

熱的有效作用再考： 共形ブートストラップの観点から

中山 優

(大槻知貴さんとの共同研究)

(熱的)有効作用と相転移

量子or 古典3次元イジング模型の熱的相転移
(キュリー転移)を考える

$$H = \sum_i \beta \sigma_i \sigma_{i+1} + h \sigma_i$$
$$Z(\beta, h) = \sum_{\sigma_i} e^{-H[\sigma]} \quad Z(h, \beta) = \text{Tre}^{-H(h, \beta)}$$

- ・平均場(ランダウ)の考え方に従って自由エネルギーを半古典的に鞍点評価してみる

$$Z \sim e^{-H_{eff}(\phi, h, m^2)} \big|_{\phi=\phi_c} \quad m^2 = T - T_c$$

$$H_{eff} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + h \phi + m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4 + \dots$$

- ・自由エネルギーの振る舞い

$$\begin{aligned} f &\sim h^2/(T - T_c) + \dots & \phi &\sim h/(T - T_c) & h &\ll T - T_c \\ f &\sim h(h/\lambda)^{1/3} + \dots & \phi &\sim (h/\lambda)^{1/3} & h &\gg T - T_c \end{aligned}$$

(熱的)有効作用と相転移

ウィルソン:ランダウの考えは「ほとんど」正しい。
ただし、臨界点ではゆらぎを繰り込み群として取り入れる必要がある。

$$\mathcal{H} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4 \quad Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^3x \mathcal{H}}$$

- ウィルソンの繰り込み群変換

$$Z = \int_{\mu < \Lambda} \mathcal{D}\phi e^{-\int d^3x \mathcal{H}_\Lambda} \quad e^{-\int d^3x \mathcal{H}_\Lambda} = \int_{\Lambda < \mu} \mathcal{D}\phi e^{-\int d^3x \mathcal{H}}$$

- (近似的な)繰り込み群方程式 $\frac{d\mathcal{H}}{d\Lambda} = \beta_\lambda \phi^4 + \dots$

- 繰り込み群の**固定点**が臨界現象を特徴づける

非自明なスケーリング則

自由エネルギーの振る舞いは relevant な2つの演算子の次元で決まる

$$H = H_0 + h\sigma + t\epsilon + \dots$$

$$\Delta(h) = d - \Delta_\sigma \quad \Delta(t) = d - \Delta_\epsilon$$

- スケール不変性から

$$f = t^{\frac{d}{d-\Delta_\epsilon}} g\left(h/t^{\frac{d-\Delta_\sigma}{d-\Delta_\epsilon}}\right)$$

- 極限では
- | | |
|---|--|
| $h \gg t^{\frac{d-\Delta_\sigma}{d-\Delta_\epsilon}}$ | $f \sim h^{\frac{d}{d-\Delta_\sigma}}$ |
| $h \ll t^{\frac{d-\Delta_\sigma}{d-\Delta_\epsilon}}$ | $f \sim t^{\frac{d}{d-\Delta_\sigma}} (1 + c_2 h^2 + \dots)$ |

しかし...

スケール不変性だけに基づく、**繰り込み群の哲学**
は実際の臨界指数を決定しない

- スケール不変性だけからは**臨界指数は決定できない**
- 3次元の ϕ^4 模型は**強結合**。繰り込み群の実際の計算は(怪しい近似を使わないと)不可能？

- 例: $4 - \epsilon$ 次元での計算

$$\beta_\lambda = -\epsilon\lambda + c_0\lambda^2 + \dots$$

- 職人芸的な技であるが値はよさそう？

$$\gamma = 1 + 0.1667 + 0.0771 - 0.049 + 0.1436 - 0.4466 + \dots = 1.244(50)$$

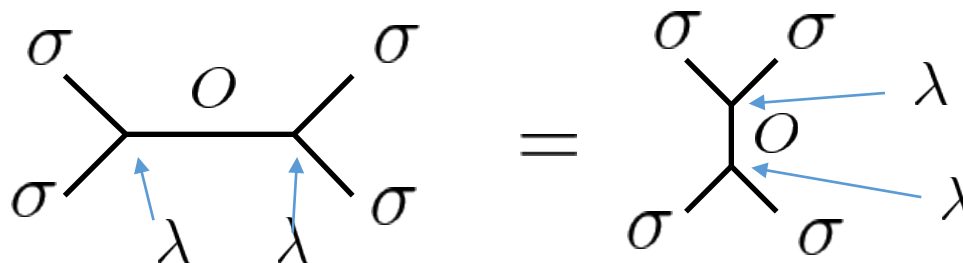
$$\gamma = 1.24$$

- が、哲学では食えない

21世紀の繰り込み群の終着点(?)

3次元の臨界現象にはスケール対称性より強い**共形対称性**が備わっている

- **共形ブートストラップ**の哲学: 共形対称性による相関関数への制限から理論を解いてしまう



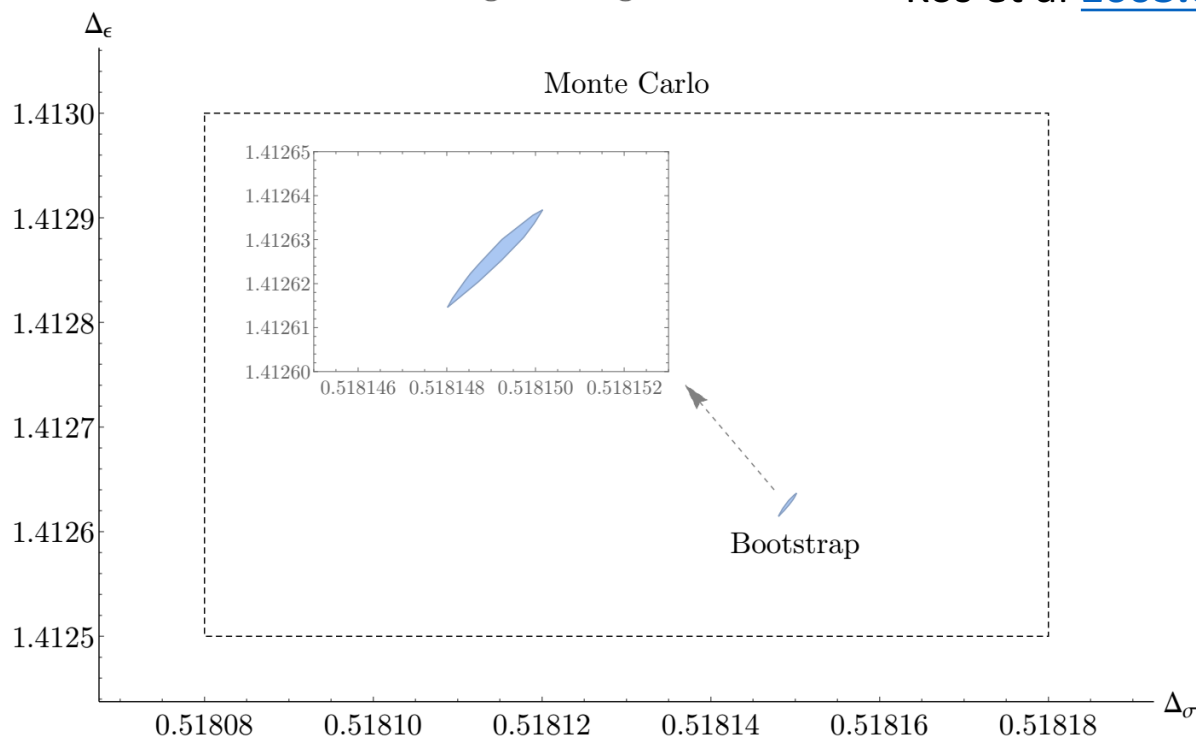
- 繰り込み群の固定点 = 共形ブートストラップ方程式の解
- 2016年現在、3次元臨界イジング模型の最も良い臨界指数の予言は共形ブートストラップによって得られている
- 普遍性の概念の「証明」も与える

共形ブートストラップの予言

共形対称性によって3次元イジング模型の臨界指数が存在できる領域は決まっている

Ising: Scaling Dimensions

Kos et al [1603.04436](#)



$$\Delta_\sigma = \frac{3}{1 + \delta}$$
$$\Delta_\epsilon = 3 \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2}$$

$$C = (T - T_c)^{-\alpha}$$

$$m = (T - T_c)^\beta$$

$$m = h^{1/\delta}$$

$$\text{スケーリング仮説: } 2 - \alpha = \beta(\delta + 1)$$

QCDカイラル相転移の話

QCD のカイラル相転移は1次か2次か？

- 数学的に取り扱うために、massless 2 flavor QCD を考えよう：

$$\psi_a^L \rightarrow (U\psi^L)_a \quad \psi_a^R \rightarrow (V\psi^R)_a \quad \langle \bar{\psi}\psi \rangle \sim \Lambda^3$$

$$SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_A \rightarrow SU(2)_V$$

- 有限温度(ただし、化学ポテンシャルはゼロ)でカイラル相転移は回復する？
- 相転移の次数は？

熱的有効理論を考えてみよう

まずはともあれランダウの有効作用を書いてみる

- オーダーパラメター

$$SU(2) \times SU(2) \times U(1) \sim O(4) \times O(2)$$

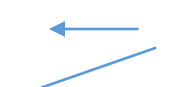
$$\phi_a^\alpha \sim \bar{\psi}\psi$$

In Fund x Fund rep of $O(4) \times O(2)$

- 素朴なランダウ・ギンツブルグ模型

$$\mathcal{H} = \partial_\mu \phi_a^\alpha \partial_\mu \phi_a^\alpha + u(\phi_a^\alpha \phi_a^\alpha)^2 + v(\phi_a^\alpha \phi_b^\alpha \phi_a^\beta \phi_b^\beta - \phi_a^\alpha \phi_a^\alpha \phi_b^\beta \phi_b^\beta)$$

