

カイラル輸送現象

山本 直希

慶應義塾大学 理工学部 物理学科

「熱場の量子論とその応用」

2015年9月2日

内容

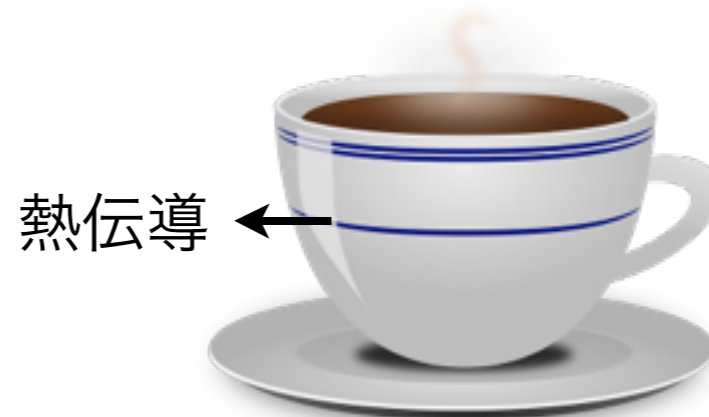
- 日常的な輸送現象
- カイラルな輸送現象
- カイラルな輸送理論
- カイラルな集団励起（波と不安定性）
- 物性・宇宙物理への応用の例

自然単位系： $\hbar = c = 1$

輸送現象

輸送現象

- 古典的で身近な例:
 - Ohmの法則: $\mathbf{j}_e = \sigma \mathbf{E}$
 - Fourierの法則: $\mathbf{j}_Q = \kappa(-\nabla T)$

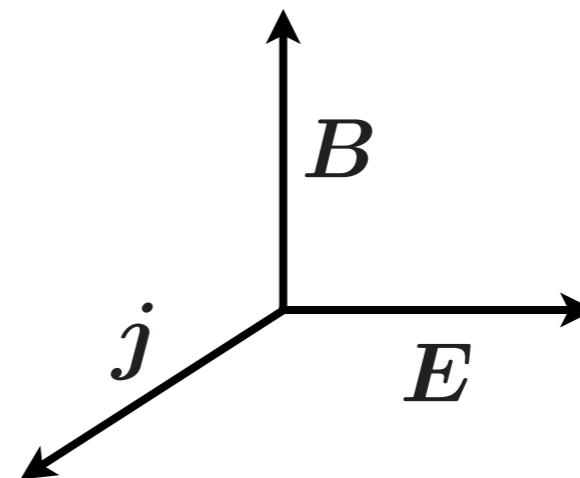


色々な輸送現象

- 19世紀に既に分かったもの

電流	1826 Ohm	1879 Hall	1821 Seebeck	1886 Nernst
$\mathbf{j}_e = \sigma \mathbf{E} + R \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \alpha (-\nabla T) + N (-\nabla T) \times \mathbf{B}$				
熱流	Peltier 1834	Ettingshausen 1886	Fourier 1807	Leduc-Righi 1887
$\mathbf{j}_Q = \beta \mathbf{E} + N \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \kappa (-\nabla T) + L (-\nabla T) \times \mathbf{B}$				

