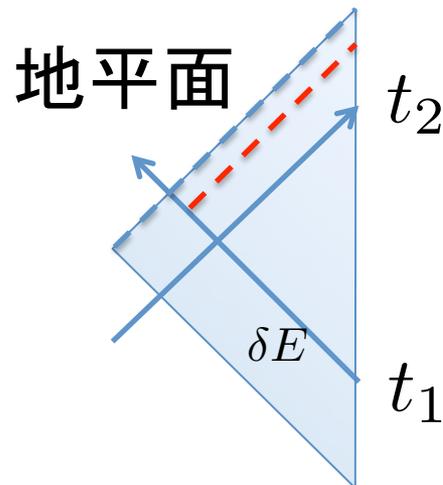
## ブラックホールの地平面はカオス

ブラックホール = Fast scrambler?

[Sekino, Susskind '08]

衝撃波の遅延効果 (赤方偏移)

[Shenker, Stanford '13, '14]



1+1次元dilaton重力理論での計算

[Almheiri, Polchinski '14]

[Engelsoy, Martens, Verlinde '16] ..

$$\delta t_2 = \frac{\delta E}{8\pi T M} e^{2\pi T (t_2 - t_1)}$$

リャプノフ指数 = ホーキング温度

# カオス上限予想

予想： 熱的OTO相関のリアプノフ指数は温度で上限

$$L \leq 2\pi T$$

[Maldacena, Shenker, Stanford '15]

(AdS/CFT対応とブラックホールから)

SYK (Sachdev-Ye-Kitaev) 模型 [Kitaev '15][Sachdev, Ye '95]

(1+0 次元、 $N$ 個のマヨラナフェルミオン、disorder)

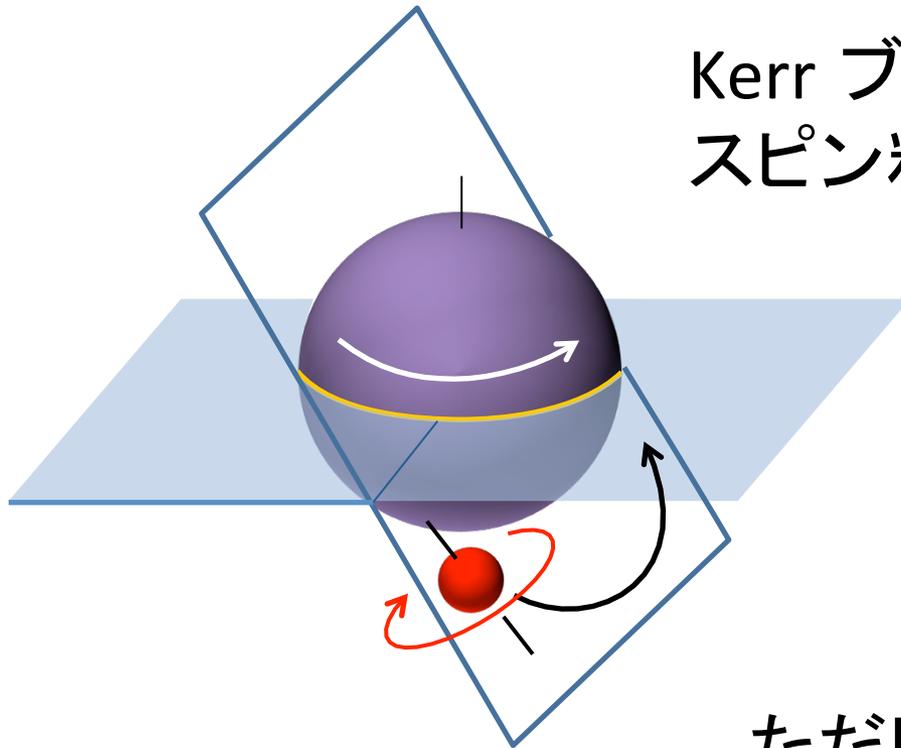
$$H = \frac{-1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^N j_{[ijkl]} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l \quad \left( \sum_{j,k,l=1}^N \langle j_{ijkl} j_{ijkl} \rangle = 6J^2 \right)$$