$O(4) \times O(2)$ symmetric



- 古典論(平均場近似)では2次相転移
- 繰り込み群の効果は？

熱的有効理論をさらに考えてみよう

繰り込み群の効果の前にアノマリーの効果を考える

- $U(1)_A$ はゼロ温度ではアノマリーによって破れている
- 熱的有効作用にはどう反映されるのか？

(A) $U(1)_A$ is fully recovered (Pisarski-Wilczek, Cohen)

(B) $U(1)_A$ is partially recovered (Aoki et al)

(C) $U(1)_A$ is fully broken (Lee-Hatsuda)

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = & \partial_\mu \phi_a^\alpha \partial_\mu \phi_a^\alpha + (T - T_c) \phi_a^\alpha \phi_a^\alpha \\ & + u(\phi_a^\alpha \phi_a^\alpha)^2 + v(\phi_a^\alpha \phi_b^\alpha \phi_a^\beta \phi_b^\beta - \phi_a^\alpha \phi_a^\alpha \phi_b^\beta \phi_b^\beta) \\ & + m_A(\phi_a^1 \phi_a^1 - \phi_a^2 \phi_a^2) + c_A(\phi_a^1 \phi_a^1 \phi_a^1 \phi_a^1 + \cdots)\end{aligned}$$

青木・深谷・谷口定理を考える

仮定1: 自由エネルギー密度は m^2 に対して解析的

仮定2: Dirac 固有値分布 $D^\mu \gamma_\mu \psi_i = \lambda \psi_i$ は $\lambda = 0$ で解析的

$$f = f_0 + c_0(|m_u|^2 + |m_d|^2) + c_a(m_u m_d + \bar{m}_u \bar{m}_d) + \dots$$

- この時 $U(1)_A$ を破る $c_a = 0$ と言える (c.f. 金沢・山本)

$$\begin{aligned} \lim_{m_u \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial m_u} &= c_a m_d + \dots \\ &= \lim_{m_u \rightarrow 0} \int d\lambda \frac{m_u \langle \rho(\lambda) \rangle}{m_u^2 + \lambda^2} \\ &= \langle \rho(0) \rangle = m_d^2 + \dots \end{aligned}$$

- 繰り込み群的な安定性から、 $U(1)_A$ のうち、(少なくとも) Z_2 が回復していると考えるのが自然
- 注意: 2次相転移なら、自由エネルギー密度はそもそも $T \sim T_c$ で解析的に展開できない。

青木・深谷・谷口が正しいとして...？

- 青木・深谷・谷口が予言する Z_2 対称性は、 $U(1)_A$ の長距離での回復を意味するか？
 - $U(1)_A$ が回復すれば、Pisarski-Wilczek の議論が適応できる
- $O(4) \times U(1)_A$ を持った固定点は存在するか？
 - 存在すれば2次相転移の可能性
 - 存在しなければ1次相転移？

この二つの問題を共形ブートストラップを使って答えたい。

共形ブートストラップの話

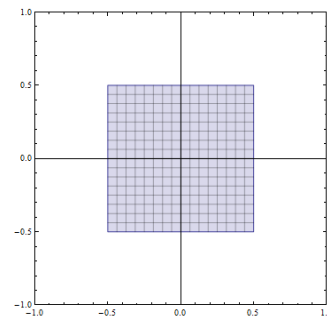
共形対称性とは？

- スケール変換:

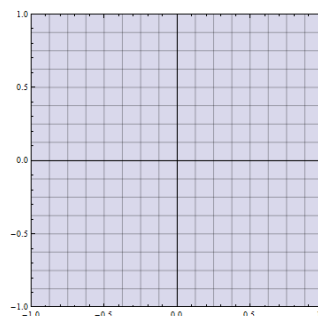
$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$$

- 特殊共形変換:

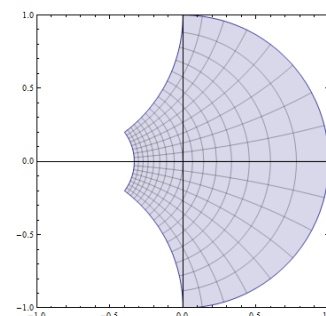
$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + a^\mu x^2}{1 + 2a^\mu x_\mu + a^2 x^2}$$



スケール変換 ↓



↓ 共形変換



数学的にはスケール変換群だけから共形変換不変性がでるか
どうかは非常に非自明 (レビュー: [arXiv:1302.0884](https://arxiv.org/abs/1302.0884))

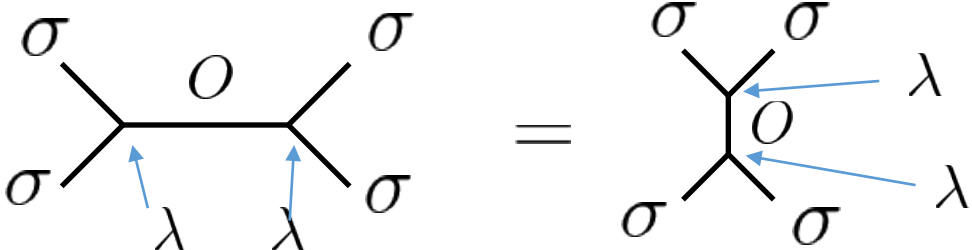
共形ブートストラップ速習

- 4点関数を考える $\langle \sigma(0)\sigma(1)\sigma(z)\sigma(\infty) \rangle$

- OPE (演算子積展開) で評価

$$\sigma \times \sigma = \sum_i C_{\phi\phi i} O_i$$

- OPEを使う順番によらない (交差対称性)

$$z \iff 1-z$$


- 無限次元の拘束条件
- 仮想的なCFTの性質が交差対称性(とユニタリ性)と矛盾しないか確かめる
- 例えば、OPE に現れる演算子の次元の最小値の評価

$$\sigma \times \sigma = 1 + \epsilon + \dots$$

スケールブートストラップ(共形ブートストラップのおもちゃ)

- 簡単な例で、解析的に(弱い)制限を出してみる

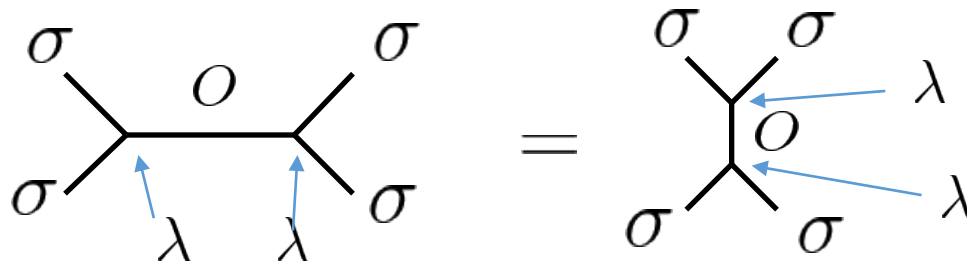
- スケール不変性だけ仮定する $\Delta_\sigma = \delta \quad \Delta_\epsilon = \Delta^c(\delta)$

- OPE は primary だけでなく全ての演算子の和になる

$$(1-z)^{2\delta} - z^{2\delta} = - \sum_{\Delta} C_{\phi\phi\Delta}^2 \left((1-z)^{2\delta} \rho(z)^\Delta - z^{2\delta} \rho(1-z)^\Delta \right)$$

$$\rho(z) = \frac{z}{(1 + \sqrt{1-z})^2}$$

- ただし、スケールブロックは簡単な形に
- 交差対称性を確かめたい



解析的なブートストラップ計算の続き

- ブートストラップ方程式を解きたい

$$(1-z)^{2\delta} - z^{2\delta} = - \sum_{\Delta} C_{\phi\phi\Delta}^2 \left((1-z)^{2\delta} \rho(z)^{\Delta} - z^{2\delta} \rho(1-z)^{\Delta} \right)$$
$$\rho(z) = \frac{z}{(1 + \sqrt{1-z})^2}$$

- 背理法を使って必要条件を出す

$$\Delta \gg \delta$$

- 両辺を $x = z - \frac{1}{2}$ でテーラー展開

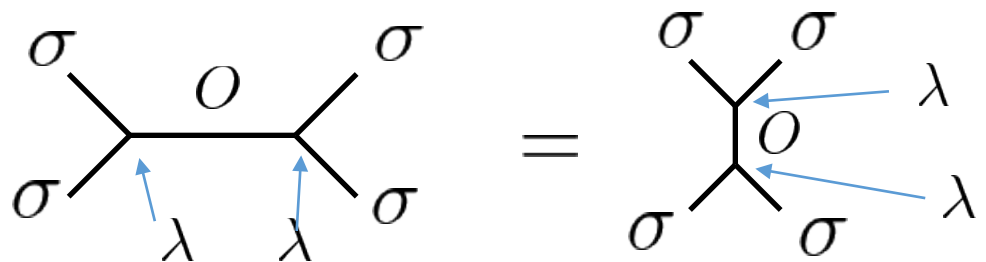
- 関数形がわかってるからできる

- x^3 のオーダーで $(\delta - 1)(2\delta - 1) = \frac{\sum \Delta^2 C_{\phi\phi\Delta}^2}{\sum C_{\phi\phi\Delta}^2} > \Delta_{min}^2$