- $\mathbf{E} \rightarrow -\nabla \mu$ もOK.
- これで全て？



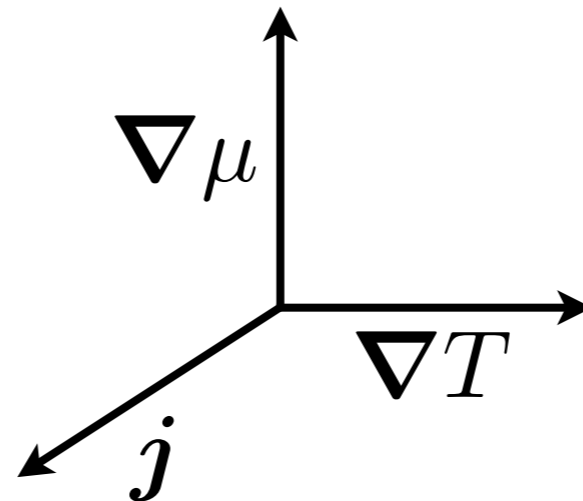
問題

- 局所的な温度・密度勾配と輸送

$$j \sim \nabla T \quad j \sim \nabla \mu$$

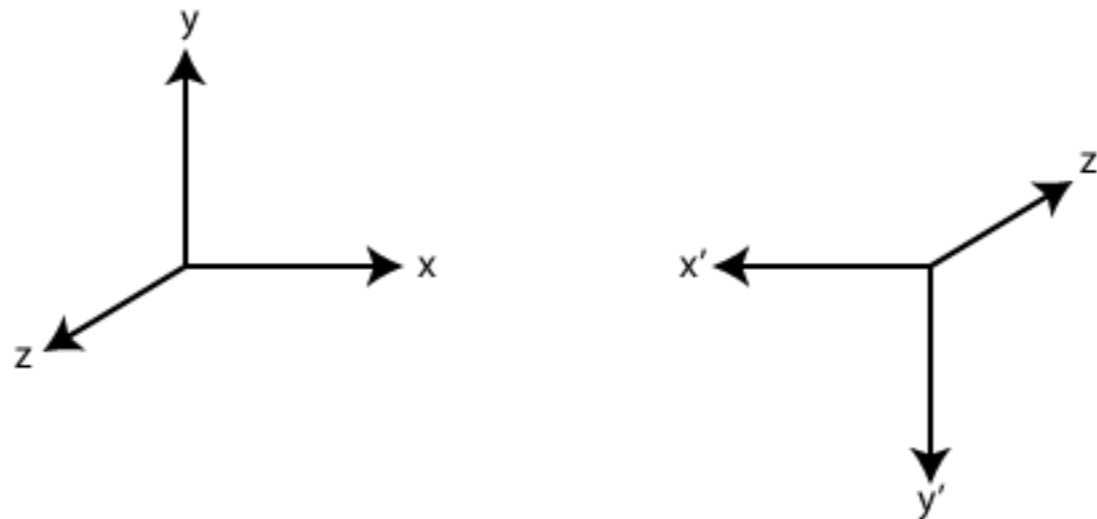
- 電磁場のない単純な2次輸送？

$$j \sim \nabla T \times \nabla \mu$$



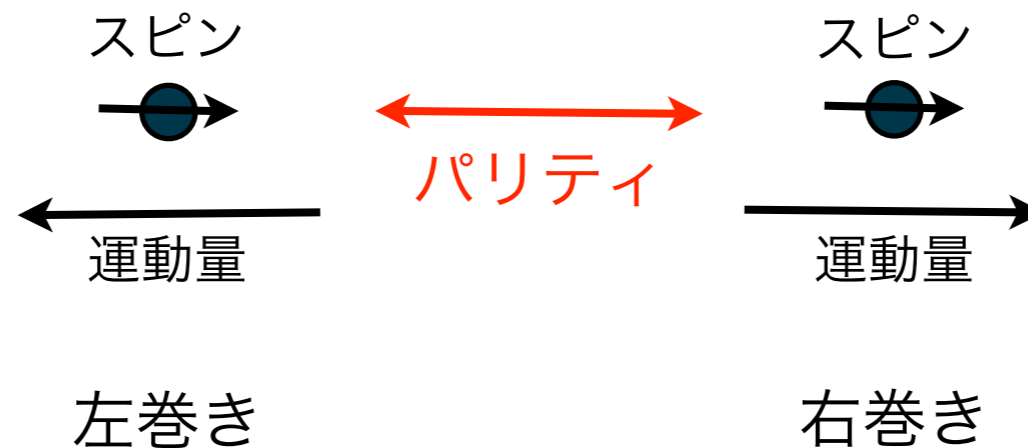
パリティ

- この関係式を仮定： $j = \kappa \nabla T \times \nabla \mu$
- パリティ変換のもとで $-j = \kappa(-\nabla T) \times (-\nabla \mu)$
- パリティに矛盾するので普通は (空気や水では) 起きない。



カイラリティ

- 相対論的に運動するフェルミオン：カイラリティ



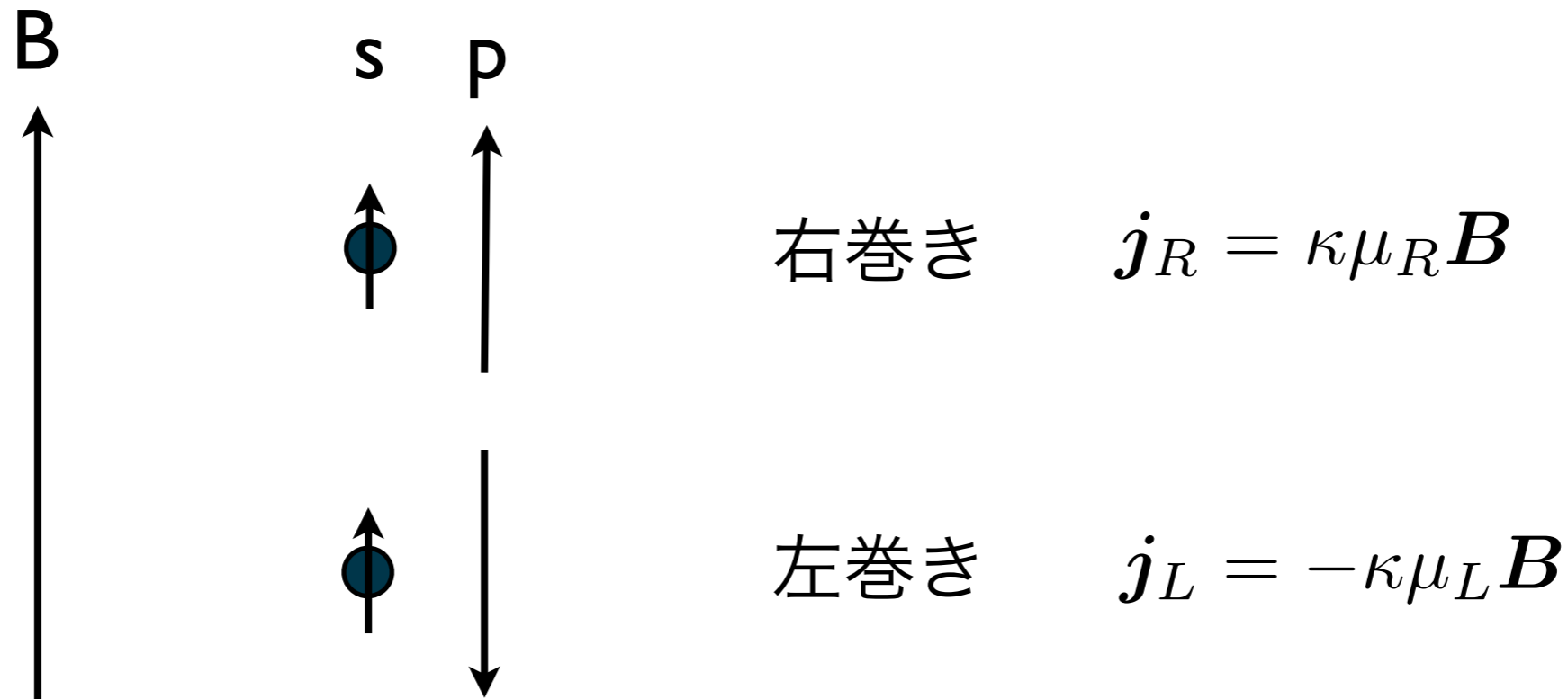
- $\mathbf{j} = \tilde{\kappa}(\mu_R - \mu_L)\nabla T \times \nabla\mu$ ：パリティと無矛盾
- 輸送係数は計算できるか？ [Ishii-Chen-Pu-NY, work in progress](#)

Chiral Magnetic Effect (CME)

- $j_e \sim B$?
- Ohmの法則: $j_e = \sigma E$
- $j_e \sim (\mu_R - \mu_L)B$ はパリティを保つ
- 磁場は仕事をしない：非散逸の電流

Vilenkin (1980); Nielsen, Ninomiya (1983); Kharzeev, Warringa, Fukushima (2008)

