

異常輸送現象を含む 非散逸性流体力学の 幾何学的定式化

本郷 優

東京大学理学系研究科 物理学専攻

共同研究者：日高 義将

2015 9/2 京都大学 熱場の量子論とその応用



Outline

Motivation:

異常輸送現象と非散逸流体？

Approach:

場の量子論 for **局所ギブス分布**
(**熱的多脚場・対称性の活用**)

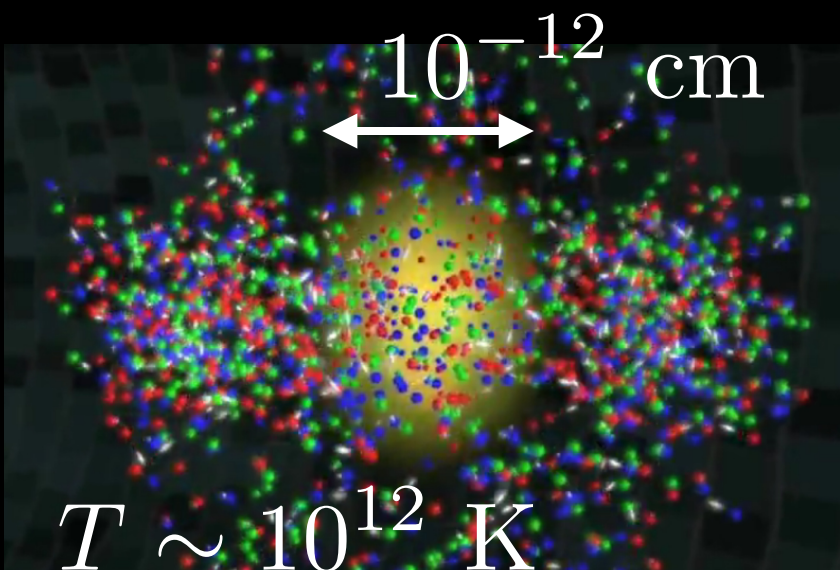
Result:

異常輸送現象の導出

流体力学による時間発展の記述

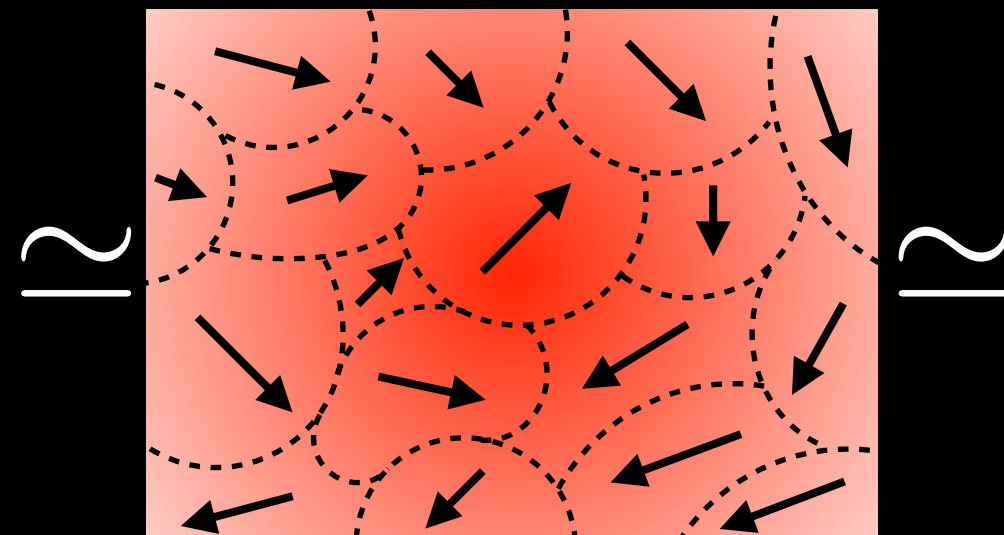
- ・ 系の詳細によらない, **ユニバーサル**な記述を行う
- ・ **マクロなダイナミクス**を記述する**有効理論**
- ・ **保存量のみ**に注目 ~ 系の~~**対称性のみ**~~に注目

クォーク・グルーオンプラズマ

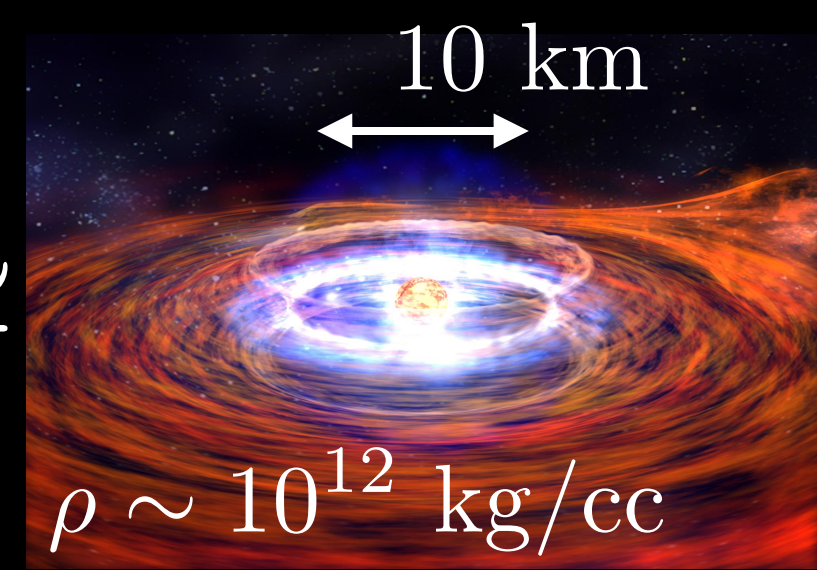


<http://www.bnl.gov/rhic/news2/news.asp?a=1403&t=pr>

流体力学 $\{\beta(x), \vec{v}(x)\}$



中性子星 (マグネター)