- これは直ちに矛盾。OPE に現れる一番最初の演算子 ϵ のスケール次元には上限が存在する

共形ブートストラップの実装

- 共形ブロックを使って展開

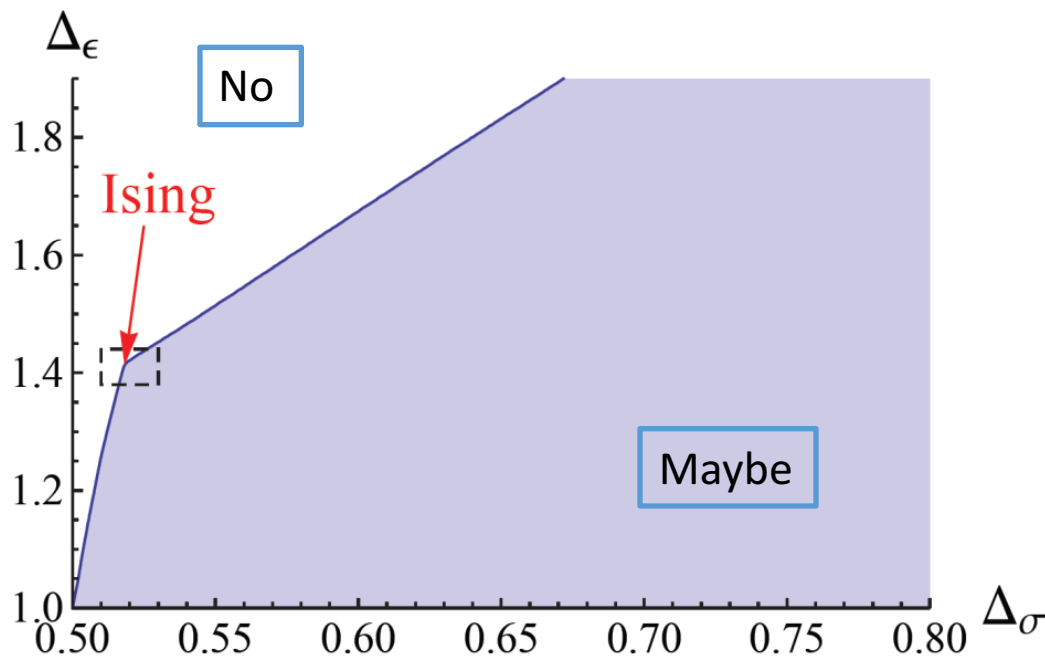


$$1 = \sum_O \lambda_O^2 (f_O(z) - f_O(1-z))$$

- 共形ブロックの形とそのテーラー展開をたくさん計算する → 再帰方程式を使う
- そこから仮定した演算子のスペクトラムと矛盾する線形結合を見つける → semi-definite programming (e.g. SDPB などを使う)
- 必要に応じて他の4点関数の制限を加えたり、理論の演算子の構造に仮定を加えたりする

$$\langle \sigma \sigma \sigma \sigma \rangle \quad \langle \epsilon \epsilon \epsilon \epsilon \rangle \quad \langle \epsilon \epsilon \sigma \sigma \rangle \quad \Delta_{\sigma'} > 3 \quad \Delta_{\epsilon'} > 3$$

3次元臨界イジング模型(El-Showk et al [1203.6064](#))



$$\Delta_\sigma = \frac{3}{1 + \delta}$$
$$\Delta_\epsilon = 3 \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2}$$

$$C = (T - T_c)^{-\alpha}$$

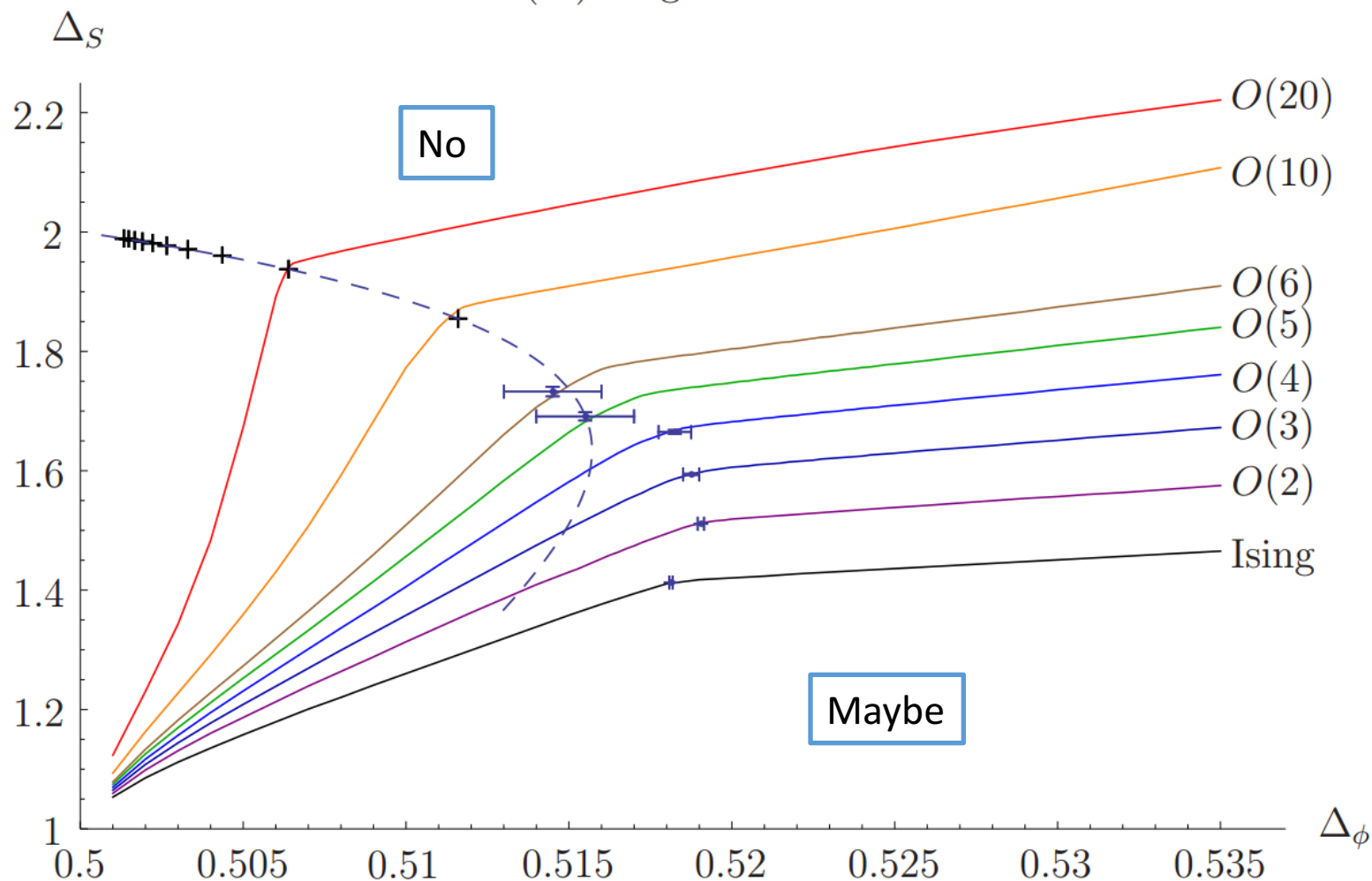
$$m = (T - T_c)^\beta$$

$$m = h^{1/\delta}$$

キンク的位置と3次元イジング模型の臨界指数の一致

3次元 $O(N)$ 模型 (Kos et al [1307.6856](https://arxiv.org/abs/1307.6856))

$O(N)$ Singlet Bounds

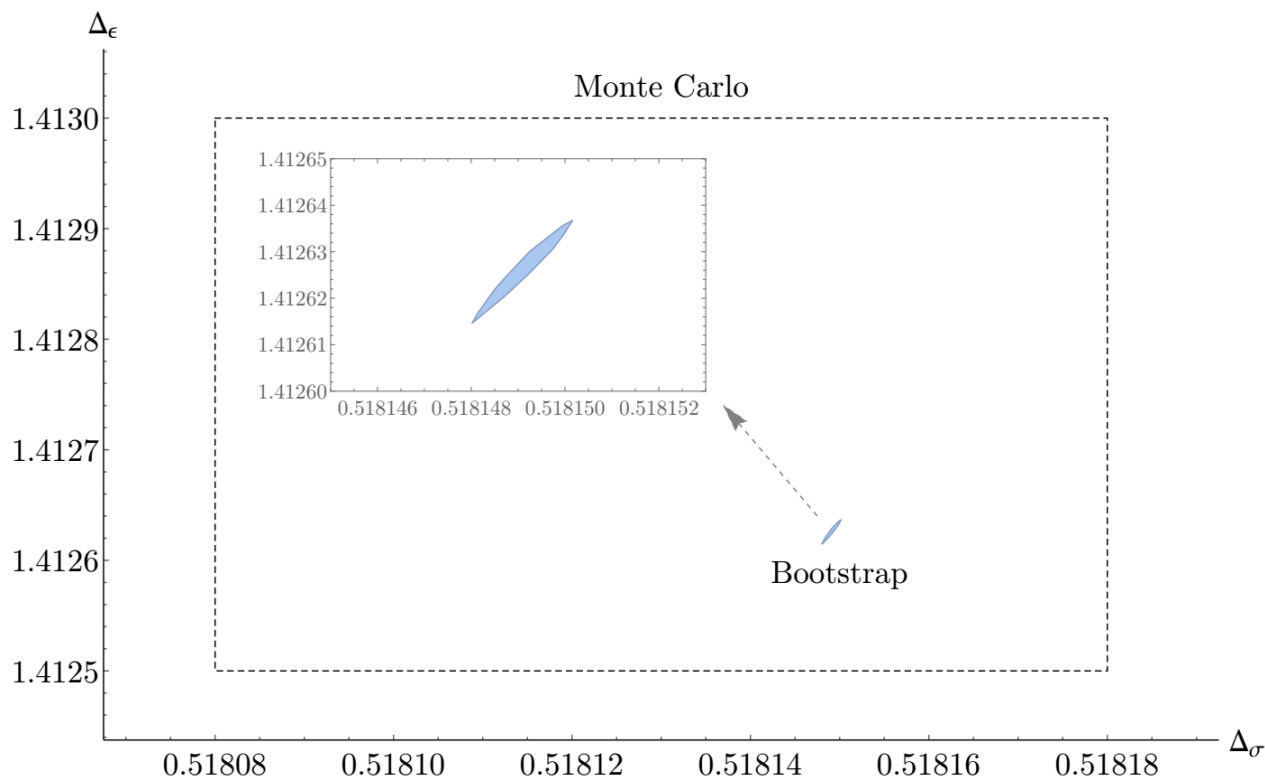


3次元で有意な変数が二つの理論 (Kos et al [1603.04436](#))