Chiral Magnetic/Separation Effects

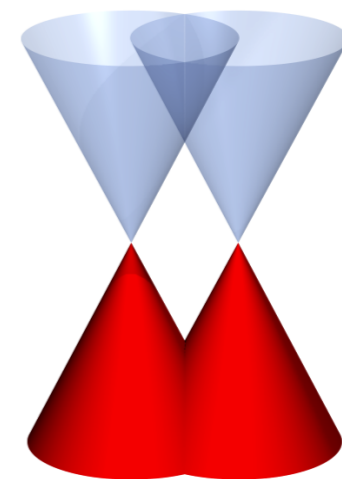
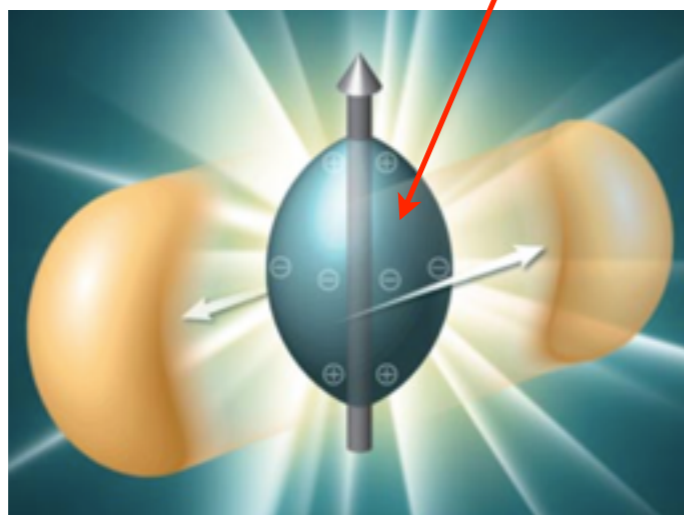


- 左右の差 \rightarrow 磁場方向の電流 (CME) : $j_e \sim \mu_5 B$
- 左右の和 \rightarrow 磁場方向の軸性流 (CSE) : $j_5 \sim \mu B$
- 場の理論における量子異常と密接に関係 [Son-Zhitnitsky \(2004\)](#)

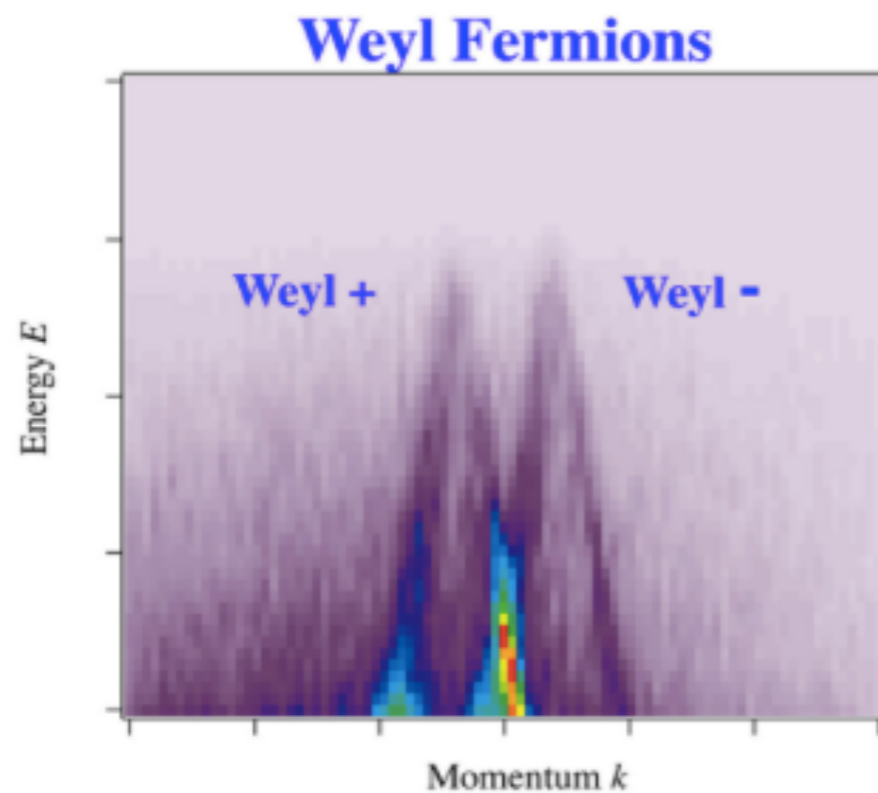
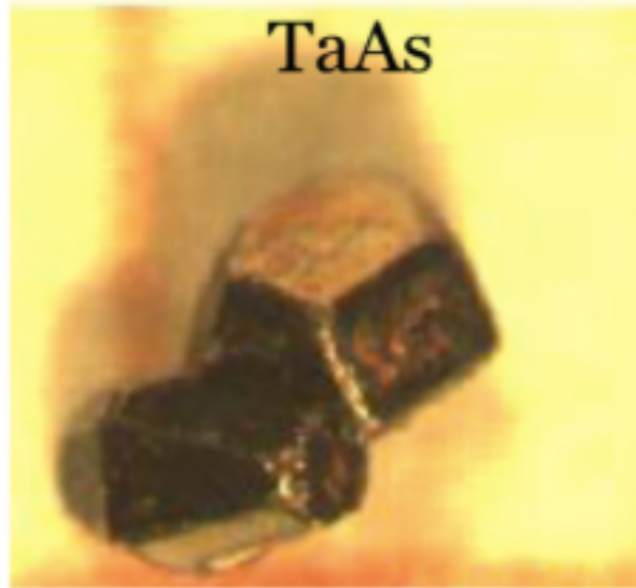
カイラル物質

- 初期宇宙における電弱プラズマ [Joyce-Shaposhnikov \(1997\), ...](#)
- RHIC/LHCにおけるQGP [Kharzeev-Warringa-Fukushima \(2008\), ...](#)
- 超新星爆発時の電磁プラズマ [Ohnishi-NY \(2014\), ...](#)
- Weyl半金属 (“3D graphene”) [Nielsen-Ninomiya \(1983\), ...](#)