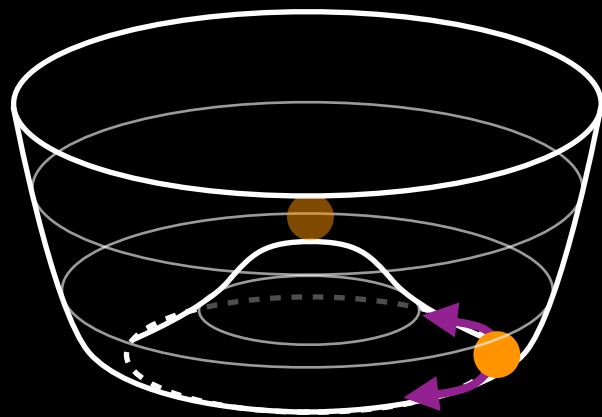


<http://newsoffice.mjitugenn.edu/2012/model-bursting-star-0302>

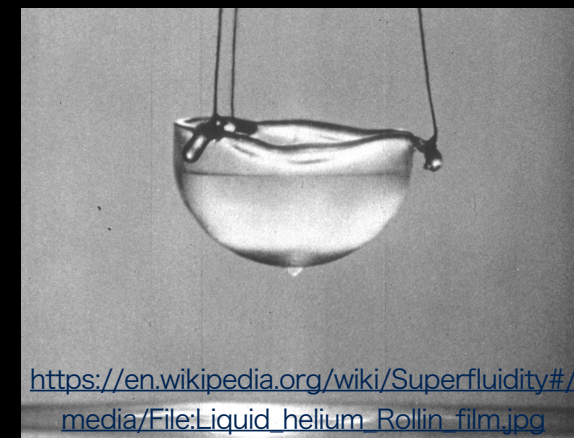
対称性の破れと流体力学

• 自発的な対称性の破れ

ミクロな現れ：真空の選択

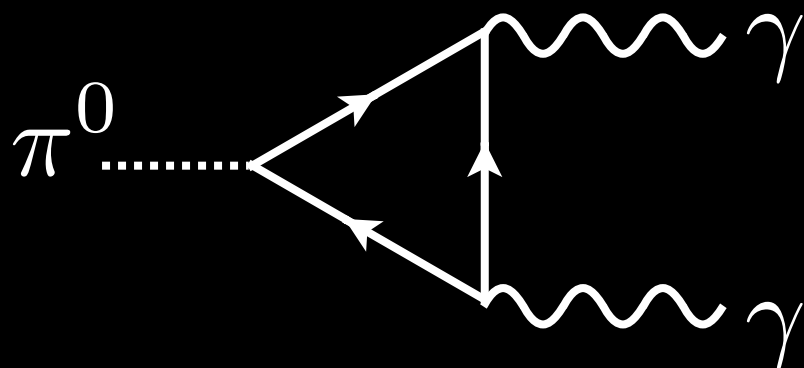


マクロな現れ：超流動



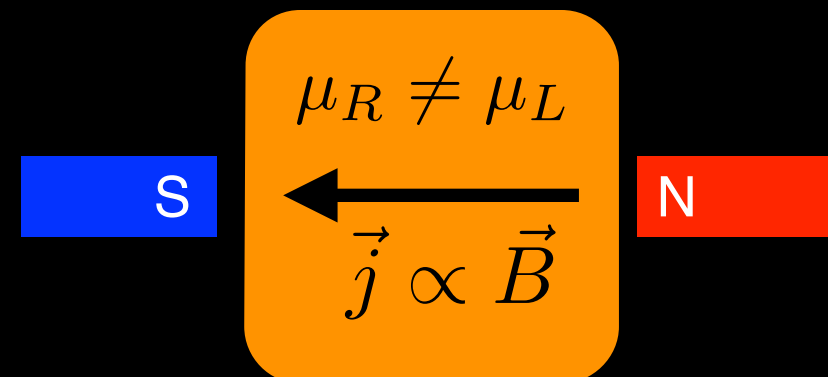
• 量子異常による対称性の破れ

ミクロな現れ： π^0 崩壊



(Adller 1969, Bell-Jackiw 1969)

マクロな現れ：カイラル異常輸送



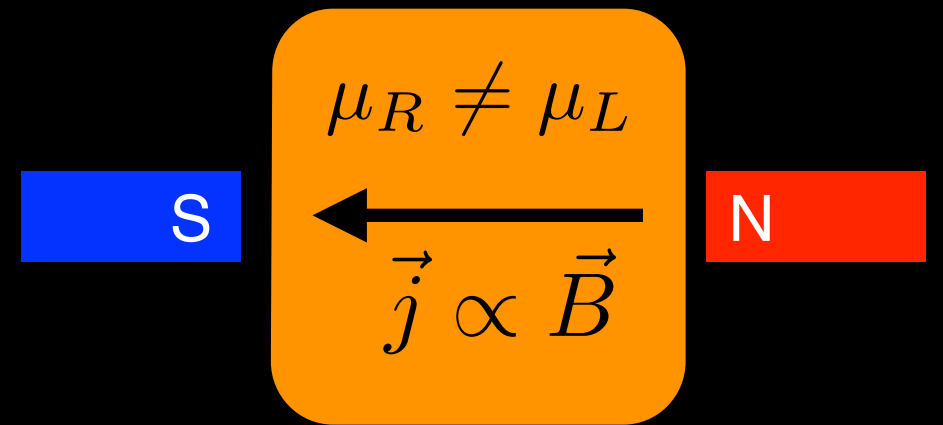
(Erdmenger et al. 2008, Son-Surowka 2009)

異常輸送現象：パリティを破る応答

◆ カイラル磁気効果 (CME)

(Fukushima et al.2008, Vilenkin 1980)

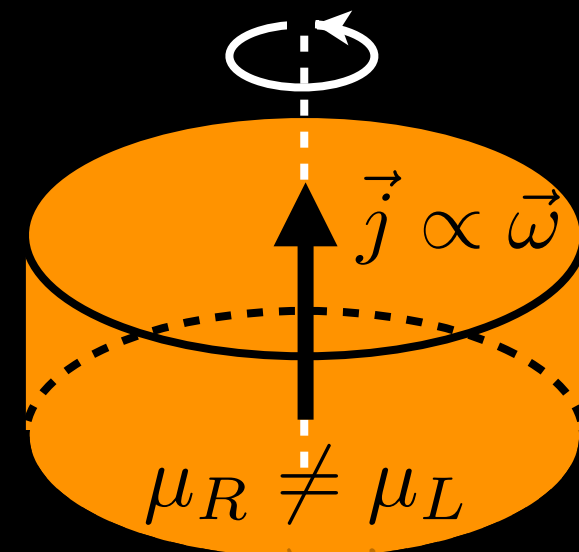
$$\vec{j} = \frac{e\mu_5}{2\pi^2} \vec{B}$$