$$\langle \sigma \sigma \sigma \sigma \rangle \quad \langle \epsilon \epsilon \sigma \sigma \rangle \quad \langle \epsilon \epsilon \epsilon \epsilon \rangle$$

$$\Delta_{\epsilon'} > 3 \quad \Delta_{\sigma'} > 3$$

Ising: Scaling Dimensions



臨界現象の普遍性が共形対称性から示されている

共形ブートストラップと臨界現象

- 与えられた臨界現象のクラス(対称性)に対して、共形ブートストラップによる制限を調べる
- キンクが存在 → 経験的に臨界点の存在を示唆
- キンクが非存在 → 経験的に臨界点が存在しないか、臨界点を決定する条件が弱すぎる
- 作業仮説: キンクのような面白い振る舞い → 相転移が2次になり得る
- この作業仮説を認めれば、臨界指数など臨界現象の性質に対して強い予言ができる

QCDのカイラル相転移の問題

- $O(4) \times U(1)_A$ を持った固定点は存在するか？

- 存在すれば2次相転移の可能性
- 存在しなければ1次相転移？

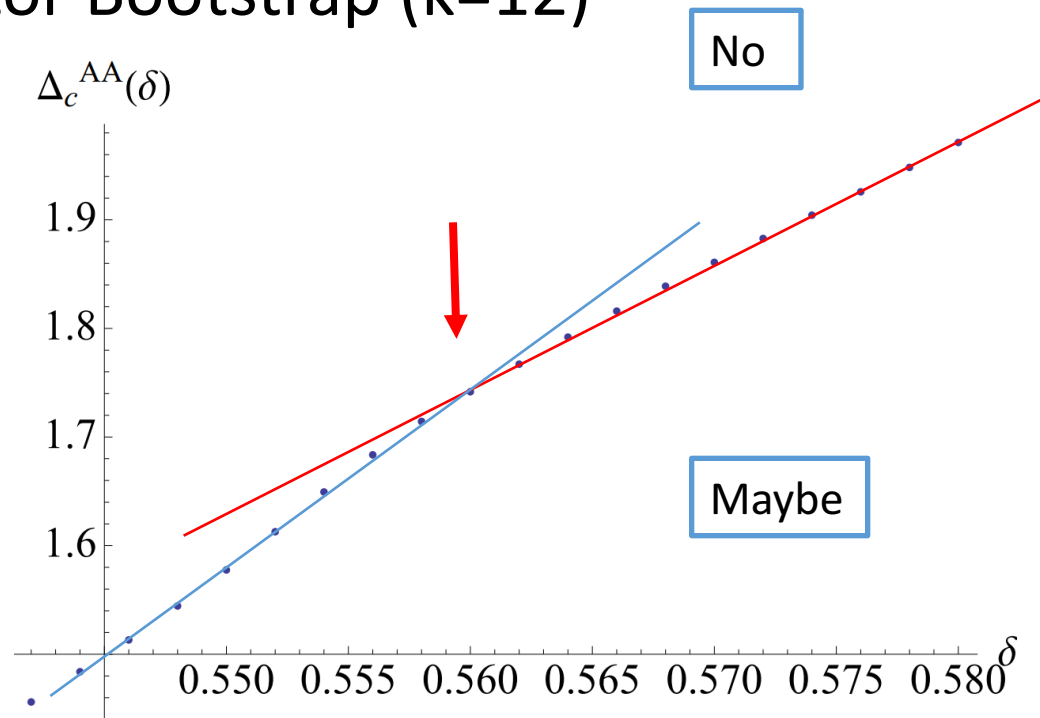
→ 対応するキंकが存在するか？

- 青木・深谷・谷口が预言する Z_2 対称性は、 $U(1)_A$ の長距離での回復を意味するか？

→ キंकの場所での臨界指数の決定

$O(4) \times O(2)$ collinear fixed point

- AA sector Bootstrap ($k=12$)

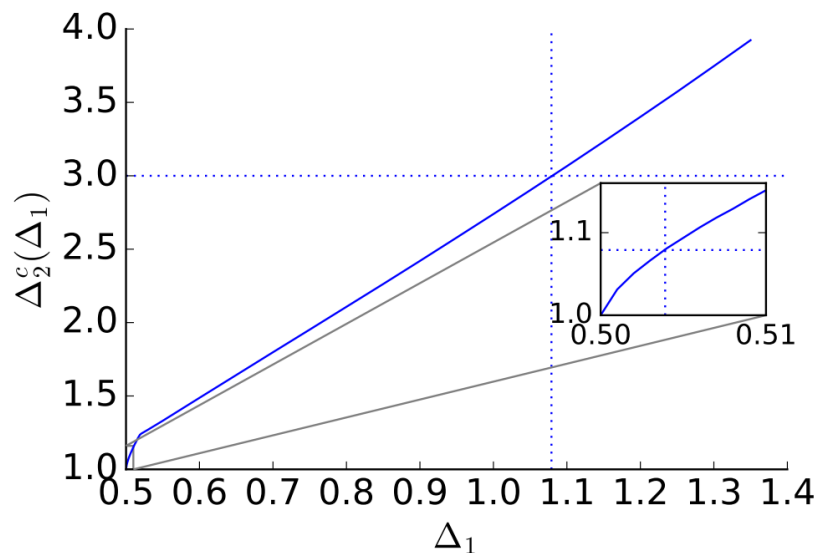


	Δ_ϕ	Δ_{SS}	Δ_{ST}	Δ_{TS}	Δ_{TT}	Δ_{AA}
bootstrap	0.558(4)	1.52(5)	0.82(2)	1.045(3)	1.26(1)	1.71(6)
$\overline{MS}$	0.56(3)	1.68(17)	1.0(3)	1.10(15)	1.35(10)	1.9(1)
MZM	0.56(1)	1.59(14)	0.95(15)	1.25(10)	1.34(5)	1.90(15)

$O(4) \times O(2)$ 対称性を持った臨界点が予言される(?)

$Z_2 \rightarrow U(1)$ へ対称性が持ち上がるか？

- $O(4) \times O(2)$ 固定点は、青木・深谷・谷口が预言する Z_2 だけで安定か？
- つまり、 $U(1)$ のチャージを持つが、 Z_2 で even な演算子は全て irrelevant か？
- この問題は共形ブートストラップで決着がつく！



- 残念ながら(?)我々の結果では、 $O(4) \times O(2)$ 対称性を持った固定点は存在しても、青木・深谷・谷口が言う Z_2 だけでは安定ではない。
- こういった計算は、共形ブートストラップを使わないと無理

QCDカイラル相転移のまとめと現状

- 3つの生き残ってるシナリオ

(A) $U(1)_A$ が完全に回復 (Pisarski-Wilczek, Cohen)

→ $O(4) \times O(2)$ 型の2次相転移 $\Delta_\epsilon = 1.52$

(B) $U(1)_A$ は部分的に回復 (Aoki et al)

→ $U(1)$ まで回復することはない

→ おそらく1次相転移(?)

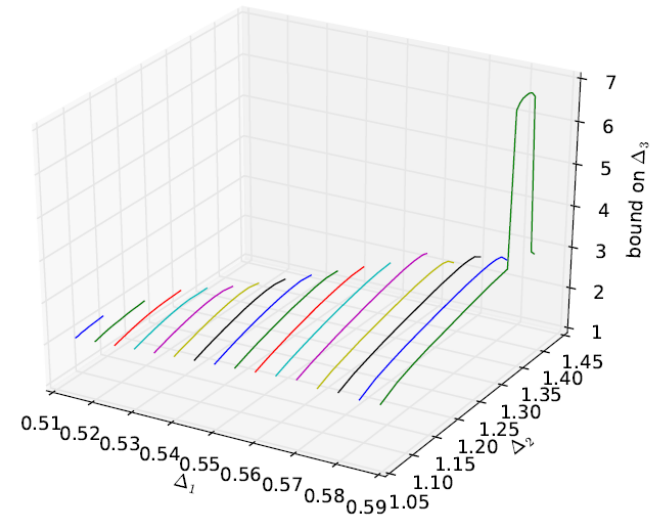
(C) $U(1)_A$ が完全に破れている (Lee-Hatsuda)

→ $O(4)$ 型の2次相転移 $\Delta_\epsilon = 1.665$

今後の展望

- 離散対称性が連続対称性に IR で持ち上がるための必要条件

- (A) Z_2 symmetry $\rightarrow U(1)$
 $\Delta_1 > 1.08$
- (B) Z_3 symmetry $\rightarrow U(1)$
 $\Delta_1 > 0.580$
- (C) Z_4 symmetry $\rightarrow U(1)$
 $\Delta_1 > 0.504$



- 結構、この条件を破っている論文はある
- 共形対称性の重要性
- 有限密度での量子臨界現象は??