カイラリティのゆらぎ



Weyl半金属



S.-Y. Xu *et al.*, Science (2015)

http://physics.princeton.edu/zahidhasangroup/index_WS.html

カイラル輸送理論

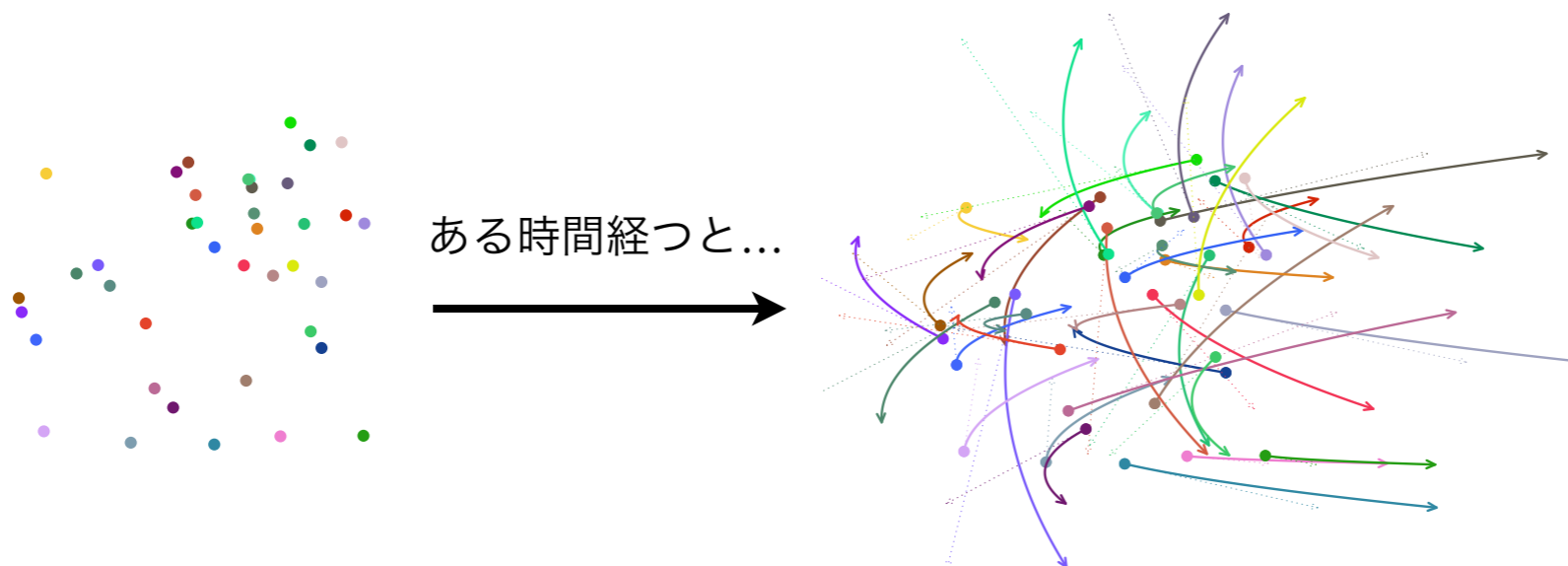
- Kinetic theory
- Hydrodynamics

(本郷氏のtalk参照)

Kinetic theory

- Kinetic theory (Boltzmann方程式) は、系の平衡・非平衡状態における統計的な発展を記述

$$\frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{x}} + (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = c[n_{\mathbf{p}}]$$



Ludwig Boltzmann

Boltzmann方程式

- 分布関数 $n_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x})$ を使って定式化
- 衝突を無視すると、Liouvilleの定理により

$$\frac{dn_{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

Boltzmann方程式

- 分布関数 $n_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x})$ を使って定式化
- 衝突を無視すると、Liouvilleの定理により

$$\frac{dn_{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{x}} + \underbrace{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})}_{\text{Lorentz force}} \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

Boltzmann方程式

- 分布関数 $n_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x})$ を使って定式化
- 衝突を入れると

$$\frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{x}} + (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = c[n_{\mathbf{p}}]$$

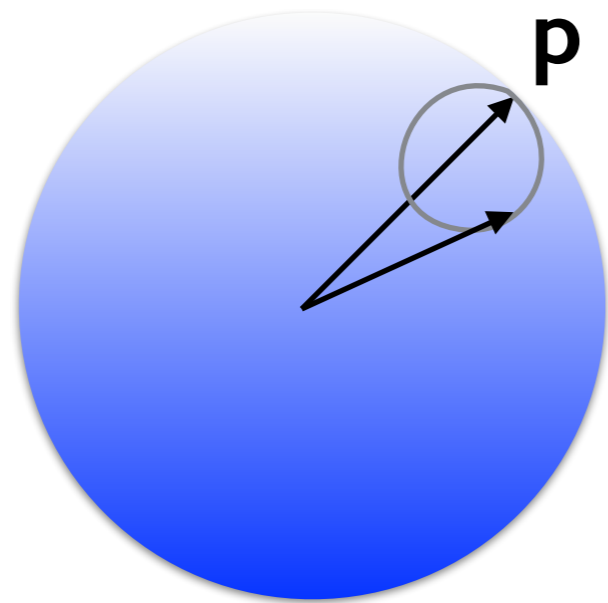
- Ohmの法則：

$$\mathbf{j}_{\text{noneq}} = \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \delta n_{\mathbf{p}} = \sigma \mathbf{E}$$