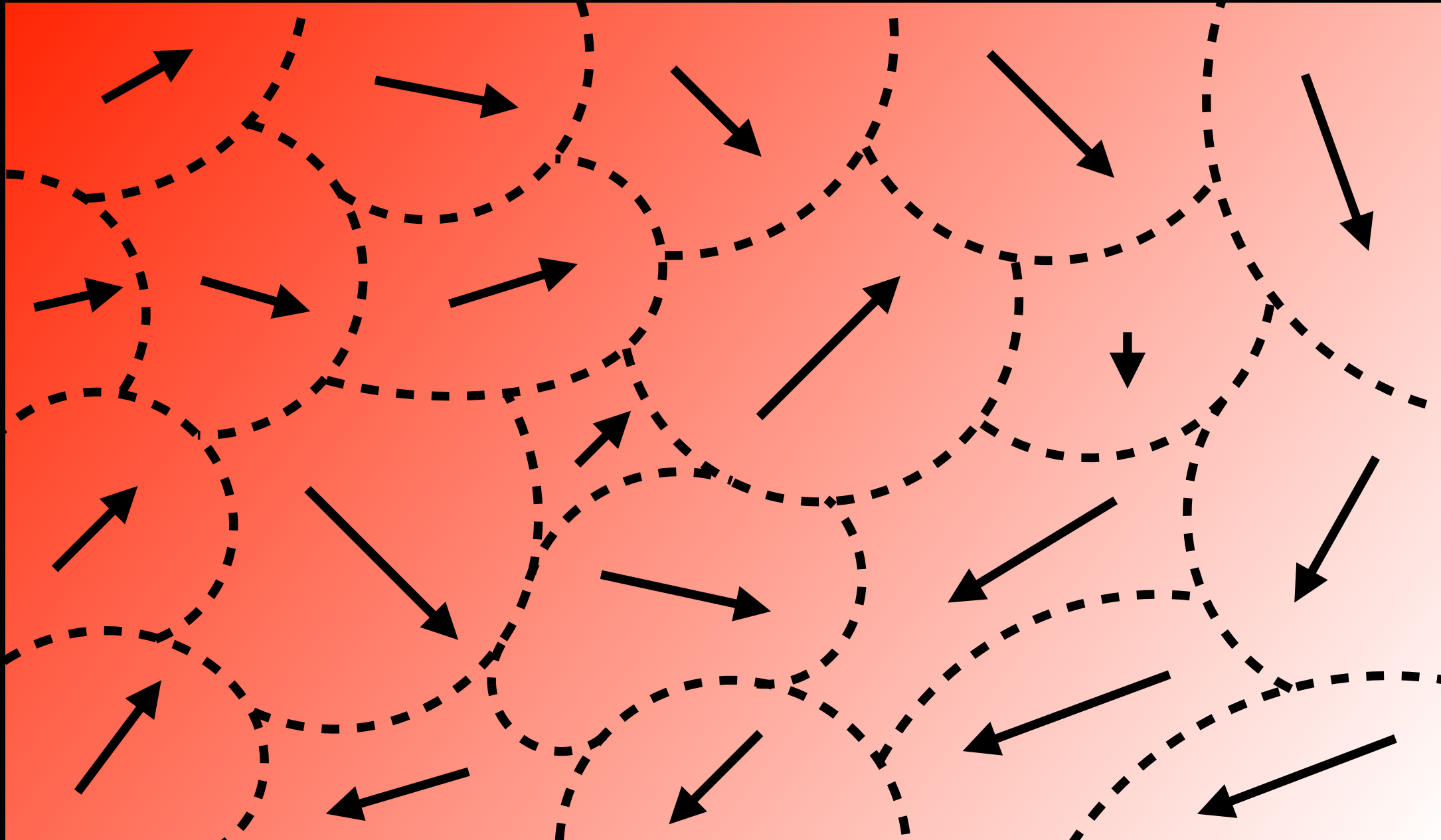
◆ カイラル渦効果 (CVE)

(Erdmenger et al. 2008, Son-Surowka 2009)

$$\vec{j} = \frac{\mu\mu_5}{2\pi^2} \vec{\omega}$$



非散逸流体力学 = 局所熱平衡系



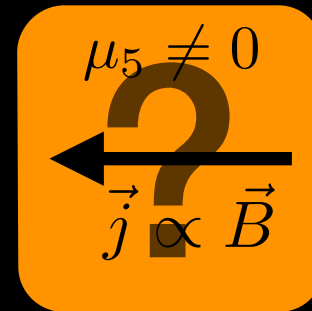
その時刻の**局所温度・局所速度場...のみ**によって定まる分布！

Outline

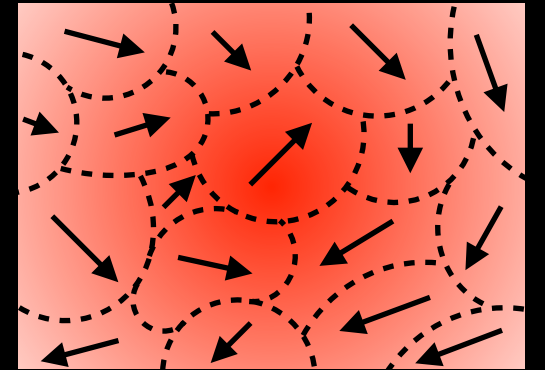
Motivation:

異常輸送現象と非散逸流体？

S

$$\mu_5 \neq 0$$

$$\vec{j} \propto \vec{B}$$

N



Approach:

場の量子論 for 局所ギブス分布
(熱的多脚場・対称性の活用)

Result:

異常輸送現象の導出

局所熱平衡系の記述法

$$T = \text{const.}$$

熱力学 (大局熱平衡)

ギブス分布:

$$\hat{\rho}_G = e^{-\beta \hat{H} - \Psi[\beta]}, \quad \Psi[\beta] \equiv \log \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}$$

Localize

T_{high}

$$T = T(x)$$

T_{low}

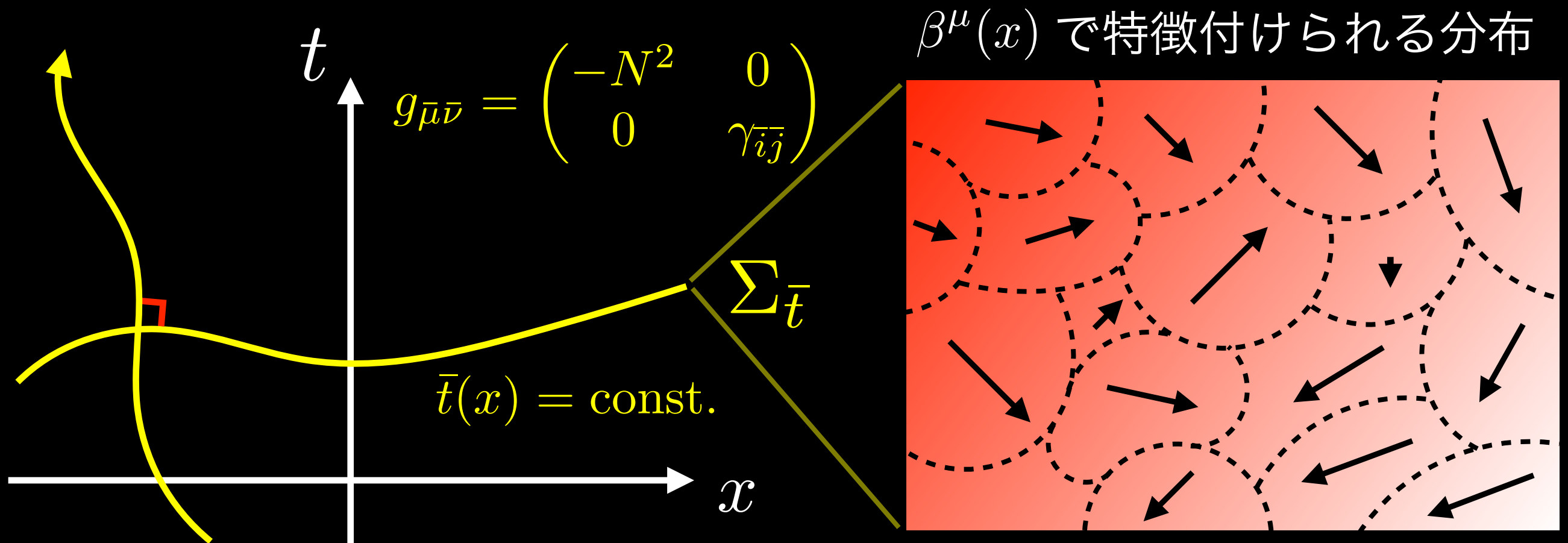
局所熱力学 (局所熱平衡)