Conformal Bootstrap

Five loop (Calabrese, Vicari, e.g. [1309.5446](#))

$$\mathcal{H} = \partial_\mu \phi_a^\alpha \partial_\mu \phi_a^\alpha + u(\phi_a^\alpha \phi_a^\alpha)^2 + v(\phi_a^\alpha \phi_b^\alpha \phi_a^\beta \phi_b^\beta - \phi_a^\alpha \phi_a^\alpha \phi_b^\beta \phi_b^\beta)$$

$$\begin{aligned} \beta_u(u, v) = & -u + 4u^2 + 4uv + \frac{3}{2}v^2 - \frac{57}{8}u^3 - 11u^2v - \frac{61}{8}uv^2 - 3v^3 + \frac{93}{8}u^4\zeta(3) + \frac{389}{16}u^4 + 24u^3v\zeta(3) + \frac{975}{16}u^3v \\ & + \frac{99}{4}u^2v^2\zeta(3) + \frac{9347}{128}u^2v^2 + 18uv^3\zeta(3) + 45uv^3 + 6v^4\zeta(3) + \frac{1197}{128}v^4 - \frac{1885}{16}u^5\zeta(5) - \frac{3119}{32}u^5\zeta(3) + \frac{31}{120}\pi^4u^5 \\ & - \frac{51759}{512}u^5 - 340u^4v\zeta(5) - \frac{1183}{4}u^4v\zeta(3) + \frac{161}{240}\pi^4u^4v - \frac{10449u^4}{32}v - \frac{3905}{8}u^3v^2\zeta(5) - \frac{6849}{16}u^3v^2\zeta(3) + \frac{353}{480}\pi^4u^3v^2 \\ & - \frac{391151}{768}u^3v^2 - \frac{895}{2}u^2v^3\zeta(5) - 377u^2v^3\zeta(3) + \frac{8}{15}\pi^4u^2v^3 - \frac{42919}{96}u^2v^3 - \frac{1875}{8}uv^4\zeta(5) - \frac{3049}{16}uv^4\zeta(3) \\ & + \frac{31}{96}\pi^4uv^4 - \frac{12697}{64}uv^4 - 50v^5\zeta(5) - \frac{325}{8}v^5\zeta(3) + \frac{5}{48}\pi^4v^5 - \frac{1097}{32}v^5 + \frac{646947}{512}u^6\zeta(7) + \frac{333739}{256}u^6\zeta(5) \\ & - \frac{3}{64}u^6\zeta(3)^2 + \frac{333239}{512}u^6\zeta(3) - \frac{1885}{4032}\pi^6u^6 - \frac{6827}{2560}\pi^4u^6 + \frac{121665}{256}u^6 + \frac{146853}{32}u^5v\zeta(7) + \frac{158151}{32}u^5v\zeta(5) \\ & - \frac{507}{32}u^5v\zeta(3)^2 + \frac{320791}{128}u^5v\zeta(3) - \frac{6625}{4032}\pi^6u^5v - \frac{37481}{3840}\pi^4u^5v + \frac{494921}{256}u^5v + \frac{4266675}{512}u^4v^2\zeta(7) + \frac{1144635}{128}u^4v^2\zeta(5) \\ & - \frac{7017}{256}u^4v^2\zeta(3)^2 + \frac{4795927}{1024}u^4v^2\zeta(3) - \frac{9615}{3584}\pi^6u^4v^2 - \frac{504343}{30720}\pi^4u^4v^2 + \frac{7852881}{2048}u^4v^2 + 9702u^3v^3\zeta(7) + \frac{79415}{8}u^3v^3\zeta(5) \\ & - \frac{3}{4}u^3v^3\zeta(3)^2 + \frac{171801}{32}u^3v^3\zeta(3) - \frac{155}{56}\pi^6u^3v^3 - \frac{8173}{480}\pi^4u^3v^3 + \frac{6814435}{1536}u^3v^3 + \frac{3658095}{512}u^2v^4\zeta(7) + \frac{1773961}{256}u^2v^4\zeta(5) \\ & + \frac{2777}{128}u^2v^4\zeta(3)^2 + \frac{1942077}{512}u^2v^4\zeta(3) - \frac{94645}{48384}\pi^6u^2v^4 - \frac{182363}{15360}\pi^4u^2v^4 + \frac{36147287}{12288}u^2v^4 + \frac{189189}{64}uv^5\zeta(7) \\ & + \frac{44351}{16}uv^5\zeta(5) + \frac{103}{8}uv^5\zeta(3)^2 + \frac{189841}{128}uv^5\zeta(3) - \frac{2585}{3024}\pi^6uv^5 - \frac{1647}{320}\pi^4uv^5 + \frac{2121643}{2048}uv^5 \\ & + \frac{265041}{512}v^6\zeta(7) + \frac{61459}{128}v^6\zeta(5) + \frac{81}{64}v^6\zeta(3)^2 + \frac{246291}{1024}v^6\zeta(3) - \frac{335}{2016}\pi^6v^6 - \frac{3125}{3072}\pi^4v^6 + \frac{2538035}{16384}v^6, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \beta_v(u, v) = & -v + 3uv + 2v^2 - \frac{61}{8}u^2v - 11uv^2 - \frac{27}{8}v^3 + \frac{1349}{64}u^3v + \frac{1451}{32}u^2v^2 + \frac{575}{16}uvv^3 + \frac{347}{32}v^4 + \frac{33}{2}u^3v\zeta(3) \\ & + 36u^2v^2\zeta(3) + 24uv^3\zeta(3) + \frac{9}{2}v^4\zeta(3) - \frac{49815}{512}u^4v + \frac{29}{64}\pi^4u^4v - \frac{27835}{96}u^3v^2 + \frac{163}{120}\pi^4u^3v^2 - \frac{272945}{768}u^2v^3 + \frac{22}{15}\pi^4u^2v^3 \\ & - \frac{6635}{32}uvv^4 + \frac{53}{80}\pi^4uvv^4 - \frac{365}{8}v^5 + \frac{1}{10}\pi^4v^5 - \frac{3765}{32}u^4v\zeta(3) - \frac{691}{2}u^3v^2\zeta(3) - \frac{6111}{16}u^2v^3\zeta(3) - \frac{1507}{8}uvv^4\zeta(3) - \frac{567}{16}v^5\zeta(3) \\ & - \frac{2625}{16}u^4v\zeta(5) - 480u^3v^2\zeta(5) - \frac{2115}{4}u^2v^3\zeta(5) - \frac{1045}{4}uvv^4\zeta(5) - \frac{795}{16}v^5\zeta(5) + \frac{445355}{1024}u^5v - \frac{58367}{15360}\pi^4u^5v \\ & - \frac{12115}{16128}\pi^6u^5v + \frac{209163}{128}u^4v^2 - \frac{109087}{7680}\pi^4u^4v^2 - \frac{7535}{2688}\pi^6u^4v^2 + \frac{16837765}{6144}u^3v^3 - \frac{81491}{3840}\pi^4u^3v^3 - \frac{8455}{2016}\pi^6u^3v^3 \\ & + \frac{3808447}{1536}u^2v^4 - \frac{30289}{1920}\pi^4u^2v^4 - \frac{38005}{12096}\pi^6u^2v^4 + \frac{9331663}{8192}uvv^5 - \frac{1485}{256}\pi^4uvv^5 - \frac{28555}{24192}\pi^6uvv^5 + \frac{825245}{4096}v^6 - \frac{1285}{1536}\pi^4v^6 \\ & - \frac{5}{28}\pi^6v^6 + \frac{395479}{512}u^5v\zeta(3) + \frac{734983}{256}u^4v^2\zeta(3) + \frac{282653}{64}u^3v^3\zeta(3) + \frac{56043}{16}u^2v^4\zeta(3) + \frac{736561}{512}uvv^5\zeta(3) + \frac{63485}{256}v^6\zeta(3) \\ & + \frac{2499}{128}u^5v\zeta(3)^2 + \frac{4305}{64}u^4v^2\zeta(3)^2 + \frac{405}{4}u^3v^3\zeta(3)^2 + \frac{2771}{32}u^2v^4\zeta(3)^2 + \frac{2579}{64}uvv^5\zeta(3)^2 + \frac{231}{32}v^6\zeta(3)^2 + \frac{105231}{64}u^5v\zeta(5) \\ & + \frac{390003}{64}u^4v^2\zeta(5) + \frac{295491}{32}u^3v^3\zeta(5) + \frac{457495}{64}u^2v^4\zeta(5) + \frac{5647}{2}uvv^5\zeta(5) + \frac{29035}{64}v^6\zeta(5) + \frac{472311}{256}u^5v\zeta(7) \\ & + \frac{218295}{32}u^4v^2\zeta(7) + \frac{1325205}{128}u^3v^3\zeta(7) + \frac{1030617}{128}u^2v^4\zeta(7) + \frac{816291}{256}uvv^5\zeta(7) + \frac{16317}{32}v^6\zeta(7). \end{aligned} \quad (1)$$

固定点は存在するらしい

よって、 $U(1)_a$ が回復しているとすれば、 $O(4) \times U(1)_a$ の対称性に基づいた臨界現象が可能 (1-loop 計算による Pisarski-Wilczek の結論と異なることに注意)

- 次の疑問は、この固定点は、青木・深谷・谷口にの議論だけから実現することができるのか？
- 言い換えると、この固定点は、 $U(1)$ ではなく、 Z_2 対称性だけを課してもアトラクティブな固定点であるか？
- この問題は、我々のブートストラップの計算以前は議論されてこなかった。

Conformal Bootstrap

What is conformal bootstrap?