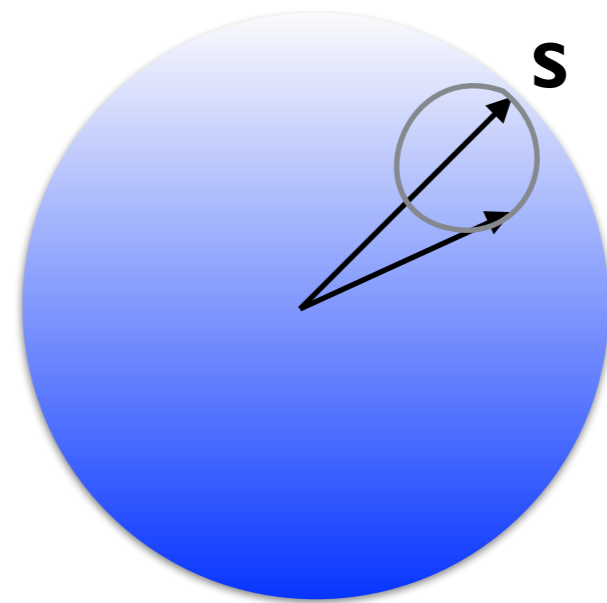
- カイラル磁気効果？ 量子異常？

カイラリティとトポロジー

右巻きフェルミオン



運動量空間

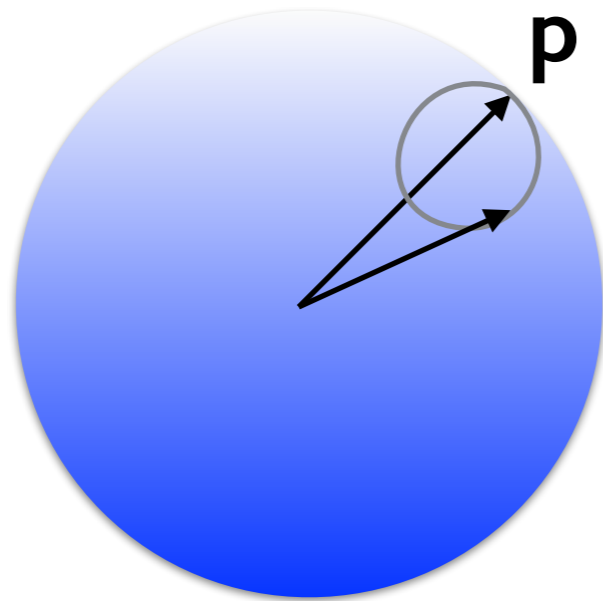


スピン空間

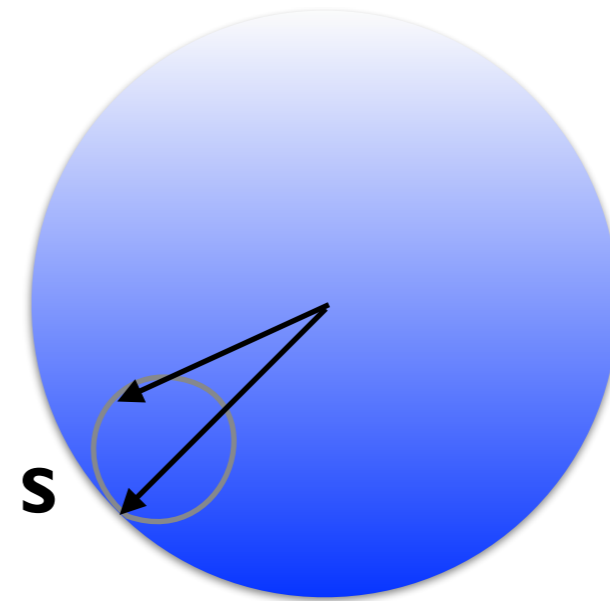
S^2 (運動量空間) から S^2 (スピン空間) へのmapping: 巻き数 +1

カイラリティとトポロジー

左巻きフェルミオン



運動量空間

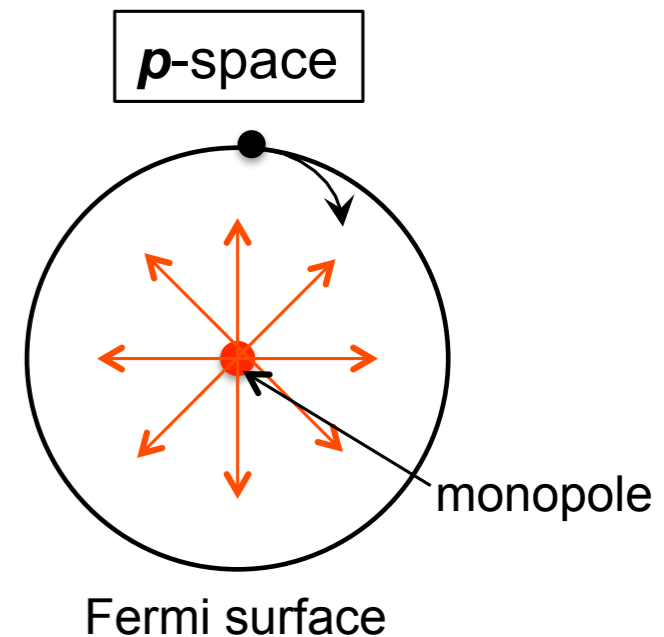


スピン空間

S^2 (運動量空間) から S^2 (スピン空間) へのmapping: 巻き数 -1

カイラル粒子の運動方程式

- 巻き数 ~ Berry曲率の面積分 $\Omega_p = \nabla_p \times \mathcal{A}_p = \pm \frac{p}{2|p|^3}$



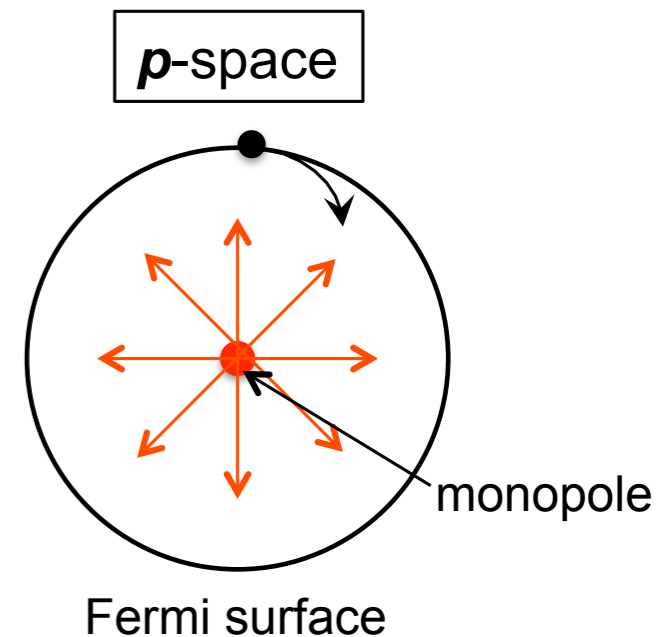
カイラル粒子の運動方程式

- 巻き数 ~ Berry曲率の面積分 $\Omega_p = \nabla_p \times \mathcal{A}_p = \pm \frac{p}{2|p|^3}$
- 運動方程式：

$$\dot{x} = \hat{p}$$

$$\dot{p} = E + \dot{x} \times B$$

\dot{x} -空間でのLorentz力



カイラル粒子の運動方程式

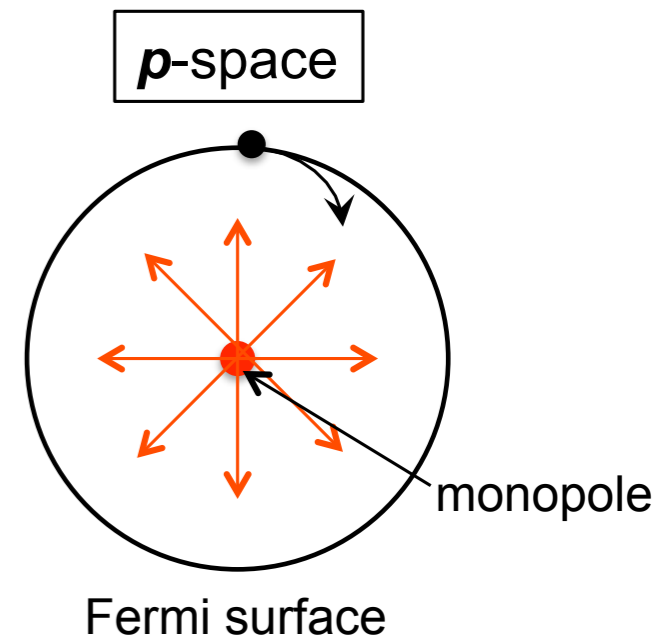
- 巻き数 ~ Berry曲率の面積分 $\Omega_p = \nabla_p \times \mathcal{A}_p = \pm \frac{p}{2|p|^3}$
- 運動方程式：

$$\dot{x} = \hat{p} + \dot{p} \times \Omega_p$$
$$\dot{p} = E + \dot{x} \times B$$