局所ギブス分布(LG):

$$\hat{\rho}_{LG} = e^{-\hat{K} - \Psi[\beta^\mu(x), \nu(x)]}$$

$$\hat{K} = - \int d^3x \left(\beta^\mu(\mathbf{x}) \hat{T}^0_\mu(\mathbf{x}) + \nu(\mathbf{x}) \hat{J}^0(\mathbf{x}) \right)$$

超曲面上の熱力学ポテンシャル



Massieu-Planck functional

$$\Psi[\bar{t}; \lambda] \equiv \log \text{Tr} \exp \left[\int d\Sigma_{\bar{t}\nu} \left(\beta^\mu(x) \hat{T}^\nu_{\mu}(x) + \nu(x) \hat{J}^\nu(x) \right) \right]$$

$$= \log \text{Tr} \exp \left[- \int d^3 \bar{x} \sqrt{-g} \left(\beta^{\bar{\mu}}(\bar{x}) \hat{T}^{\bar{0}}_{\bar{\mu}}(\bar{x}) + \nu(\bar{x}) \hat{J}^{\bar{0}}(\bar{x}) \right) \right]$$

フェルミオン系のEMテンソル問題

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\bar{\psi} \left(e_{\nu}^{\bar{\mu}} \gamma^{\nu} \vec{D}_{\bar{\mu}} - \overleftarrow{D}_{\bar{\mu}} \gamma^{\nu} e_{\nu}^{\bar{\mu}} \right) - m\bar{\psi}\psi$$

正準エネルギー・運動量テンソル

$$\Theta^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}} = -\delta^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}} \mathcal{L} - \frac{1}{2}\bar{\psi} (\gamma^{\bar{\mu}} \vec{D}_{\bar{\nu}} - \overleftarrow{D}_{\bar{\nu}} \gamma^{\bar{\mu}}) \psi$$

対称エネルギー・運動量テンソル

$$T^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}} = -\delta^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}} \mathcal{L} - \frac{1}{4}\bar{\psi} (\gamma^{\bar{\mu}} \vec{D}_{\bar{\nu}} + \gamma_{\bar{\nu}} \vec{D}^{\bar{\mu}} - \overleftarrow{D}_{\bar{\nu}} \gamma^{\bar{\mu}} - \overleftarrow{D}^{\bar{\mu}} \gamma_{\bar{\nu}}) \psi$$

➡ 局所ギブス分布で採用するのはどちらにするべきか？

対称エネルギー・運動量テンソル？

対称エネルギー・運動量テンソル

$$T^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}} = -\delta^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}} \mathcal{L} - \frac{1}{4} \bar{\psi} (\gamma^{\bar{\mu}} \overrightarrow{D}_{\bar{\nu}} + \gamma_{\bar{\nu}} \overrightarrow{D}^{\bar{\mu}} - \overleftarrow{D}_{\bar{\nu}} \gamma^{\bar{\mu}} - \overleftarrow{D}^{\bar{\mu}} \gamma_{\bar{\nu}}) \psi$$



採用したい理由

- ① **局所ギブス分布 = 独立な保存量のみ**を肩に乗せよう！
(対称じゃない場合は，角運動量が独立でなくなる...)
- ② 流体力学に現れる**マクロなEMテンソルは対称**なはず！



採用したくない理由

経路積分したときに，**Actionに戻らなそう**...

EMテンソルの分解と虚時間スピン接続

注目点：正準エネルギー・運動量テンソル $\Theta^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}}$ は戻りそう！
(虚時間の微分はただの偏微分になりそう...?)

➡ Actionに戻る部分と戻らない部分に分けてみる

$$T^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}} = \frac{1}{2}(\Theta^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}} + \Theta^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}}) = \overset{\text{戻る部分}}{\Theta^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}}} - \overset{\text{戻らない部分}}{\frac{1}{2}(\Theta^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}} - \Theta^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}})}$$

$$= \Theta^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}} + \frac{i}{4} D_{\bar{\rho}}(\bar{\psi}\{\gamma^{\bar{\mu}}, \Sigma_{\bar{\nu}}^{\bar{\rho}}\}\psi)$$



虚時間方向のスピン接続になり，正しく **Euclidean Action** に！

熱的多脚場による熱力学関数の記述

経路積分の結果

$$\begin{aligned}\Psi[\bar{t}; \lambda] &\equiv \log \text{Tr} \exp \left[\int d\Sigma_{\bar{t}\nu} \left(\beta^\mu(x) \hat{T}^\nu{}_\mu(x) + \nu(x) \hat{J}^\nu(x) \right) \right] \\ &= \log \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp (S[\psi, \bar{\psi}, \tilde{e}])\end{aligned}$$

熱的多脚場： $\tilde{e}_{\bar{0}}{}^\mu = e^\sigma u^\mu$, $\tilde{e}_{\bar{i}}{}^\mu = e_{\bar{i}}{}^\mu$ ($e^\sigma \equiv \beta(x)/\beta_0$)

結果が意味するところ

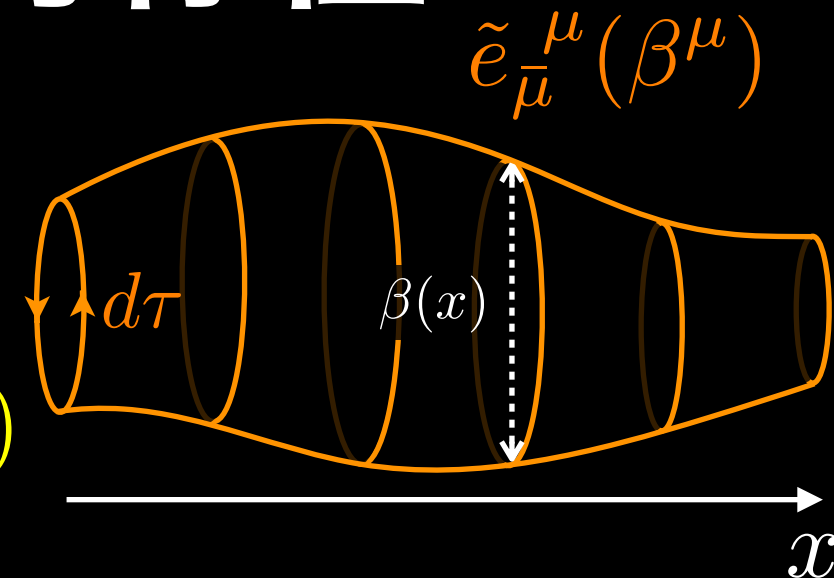
$$\begin{aligned}ds^2 &= \tilde{e}_{\bar{\mu}}{}^\mu \tilde{e}_{\bar{\nu}}{}^\nu g_{\mu\nu} dx^{\bar{\mu}} dx^{\bar{\nu}} = -e^{2\sigma} (d\tilde{t} + a_{\bar{i}} dx^{\bar{i}})^2 + \gamma'_{\bar{i}\bar{j}} dx^{\bar{i}} dx^{\bar{j}} \\ &\quad (a_{\bar{i}} \equiv e^{-\sigma} u_{\bar{i}}, \quad \gamma'_{\bar{i}\bar{j}} \equiv \gamma_{\bar{i}\bar{j}} + u_{\bar{i}} u_{\bar{j}}, \quad d\tilde{t} = -i d\tau)\end{aligned}$$