- **Assume** conformal invariance (could be non-trivial)
- Consider 4pt function

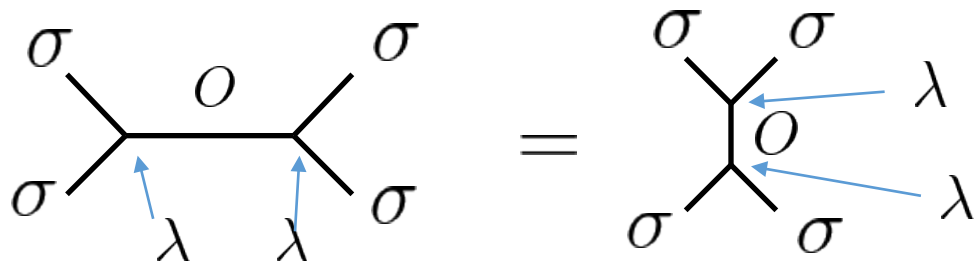
$$\langle \sigma(0)\sigma(1)\sigma(z)\sigma(\infty) \rangle$$

- OPE expansions

$$\sigma \times \sigma = \sum_i C_{\phi\phi i} O_i$$

- Crossing relations

$$z \iff 1 - z$$



- Test the hypothetical properties of the CFT to see if the crossing relations can be solved
- For example, bound on the scaling dimension of the first excited operator

$$\sigma \times \sigma = 1 + \epsilon + \dots$$

Toy bootstrap from only scale invariance

- Let's see the existence of bound **analytically**

$$\Delta_\sigma = \delta \quad \Delta_\epsilon = \Delta^c(\delta)$$

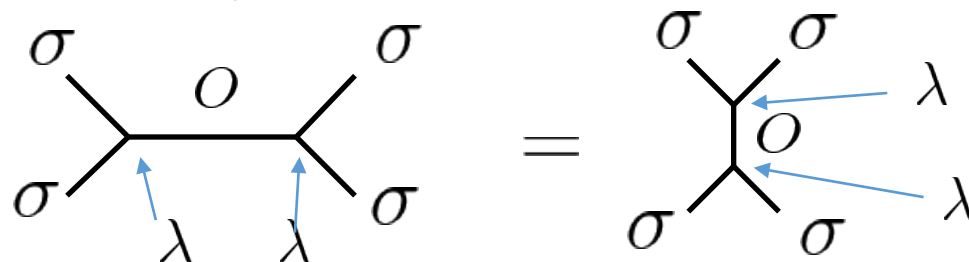
- Assume **only scale invariance**

- Scaling block is very simple

$$(1-z)^{2\delta} - z^{2\delta} = - \sum_{\Delta} C_{\phi\phi\Delta}^2 \left((1-z)^{2\delta} \rho(z)^\Delta - z^{2\delta} \rho(1-z)^\Delta \right)$$

$$\rho(z) = \frac{z}{(1 + \sqrt{1-z})^2}$$

- Sum is over all the operators (not only primaries)
- Is crossing symmetry satisfied?



Toy bootstrap from only scale invariance

- Can we solve the (scale) bootstrap equation?

$$(1 - z)^{2\delta} - z^{2\delta} = - \sum_{\Delta} C_{\phi\phi\Delta}^2 \left((1 - z)^{2\delta} \rho(z)^{\Delta} - z^{2\delta} \rho(1 - z)^{\Delta} \right)$$
$$\rho(z) = \frac{z^{\Delta}}{(1 + \sqrt{1 - z})^2}$$

- To see the contradiction, let's assume $\Delta \gg \delta$
- And Taylor expand with $x = z - \frac{1}{2}$
- We can do in the both hand side (since we know the functions)

At order x^3

$$(\delta - 1)(2\delta - 1) = \frac{\sum \Delta^2 C_{\phi\phi\Delta}^2}{\sum C_{\phi\phi\Delta}^2} > \Delta_{min}^2$$

- This is in contradiction: there exists a bound on the dimension of ϵ

Lessons for actual conformal bootstrap

- Repeat with full conformal symmetry

$$O_1(\vec{x}_1)O_2(\vec{x}_2) = \sum_i \frac{C_{12i}}{(\vec{x}_{12}^2)^{\frac{1}{2}(\Delta_1+\Delta_2-\Delta_i)}} C^{\Delta_i, \Delta_-}(\vec{x}_{12}, \partial_{x_2}) O_i(x_2)$$

$$C^{a,b}(\vec{x}_{12}, \partial) = \frac{1}{B(a_+, a_-)} \int_0^1 d\alpha \alpha^{a_+-1} (1-\alpha)^{a_--1} \sum_{m=0} \frac{1}{m!} \frac{1}{(a_+ + 1 - \frac{1}{2}d)_m} \left(-\frac{1}{4} \vec{x}_{12}^2 \alpha (1-\alpha) \vec{\partial}^2 \right)^m e^{\alpha \vec{x}_{12} \vec{\partial}},$$

- Need to know the Taylor expansions of conformal block
→ done by recursion relations

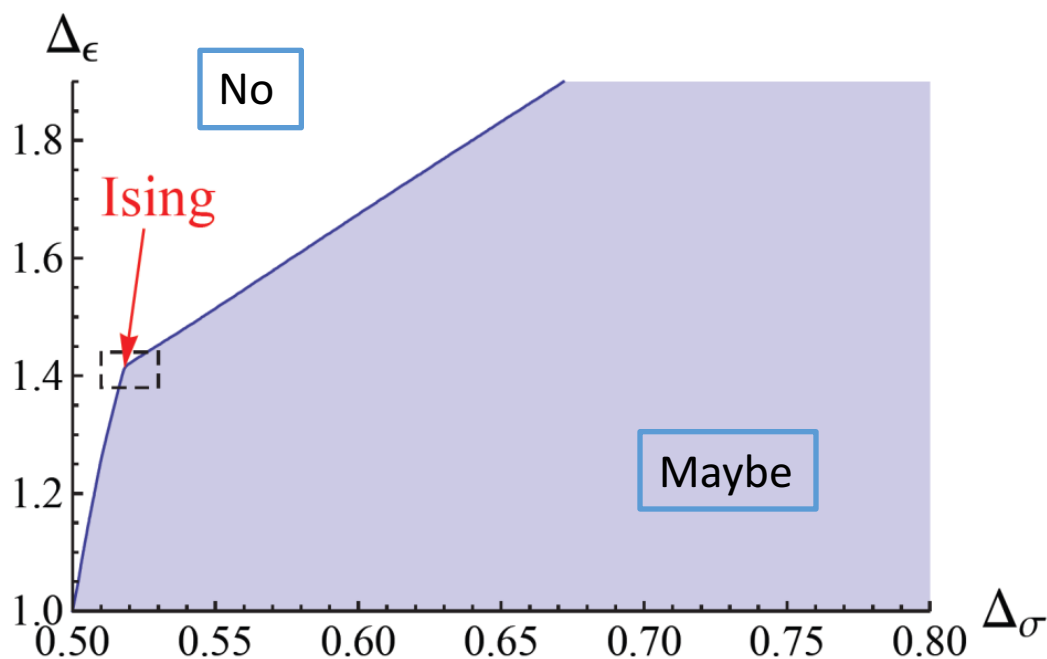
$$1 = \sum_O \lambda_O^2 (f_O(z) - f_O(1-z))$$

- Need to find the linear combinations that show the contradiction → numerical optimization (e.g. SDPB)

- Add more constraint (e.g. from multiple correlators) if necessary

$$\langle \sigma \sigma \sigma \sigma \rangle \quad \langle \epsilon \epsilon \epsilon \epsilon \rangle \quad \langle \epsilon \epsilon \sigma \sigma \rangle \quad \Delta_{\sigma'} > 3 \quad \Delta_{\epsilon'} > 3$$

Ising CFT in d=3 (El-Showk et al)



$$\Delta_\sigma = \frac{3}{1 + \delta}$$

$$\Delta_\epsilon = 3 \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2}$$

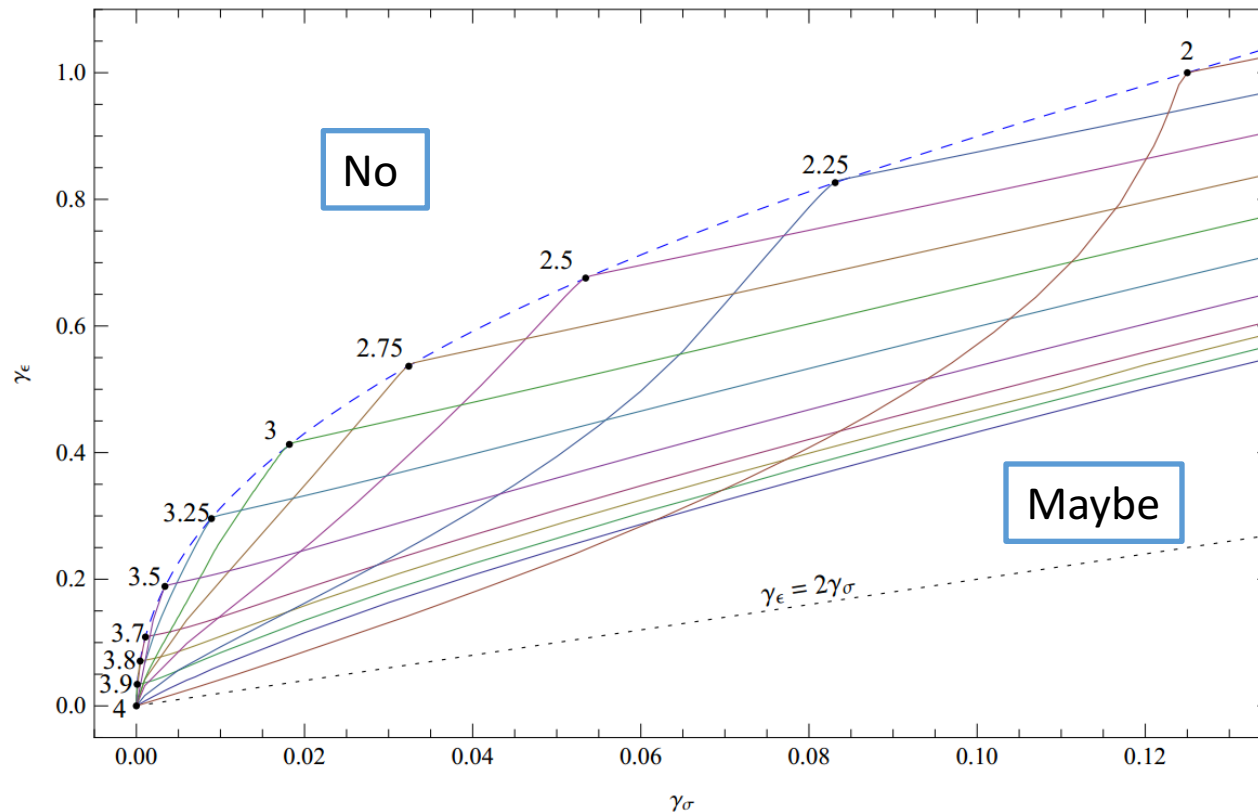
$$C = (T - T_c)^{-\alpha}$$

$$m = (T - T_c)^\beta$$

$$m = h^{1/\delta}$$

Constraints from $\langle \epsilon \epsilon \epsilon \epsilon \rangle$ $\langle \epsilon \epsilon \sigma \sigma \rangle$ do not change the plot