\swarrow p -空間での“Lorentz力”

Sundaram-Niu (1999)

\nwarrow x -空間でのLorentz力



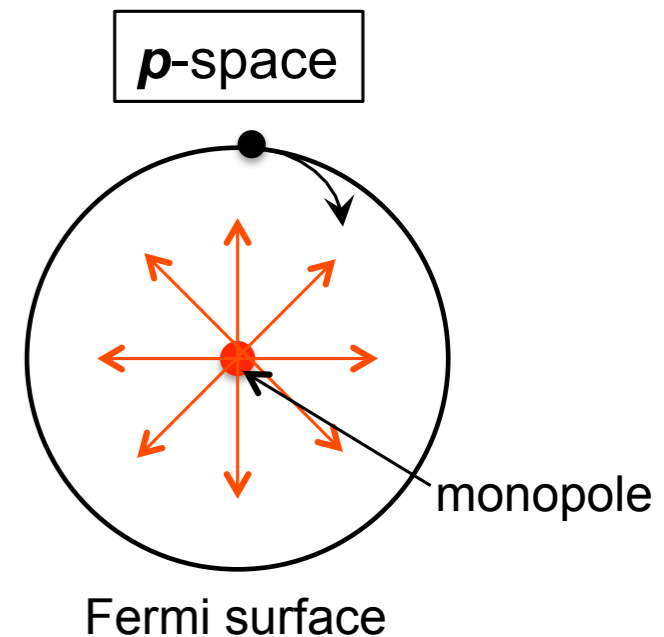
カイラル粒子の運動方程式

- 巻き数 ~ Berry曲率の面積分 $\Omega_p = \nabla_p \times \mathcal{A}_p = \pm \frac{p}{2|p|^3}$
- 運動方程式：

$$\dot{x} = \hat{p} + \dot{p} \times \Omega_p = \omega^{-1} [\hat{p} + \mathbf{E} \times \Omega_p + (\hat{p} \cdot \Omega_p) \mathbf{B}]$$

$$\dot{p} = \mathbf{E} + \dot{x} \times \mathbf{B} = \omega^{-1} [\mathbf{E} + \hat{p} \times \mathbf{B} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \Omega_p]$$

$$\omega = 1 + \mathbf{B} \cdot \Omega_p$$



Boltzmann方程式

- 分布関数 $n_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x})$ を使って定式化
- 衝突を無視すると、Liouvilleの定理により

$$\frac{dn_{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

Chiral kinetic theory

$$(1 + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + [\mathbf{v} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{B}] \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{x}} + [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\Omega}] \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = c[n_{\mathbf{p}}]$$

Son-NY (2012); Stephanov-Yin (2012); Chen et al. (2013).

See also cond-mat refs: Duval et al. (2006)

$$\boldsymbol{\Omega} = \pm \frac{\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|^3}$$

Chiral kinetic theory

$$(1 + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + [\mathbf{v} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{B}] \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{x}} + [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\Omega}] \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = c[n_{\mathbf{p}}]$$

Son-NY (2012); Stephanov-Yin (2012); Chen et al. (2013).

See also cond-mat refs: Duval et al. (2006)

$$\mathbf{j} \equiv \int_{\mathbf{p}} \omega \dot{\mathbf{x}} n_{\mathbf{p}} = \int_{\mathbf{p}} [\hat{\mathbf{p}} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega} + (\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{B}] n_{\mathbf{p}}$$

Chiral kinetic theory

$$(1 + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + [\mathbf{v} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{B}] \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{x}} + [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\Omega}] \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = c[n_{\mathbf{p}}]$$

Son-NY (2012); Stephanov-Yin (2012); Chen et al. (2013).

See also cond-mat refs: Duval et al. (2006)

$$\mathbf{j} \equiv \int_{\mathbf{p}} \omega \dot{\mathbf{x}} n_{\mathbf{p}} = \int_{\mathbf{p}} [\cancel{\hat{\mathbf{p}}} + \mathbf{E} \times \cancel{\boldsymbol{\Omega}} + (\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{B}] n_{\mathbf{p}} = \pm \frac{\mu}{4\pi^2} \mathbf{B}$$

Full chiral kinetic theory

$$(1 + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \left[\tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{E}} \times \boldsymbol{\Omega} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{B} \right] \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{x}} + \left[\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B} + (\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\Omega} \right] \cdot \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = c[n_{\mathbf{p}}]$$

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|(1 - \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}), \quad \tilde{\mathbf{v}} \equiv \frac{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \tilde{\mathbf{E}} \equiv \mathbf{E} - \frac{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{x}}$$

磁気モーメントによる補正

Son-NY (2013); Manuel, Torres-Rincon (2014)

Relativistic hydrodynamics

エネルギー・運動量保存則: $\partial_\mu T^{\mu\nu} = F^{\nu\lambda} j_\lambda$

粒子数保存則: $\partial_\mu j^\mu = 0$

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu} + (\text{dissipation})$$

$$j^\mu = n u^\mu + (\text{dissipation})$$

see Landau-Lifshitz “Fluid Mechanics” (volume 6)

(本郷氏のtalk参照)