- ラージ $N$ と強結合  $\beta J \rightarrow \infty$  で可解
- 4点熱的OTO相関のリアプノフはカオス上限に一致

[Kitaev '15] [Maldacena, Stanford '16] [Polchinski, Rosenhaus '16]

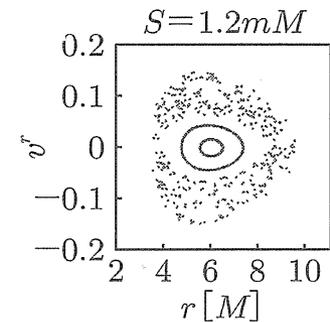
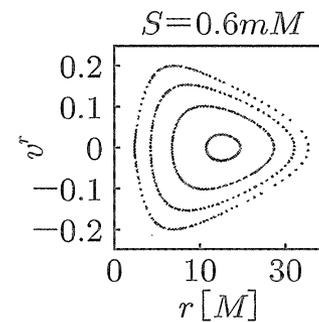
## 3-3

## 地平面近傍の粒子の運動のカオス



Kerr ブラックホールを回る  
スピン粒子の運動はカオス

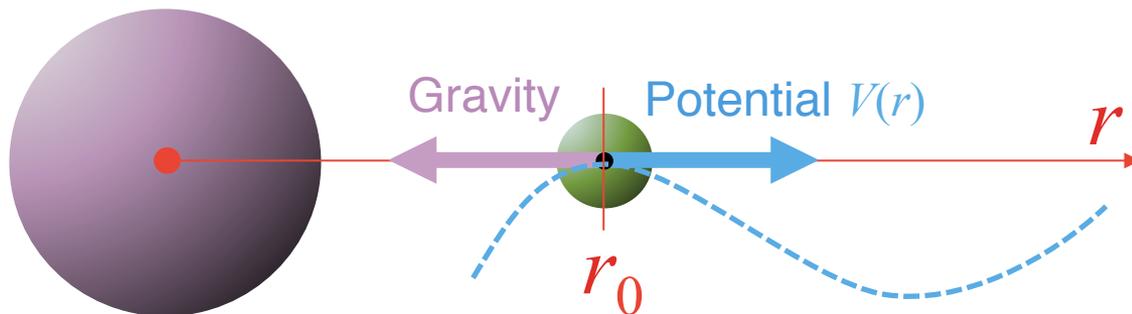
[Suzuki, Maeda '96]



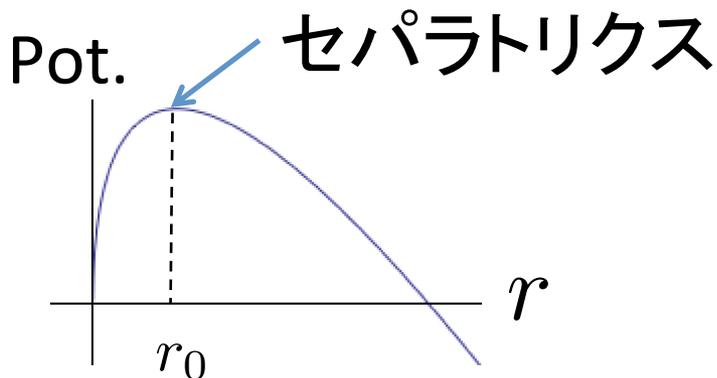
ただし運動は地平面から遠い

注) Schwarzschild、Kerrまわりの  
geodesic motionは可積分

[Tanahashi, KH `16]



「リャプノフ指数 = ホーキング温度」  
が地平面近傍でユニバーサル



$$\mathcal{L} = -m \sqrt{-g_{\mu\nu}(X) \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu} - V(X)$$