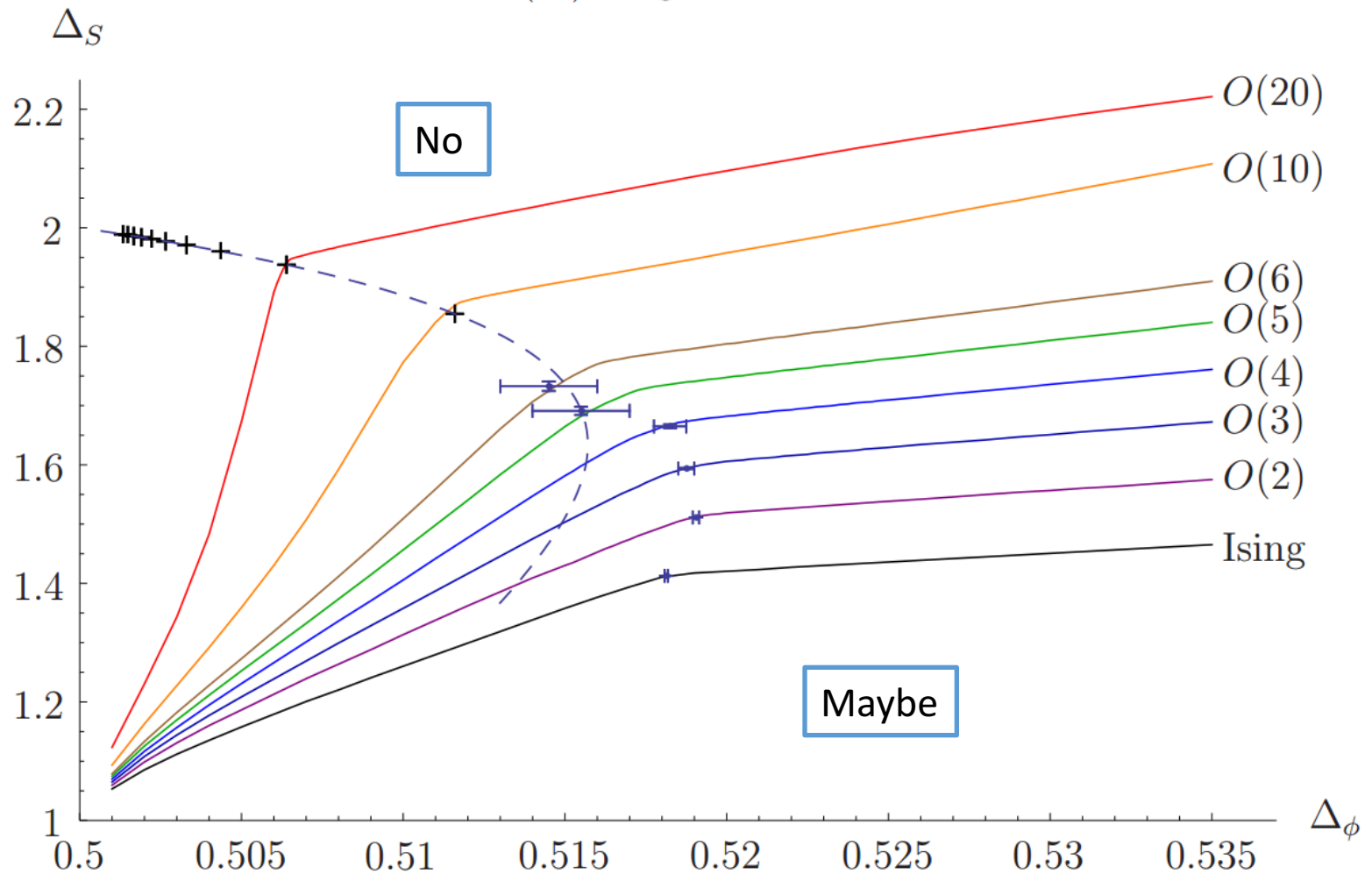
No Ising CFT in d=4 (El-Showk et al)



- Kink disappears in d=4
- Consistent with triviality
- Does not mean CFT does not exist at all. It means we need more data to specify CFTs in d=4

$O(N)$ fixed points in $d=3$ (Kos et al)

$O(N)$ Singlet Bounds

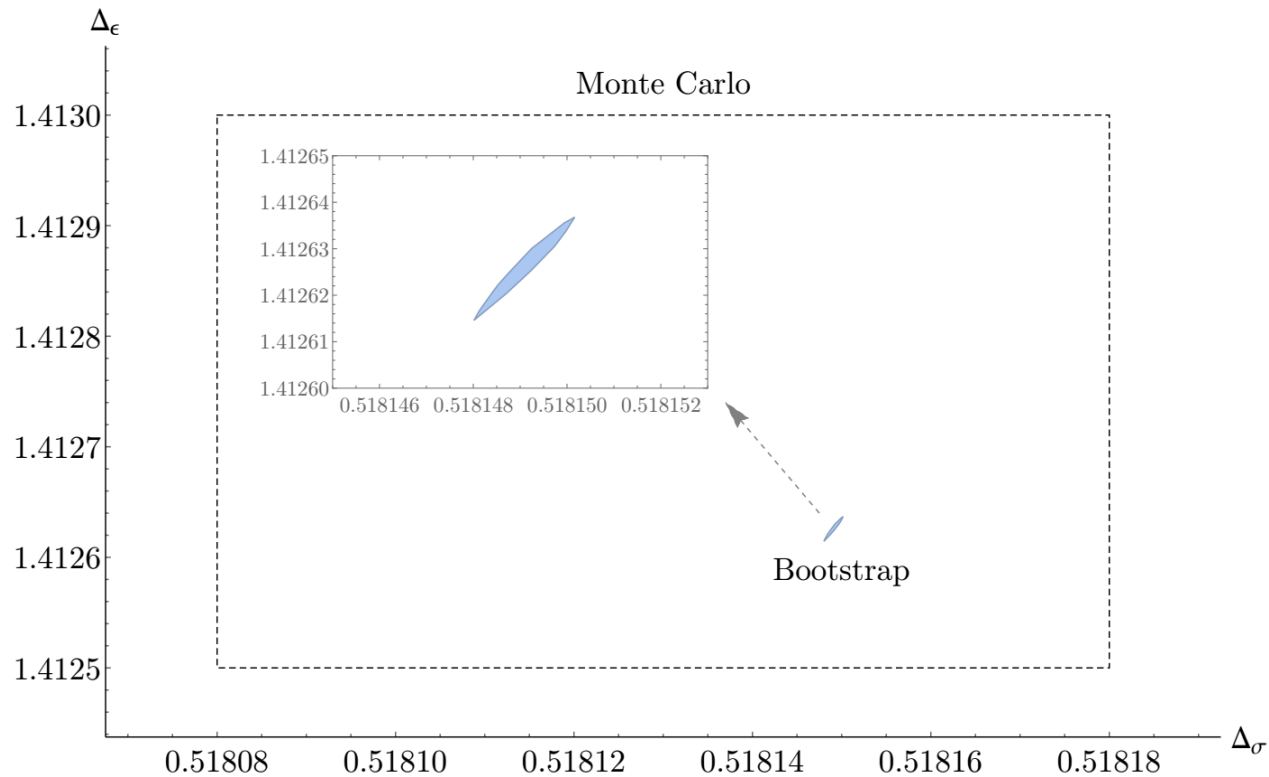


Multi correlator bootstrap with extra assumption (Kos et al.)