Chiral hydrodynamics

エネルギー・運動量保存則: $\partial_\mu T^{\mu\nu} = F^{\nu\lambda} j_\lambda$

量子異常: $\partial_\mu j^\mu = C E^\mu B_\mu$

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P) u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu} + (\text{dissipation})$$

$$j^\mu = n u^\mu + \xi_B B^\mu + \xi \omega^\mu + (\text{dissipation})$$

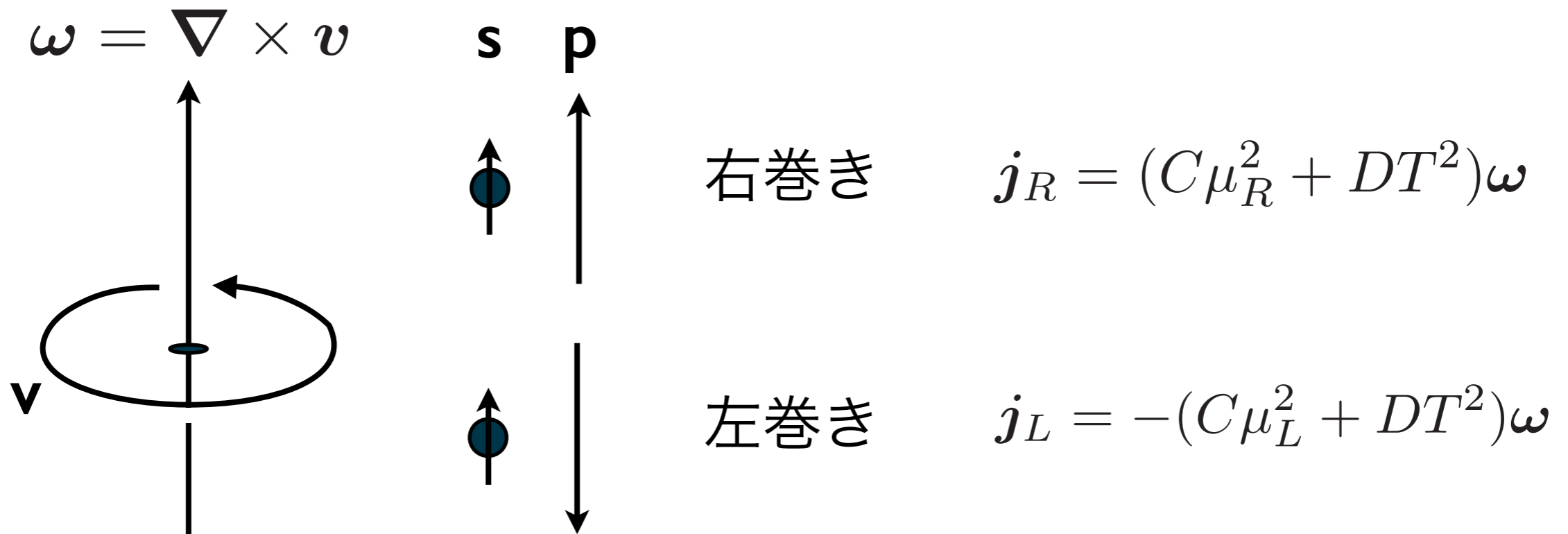
chiral magnetic effect

chiral vortical effect

Son-Surowka (2009)

(本郷氏のtalk参照)

Chiral vortical effect



Vilenkin (1979); Son-Surowka (2009); K. Landsteiner et al. (2011); K. Jensen et al. (2012)

カイラルな波

- Chiral Magnetic Wave
- Chiral Alfven Wave

Chiral Magnetic Wave (CMW)

Newman (2006); Kharzeev-Yee (2011)

有限密度・磁場中のカイラルフェルミオン

粒子数保存則: $\partial_t n + \nabla \cdot j = 0$

$$\text{CME: } j_z = \pm \frac{\mu}{4\pi^2} B_z$$

$$\text{感受率: } \chi \equiv \frac{\partial n}{\partial \mu}$$

Chiral Magnetic Wave (CMW)

Newman (2006); Kharzeev-Yee (2011)

有限密度・磁場中のカイラルフェルミオン

粒子数保存則: $\partial_t n + \nabla \cdot j = 0$

$$\text{CME: } j_z = \pm \frac{\mu}{4\pi^2} B_z \quad \longrightarrow \quad \partial_t n \pm V_L \partial_z n = 0$$

$$\text{感受率: } \chi \equiv \frac{\partial n}{\partial \mu} \quad V_L = \frac{B_z}{4\pi^2 \chi} \quad (\text{縦波})$$

Chiral Alfven Wave (CAW)

NY (2015)

有限温度・磁場中のカイラルフェルミオン
(一様・静的な n, ϵ, P)

粒子数保存則: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

運動量保存則: $(\epsilon + P)\partial_t \mathbf{v} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$

CVE: $\mathbf{j} = \pm \frac{T^2}{24} \nabla \times \mathbf{v}$

Chiral Alfven Wave (CAW)

NY (2015)

有限温度・磁場中のカイラルフェルミオン
(一様・静的な n, ϵ, P)