$$\sim C \left[ \dot{r}^2 + \frac{1}{(2\pi T)^2} (r - r_0)^2 \right]$$

1

カオス と 量子カオス

6ページ

2

場の量子論の カオス の例

4ページ

3

ブラックホール による カオス

4ページ

ブラックホールの地平面はカオス  
カオス上限予想  
地平面近傍の粒子の運動のカオス  
ユニバーサルなカオス

4

ブラックホールの内側 と 量子情報

5ページ

1

カオス と 量子カオス

6ページ

2

場の量子論の カオス の例

4ページ

3

ブラックホール による カオス

4ページ

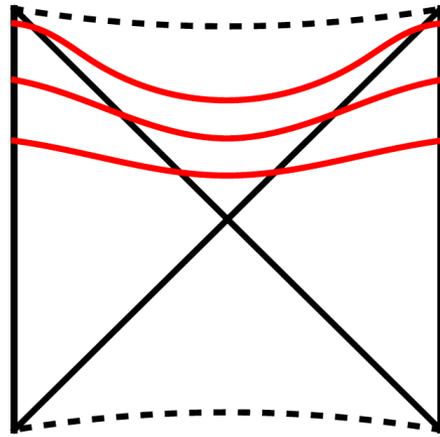
4

ブラックホールの内側 と 量子情報 5ページ

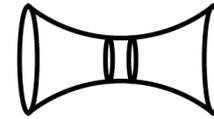
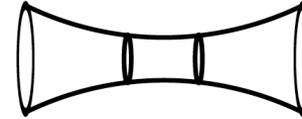
ブラックホールをつらぬく曲面  
Susskind「双対はComplexity」  
Complexity = 再構成ゲート数  
量子回路の単位  
場の量子論のComplexity?

# 4-1

## ブラックホールをつらぬく曲面



Eternal black hole



空間的極小曲面

[Hartman, Maldacena '13]



有限温度 CFT



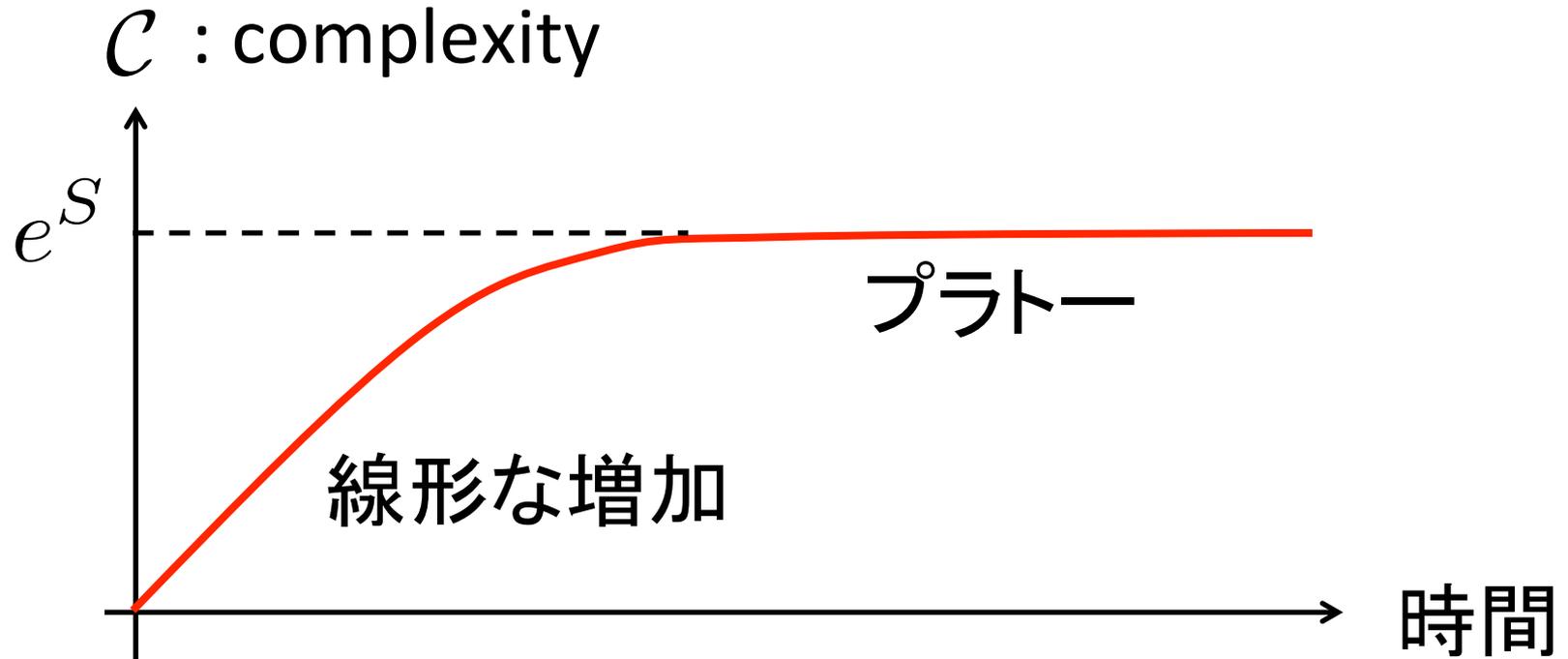
Complexity [Susskind '14]