という「**曲がった時空**」上の場の理論として記述

曲がった”時空”の対称性

$$ds^2 = -e^{2\sigma} (d\tilde{t} + a_{\bar{i}} d\bar{x}^{\bar{i}})^2 + \gamma'_{\bar{i}\bar{j}} d\bar{x}^{\bar{i}} d\bar{x}^{\bar{j}}$$

$$(a_{\bar{i}} \equiv -e^{-\sigma} u_{\bar{i}}, \gamma'_{\bar{i}\bar{j}} \equiv \gamma_{\bar{i}\bar{j}} + u_{\bar{i}} u_{\bar{j}}, d\tilde{t} \equiv -i d\tau)$$



“時空”の持つ対称性

(1) 空間座標の貼り換え：

空間座標を勝手に貼り換えても物理は変わらない！

(2) 虚時間並進 & Kaluza-Klein：

(温度などの)パラメータ λ は虚時間に依存しない！

分配関数法

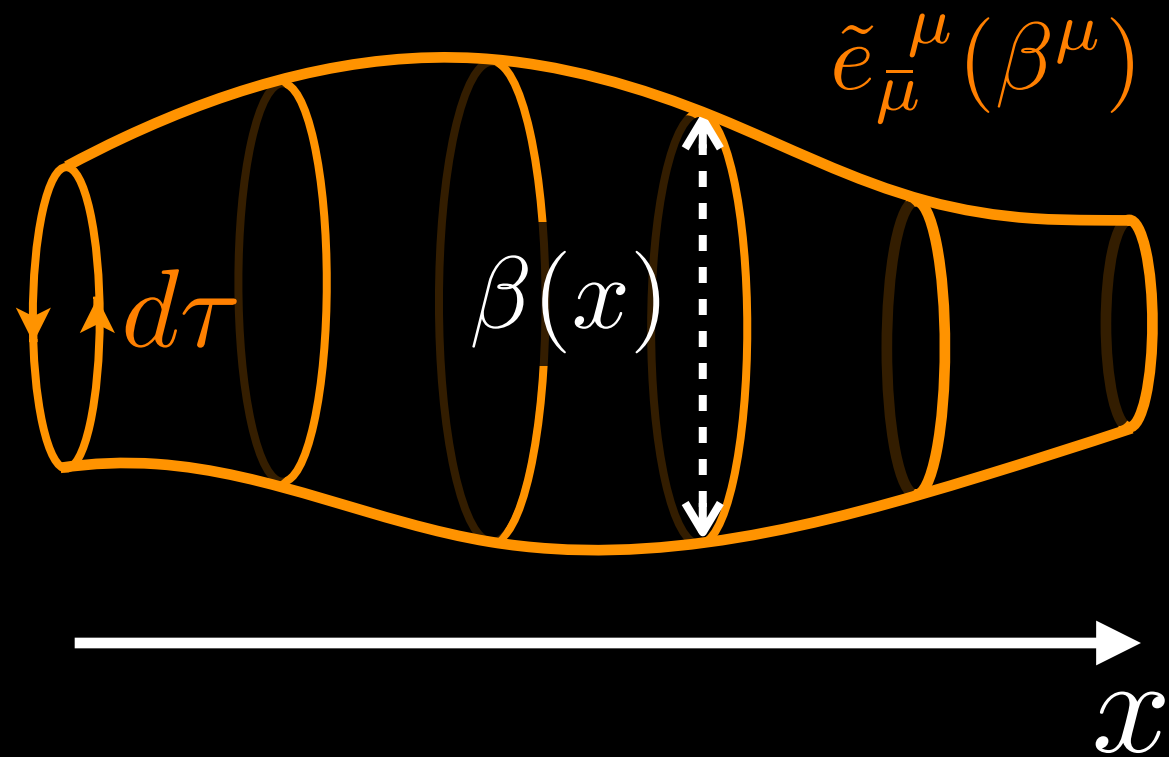
Banerjee et al.(2012), Jensen et al.(2012)

$$\Psi[\beta^{\mu}, \nu] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi, \tilde{g}]}$$

はこれらの対称性をrespectする！

“時空”の対称性: Kaluza-Klein対称性

$$ds^2 = -e^{2\sigma} (d\tilde{t} + a_{\bar{i}} d\bar{x}^{\bar{i}})^2 + \gamma'_{\bar{i}\bar{j}} d\bar{x}^{\bar{i}} d\bar{x}^{\bar{j}}$$



パラメータ λ は**虚時間** τ に依存しない!

“Kaluza-Klein” gauge tr.

$$\begin{cases} \bar{t} \rightarrow \bar{t} + \chi(\bar{x}) \\ \bar{x} \rightarrow \bar{x} \\ a_{\bar{i}}(\bar{x}) \rightarrow a_{\bar{i}}(\bar{x}) - \partial_{\bar{i}}\chi(\bar{x}) \end{cases}$$

$$\Psi[\beta^{\mu}] = \log \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{S[\psi, \bar{\psi}, \tilde{e}]} \ni$$

$$(f_{\bar{i}\bar{j}} \equiv \partial_{\bar{i}} a_{\bar{j}} - \partial_{\bar{j}} a_{\bar{i}})$$



$$f^{\bar{i}\bar{j}} f_{\bar{i}\bar{j}}, \dots$$

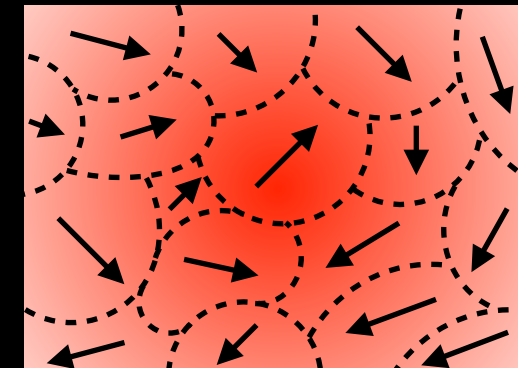
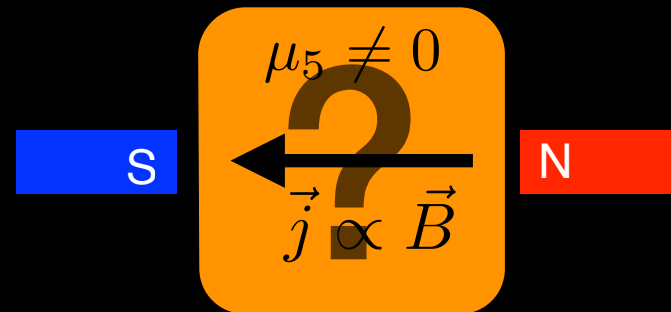


$$a_{\bar{i}}, a_{\bar{i}} a^{\bar{i}}, \dots$$

Outline

Motivation:

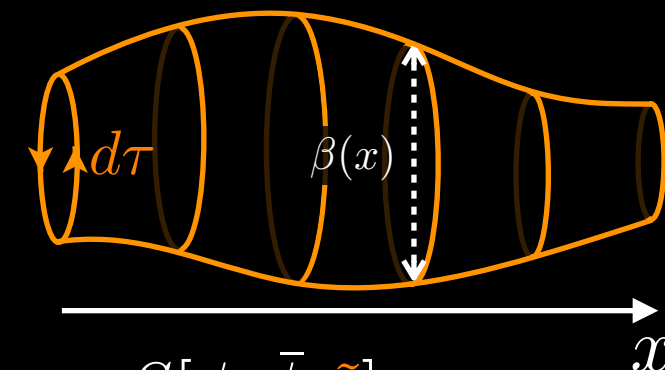
異常輸送現象と非散逸流体？



Approach:

場の量子論 for 局所ギブス分布
(熱的多脚場・対称性の活用)

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}(\beta, \vec{v})$$



曲がった"時空"中のQFT: $\Psi[\beta^\mu] = \log \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{S[\psi, \bar{\psi}, \tilde{e}]}$

$$ds^2 = -e^{2\sigma} (d\tilde{t} + a_{\bar{i}}) dx^{\bar{i}} + \gamma'_{\bar{i}\bar{j}} dx^{\bar{i}} dx^{\bar{j}}$$

Result:

異常輸送現象の導出

非散逸流体の有効理論のレシピ

$$\Psi[\beta^\mu] = \log \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{S[\psi, \bar{\psi}, \tilde{e}]} = \Psi^{(0)}[\beta^\mu] + \Psi^{(1)}[\beta^\mu, \partial]$$

- Building blocks: $\{e^\sigma, a_{\bar{i}}, \mu, A_{\bar{i}}\}$
- 対称性: Spatial diffeo, Kaluza-Klein, ゲージ対称性
- Power Counting: 外場()は弱く, 微分は高次とする

$$\mathcal{O}(p^0):$$

$$\mathcal{O}(p^1):$$

異常輸送係数の導出

① Wess-Zuminoの無矛盾性条件を使う

Jensen et al.(2012)

4次元のアノマリーの係数 ← 6次元のアノマリー

② 外場中の熱力学関数を評価する

Fukushima et al.(2008)

Landsteiner et al.(2011)

4次元のアノマリーの係数 ← 6次元のアノマリー

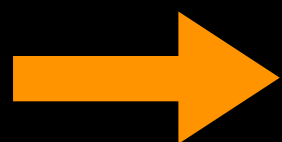
$\psi^{(1)}$ の計算：Weyl fermion

$$\mathcal{L} = -\eta^\dagger \sigma^\mu D_\mu \eta$$

Vilenkin (1978,1980)

Fukushima, Kharzeev, Warringa (2008)

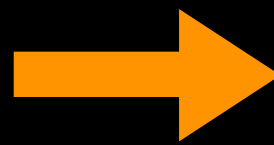
$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p) &= \int_0^\beta d\tau \int d^3x e^{ip \cdot x} \langle T_\tau J^\mu(\tau, \mathbf{x}) J^\nu(0, \mathbf{0}) \rangle = \text{Diagram} \\ &= (-1)T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{tr} \left[(-i\tilde{k} - i\tilde{p}) i\sigma^\mu (-i\tilde{k}) i\sigma^\nu \right]}{(\tilde{k} + p)^2 \tilde{k}^2} \\ &\simeq -i\epsilon^{\mu\rho\nu 0} p_\rho \frac{\mu_L}{8\pi^2} \end{aligned}$$

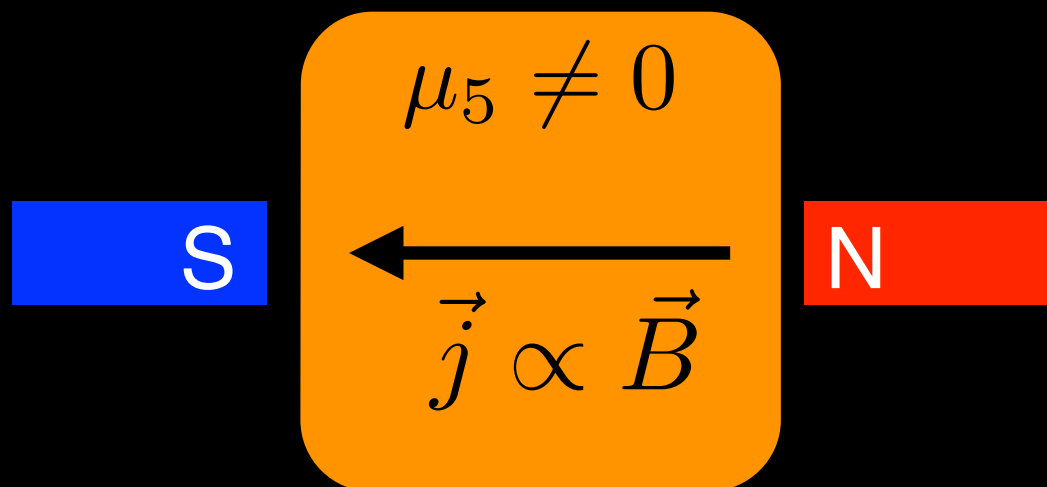


$$\Psi_{\text{EM}}^{(1)} = \frac{\mu_L}{8\pi^2} \epsilon^{ijk} A_i \partial_j A_k$$

Chiral Magnetic Effect

$$\Psi_{\text{EM}}^{(1)} = \frac{\mu_L}{8\pi^2} \epsilon^{ijk} A_i \partial_j A_k$$

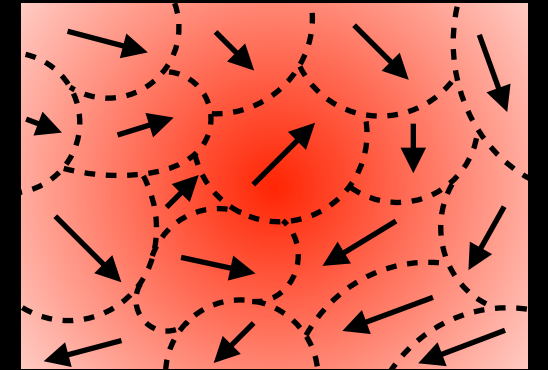
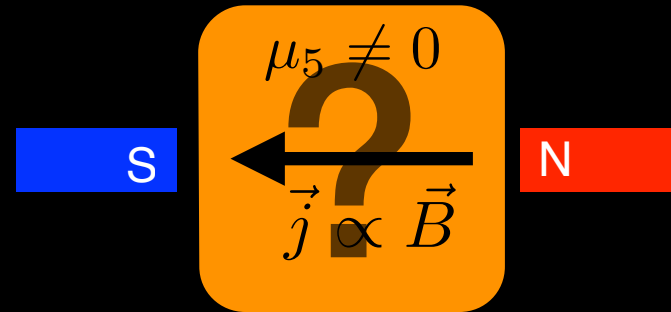

$$J^i = \frac{\delta \Psi}{\delta A_i} = \frac{\mu_L}{4\pi^2} \epsilon^{ijk} \partial_j A_k = \frac{\mu_L}{4\pi^2} B_i$$