$$\langle \sigma \sigma \sigma \sigma \rangle \quad \langle \epsilon \epsilon \sigma \sigma \rangle \quad \langle \epsilon \epsilon \epsilon \epsilon \rangle$$

$$\Delta_{\epsilon'} > 3 \quad \Delta_{\sigma'} > 3$$

Ising: Scaling Dimensions



Universality is “proven” under conformal hypothesis

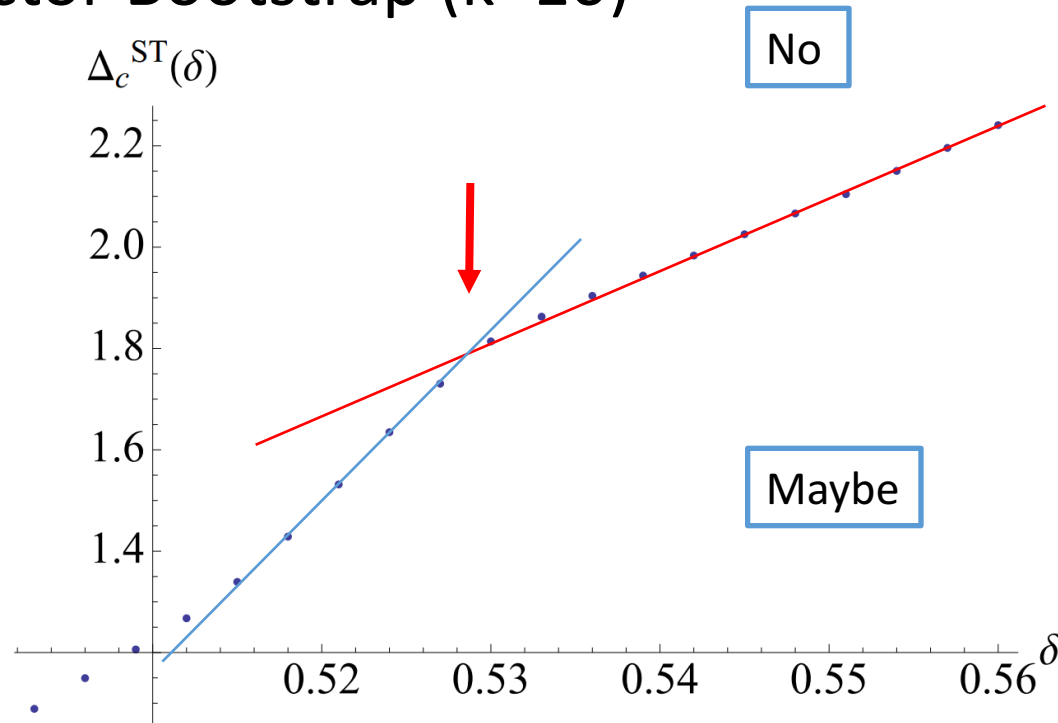
What to expect in conformal bootstrap?

- When the conformal fixed point with a given symmetry exists, then the bound shows characteristic features of “kink”
- When such CFTs do not exist (or characterization is not enough), it shows no interesting behavior
- **Hypothesis**: non-trivial behavior of the bound indicates conformal fixed point
- With more information on CFT, one may specify it(?)

Bootstrapping QCD

$O(4) \times O(2)$ chiral fixed point

- ST sector Bootstrap (k=10)

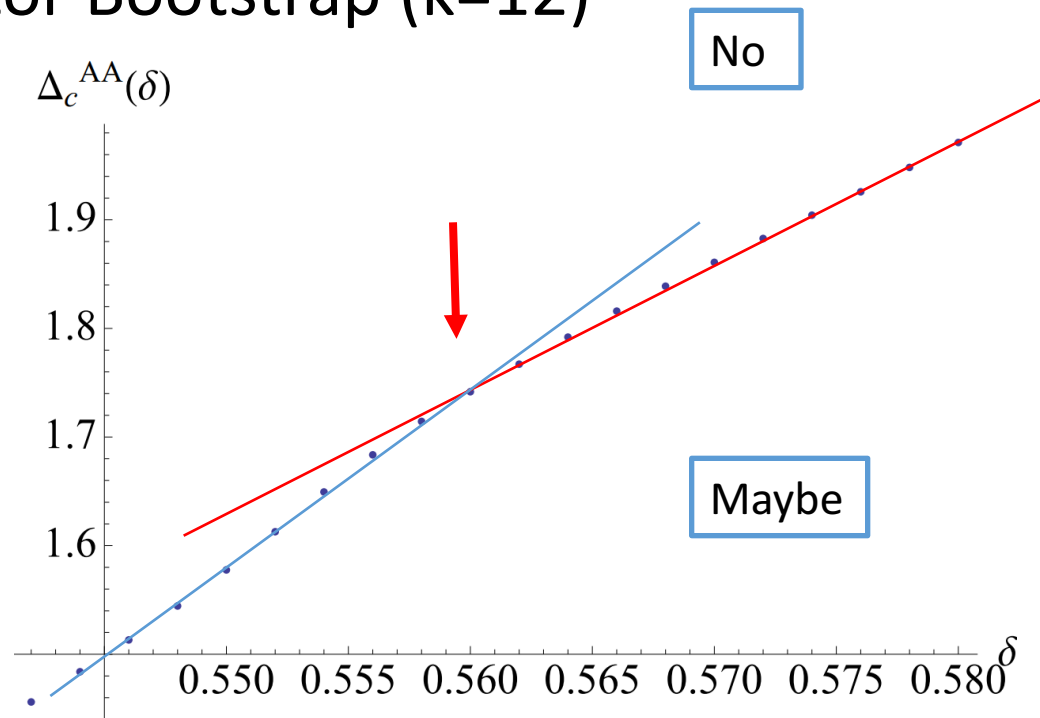


	Δ_ϕ	Δ_{SS}	Δ_{ST}	Δ_{TS}	Δ_{TT}	Δ_{AA}
bootstrap	0.530(3)	1.35(4)	1.80(6)	1.31(2)	1.085(3)	0.90(1)
MS	0.536(5)	1.44(10)	1.83(8)	1.35(3)	1.06(10)	0.83(10)
MZM	0.533(3)	1.04(12)	1.94(7)	1.36(5)	0.96(20)	0.71(8)

Chiral fixed point → importance in frustrated spin systems

$O(4) \times O(2)$ collinear fixed point

- AA sector Bootstrap (k=12)



	Δ_ϕ	Δ_{SS}	Δ_{ST}	Δ_{TS}	Δ_{TT}	Δ_{AA}
bootstrap	0.558(4)	1.52(5)	0.82(2)	1.045(3)	1.26(1)	1.71(6)
$\overline{MS}$	0.56(3)	1.68(17)	1.0(3)	1.10(15)	1.35(10)	1.9(1)
MZM	0.56(1)	1.59(14)	0.95(15)	1.25(10)	1.34(5)	1.90(15)

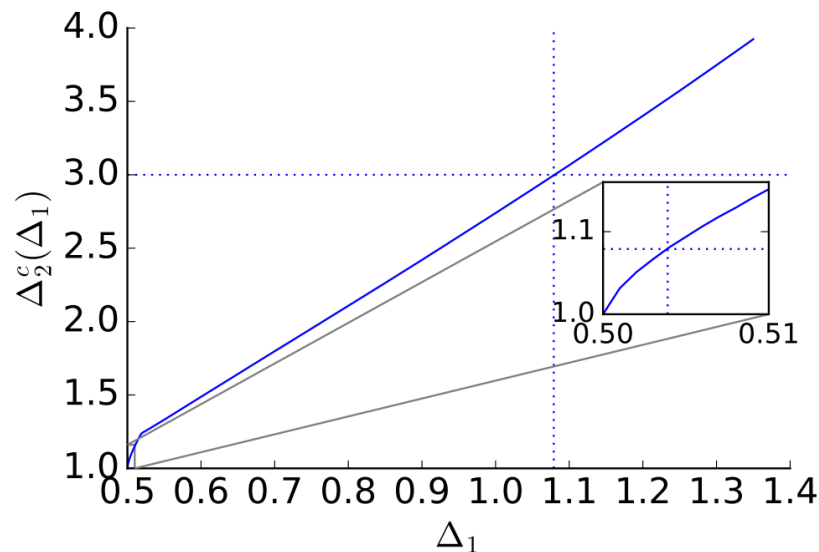
Collinear fixed points $\rightarrow$ 2nd order phase transition in QCD

Bootstrap suggestion

- If you believe **kink = CFT**, then we have found **two** non-trivial fixed points in $O(4) \times O(2)$ LG theory
- The spectrum seems to agree with particular resummation of 5/6 loop computations (but may not agree with function RG or other resummation)
- Is this important in QCD?

The $Z_2 \rightarrow U(1)$ enhancement?

- The argument by Aoki et al (even if true) only says that we have Z_2 symmetry enhancement
- Is this enough to make the $O(4) \times O(2)$ fixed point (that we found) stable?
- This can be answered by bootstrap again



- The would-be fixed point is **unstable** under charge 2 operators that **cannot be forbidden only with Z_2**

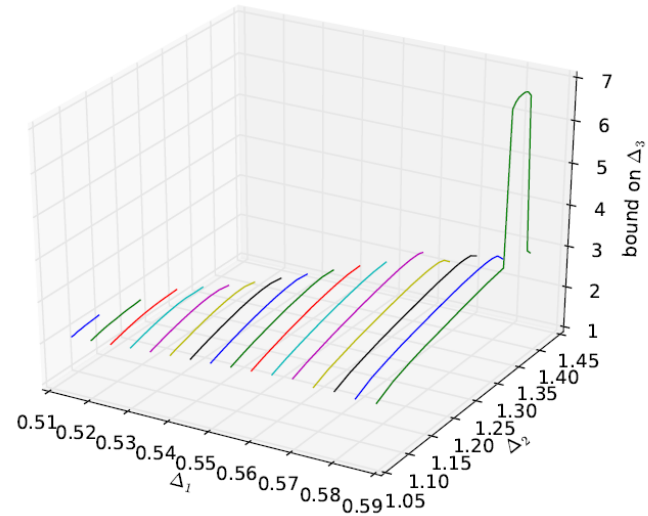
More things to be discussed

- We can give a necessary conditions for accidental symmetry enhancement

(A) Z2 symmetry $\rightarrow$ U(1)
 $\Delta_1 > 1.08$

(B) Z3 symmetry $\rightarrow$ U(1)
 $\Delta_1 > 0.580$

(C) Z4 symmetry $\rightarrow$ U(1)
 $\Delta_1 > 0.504$



- There exist many papers (e.g. in PRL) violating these bounds in VBS-Neel quantum criticality
- “non-perturbative” does not mean anything can happen!