[Susskind '14] [Stanford, Susskind '14] [Brown, Roberts, Susskind, Swingle, Zhao '15]  
 and [Lehner, Myers, Poisson, Sorkin '16] [Couch, Fishler, Nguyen '16]  
 [Ben-Ami, Carmi '16] [Carmi, Myers, Rath '16] [Yang, Niu, Kim '17], ...

## 4-2

## Susskind「双対はComplexity」

[Susskind “Entanglement is not enough” ‘14]

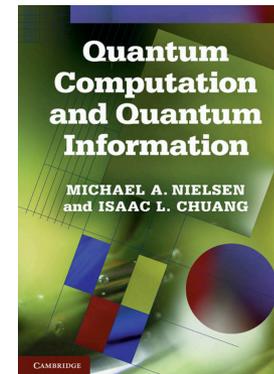


- エンタングルメントエントロピーは $S$ まで  
(笠-高柳 面は地平面の内側へは行かない)
- Complexity は  $\exp[S]$  まで成長する

定義 Complexity  $\mathcal{C}(U)$ :

任意のユニタリー演算子  $U$  に対し、  
 $\mathcal{C}(U)$  は次を満たす最小のゲート  $U_i$  の数

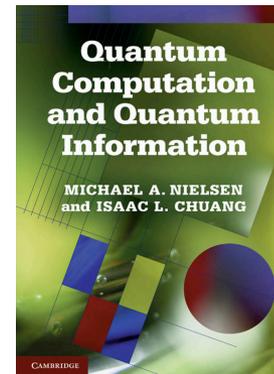
$$\|U - U_1 U_2 \cdots U_c\| < \epsilon$$



- ゲート  $U_i \in$  ユニバーサルゲート集合
- Trace ノルム :
 
$$\|U - V\|^2 \equiv \frac{1}{\text{Tr}(1)} \text{Tr}[(U - V)^\dagger (U - V)]$$
- $\epsilon (\ll 1)$  : 正則化パラメタ

定義 ユニバーサルゲート集合:

どんなユニタリー演算子でもその積から再構築できるユニタリー演算子の集合



例) n-qubit 系 ( $2^n \times 2^n$  ユニタリー行列)

状態の基底:  $|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle, \dots$

ユニバーサルゲート集合:  $\{U_i, U_{i,j}\}$

$$\left[ \begin{array}{l} U_i : \text{single qubit ゲート ( } i \text{ 番目の qubit に作用)} \\ U_{i,j} : i \text{ 番目と } j \text{ 番目をエンタングルするゲート} \end{array} \right.$$

## 場の量子論のComplexity?

提案 (1+2次元 U(1)ゲージ理論):

空間を格子化、 $Z_N$  に離散化 [Iizuka, Sugishita, KH '17]

1+2次元U(1)ゲージ理論  $\left\{ \begin{array}{l} U(1) \rightarrow Z_N \rightarrow Z_2 \\ 2d空間 \rightarrow L \times L \text{ 格子} \end{array} \right\}$   $L^2$ -qubit系

結果: 非局所性が最大の系のみ  $C = \exp[S]$

提案 (自由スカラー場理論):

ヒルベルト空間をtruncateする

[Jefferson, Myers '17] (Myers @ Strings2017)

運動量空間でcMERAのアナロジーを用いる

[Chapman, Heller, Morrochio, Pastawski '17]

1

カオス と 量子カオス

6ページ

2

場の量子論の カオス の例

4ページ

3

ブラックホール による カオス

4ページ

4

ブラックホールの内側 と 量子情報 5ページ

ブラックホールをつらぬく曲面  
Susskind「双対はComplexity」  
Complexity = 再構成ゲート数  
量子回路の単位  
場の量子論のComplexity?