まとめ

Motivation:

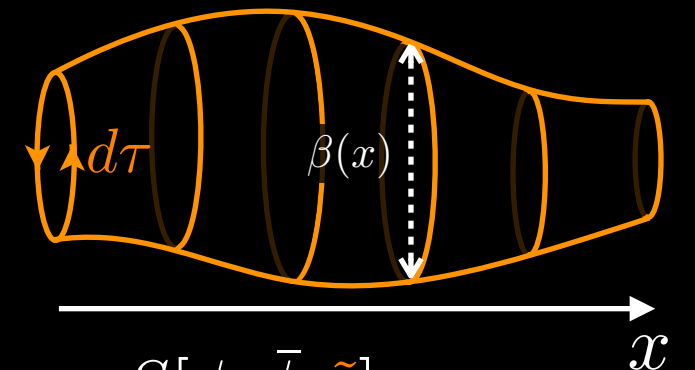
異常輸送現象と非散逸流体？



Approach:

場の量子論 for 局所ギブス分布
 (熱的多脚場・対称性の活用)

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}(\beta, \vec{v})$$



曲がった”時空”中のQFT: $\Psi[\beta^\mu] = \log \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{S[\psi, \bar{\psi}, \tilde{e}]}$

$$ds^2 = -e^{2\sigma} (d\tilde{t} + a_{\bar{i}}) dx^{\bar{i}} + \gamma'_{\bar{i}\bar{j}} dx^{\bar{i}} dx^{\bar{j}}$$

Result:

異常輸送現象の導出

$$\Psi^{(1)} \rightarrow \vec{j} = \frac{e\mu_5}{2\pi^2} \vec{B}$$

Backup

流体力学と曲がった"時空"の幾何学

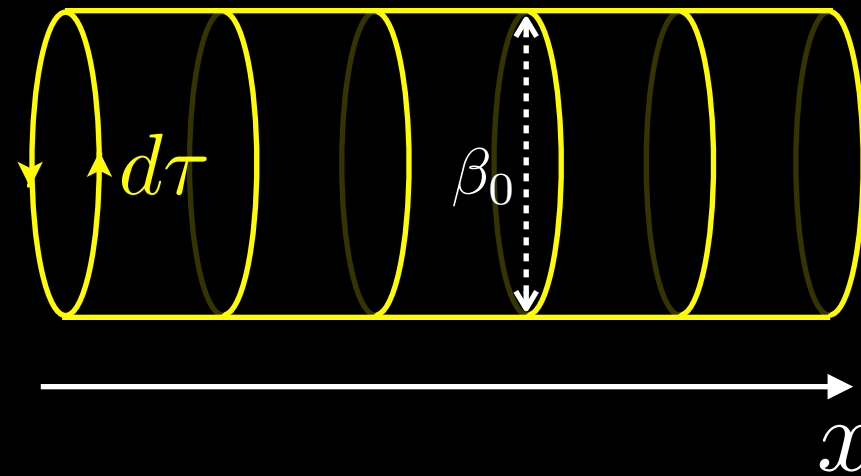
熱力学 β_0

$$T = \text{const.}$$

経路積分

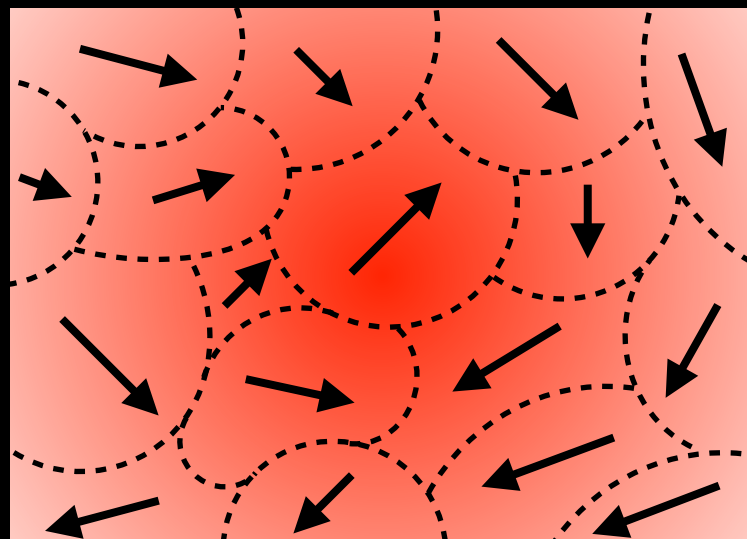
有限温度の場の量子論 = 松原形式

(Matsubara, 1955)



半径 β_0 の
平らな"時空"上
の場の理論

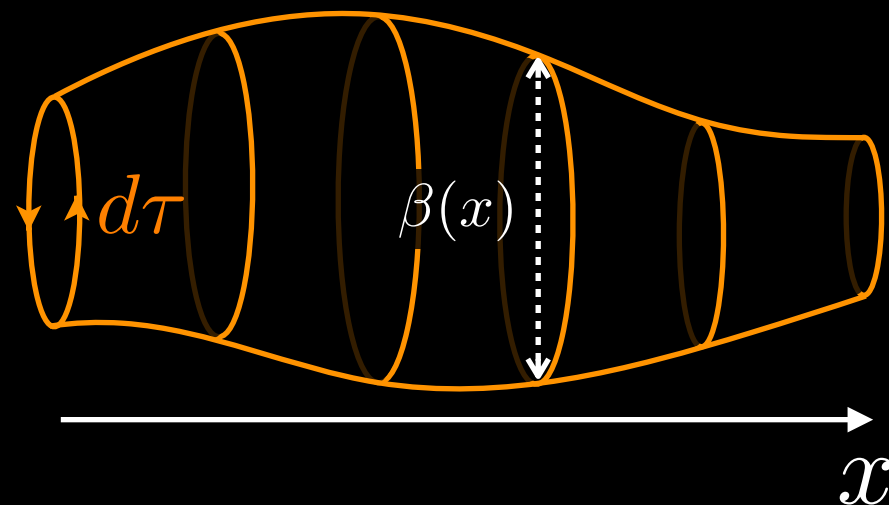
流体力学 $\{\beta(x), \vec{v}(x)\}$



経路積分

局所熱平衡系の場の量子論

[Hayata-Hidaka-MH-Noumi '15]

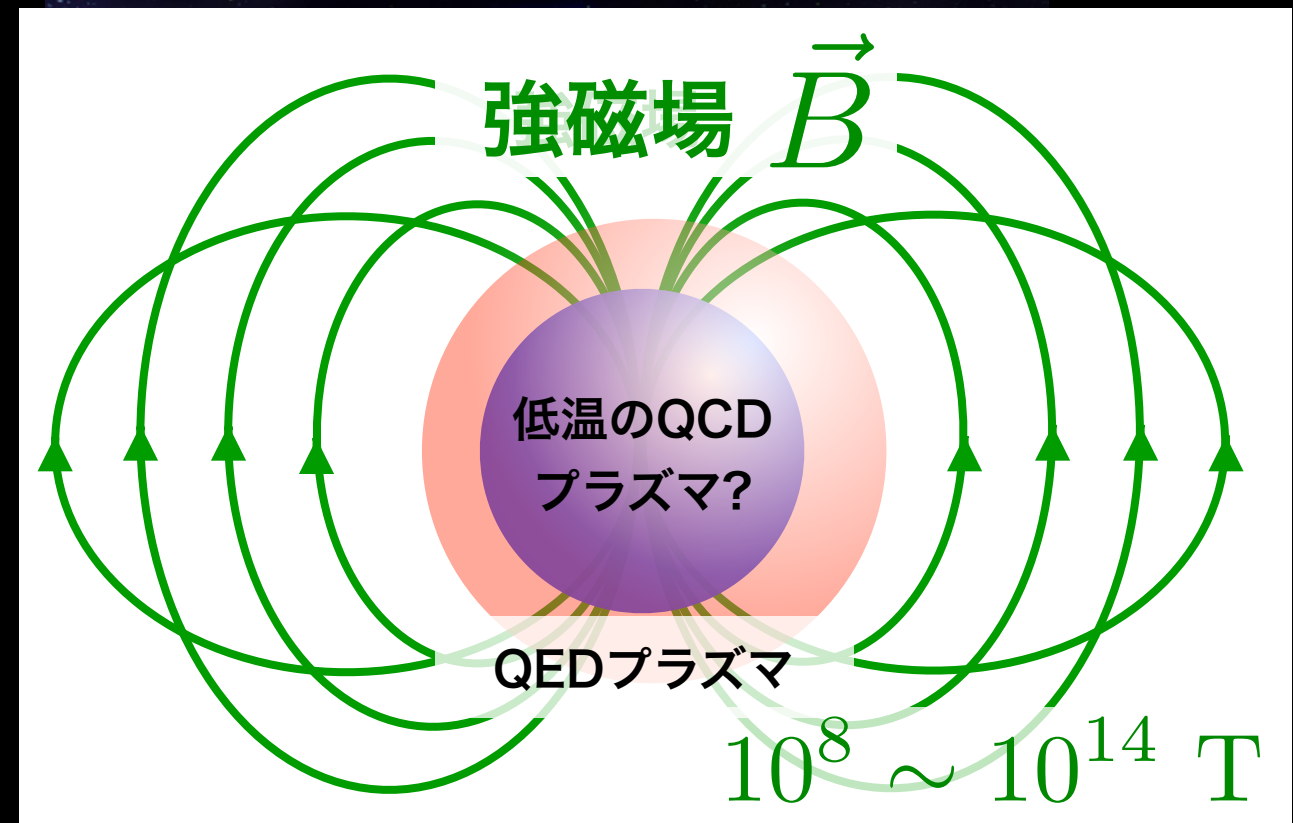
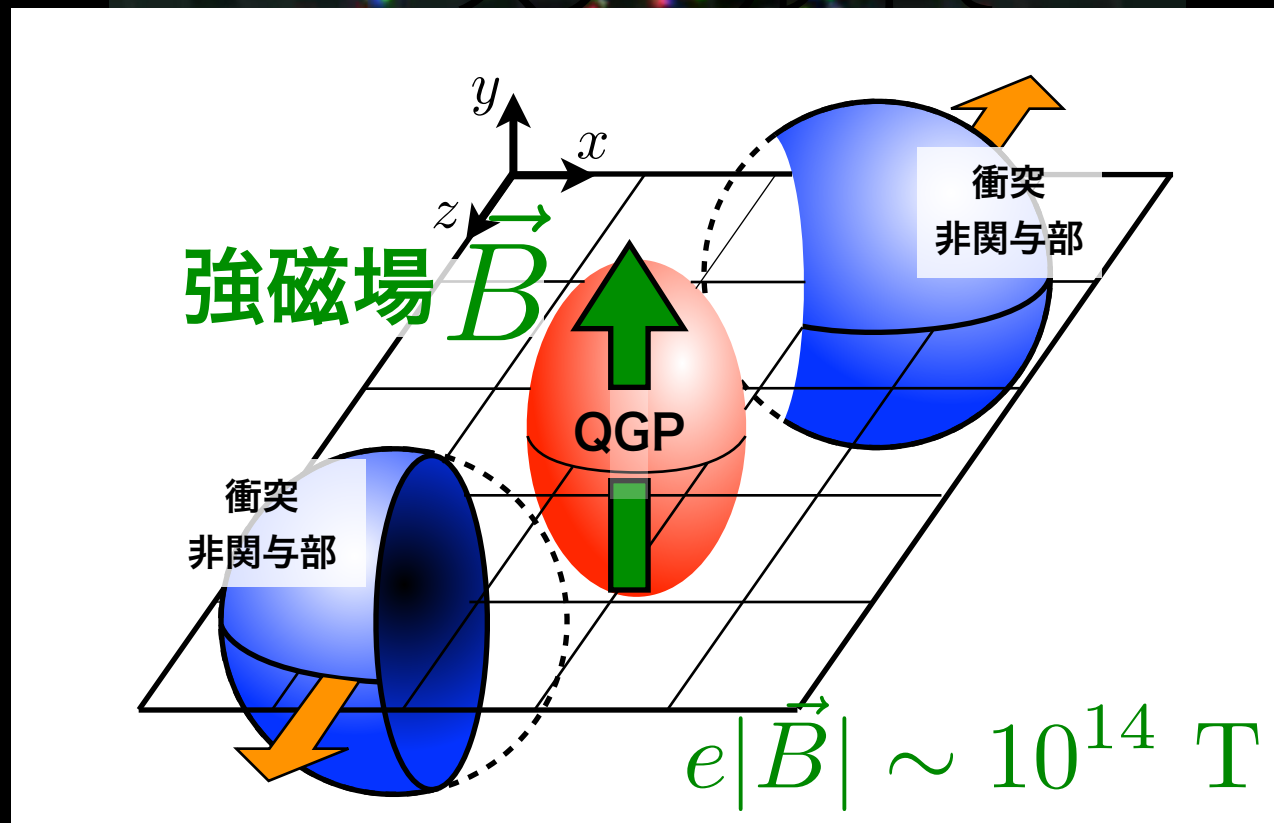


計量 $\tilde{g}_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}(\beta, \vec{v})$
で記述される
曲がった"時空"上
の場の理論

異常輸送現象が生じうる物理系

クォーク・グルーオン プラズマ

マグネター (強磁場中性子星)



強い磁場とカイラリティの不釣り合い

→ 異常輸送現象の生じる絶好の系!

S

$$\mu_5 \neq 0$$

$$\vec{j} \propto \vec{B}$$

N

しかし、理論的に大きな課題が残されており、未解決!