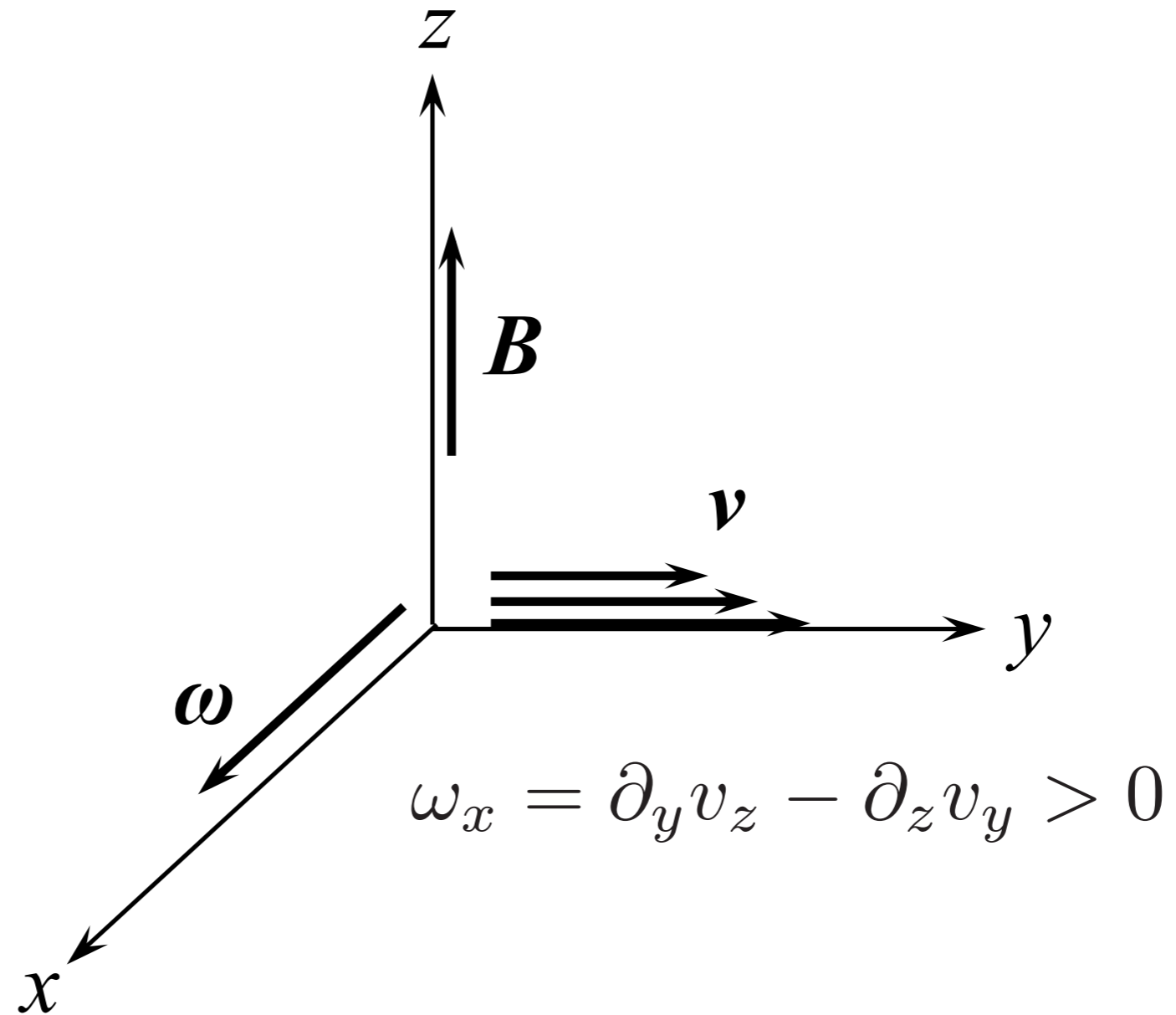
粒子数保存則: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

運動量保存則: $(\epsilon + P)\partial_t \mathbf{v} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \xrightarrow{\mathbf{v} \perp \mathbf{B}} \partial_t \mathbf{v} \pm V_T \partial_z \mathbf{v} = 0$

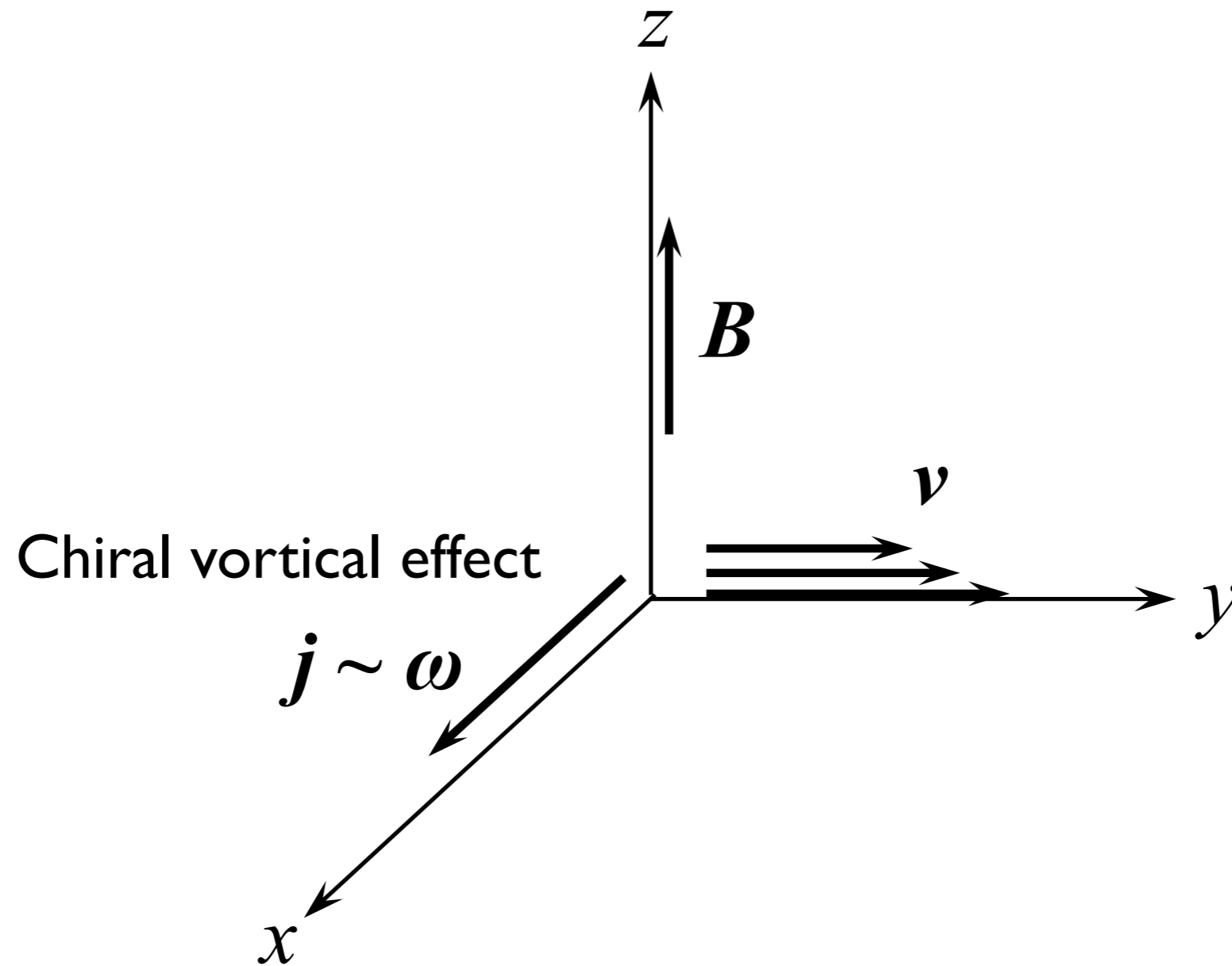
$$\text{CVE: } \mathbf{j} = \pm \frac{T^2}{24} \nabla \times \mathbf{v} \quad V_T = -\frac{1}{24} \frac{T^2}{\epsilon + P} B_z$$

(横波)

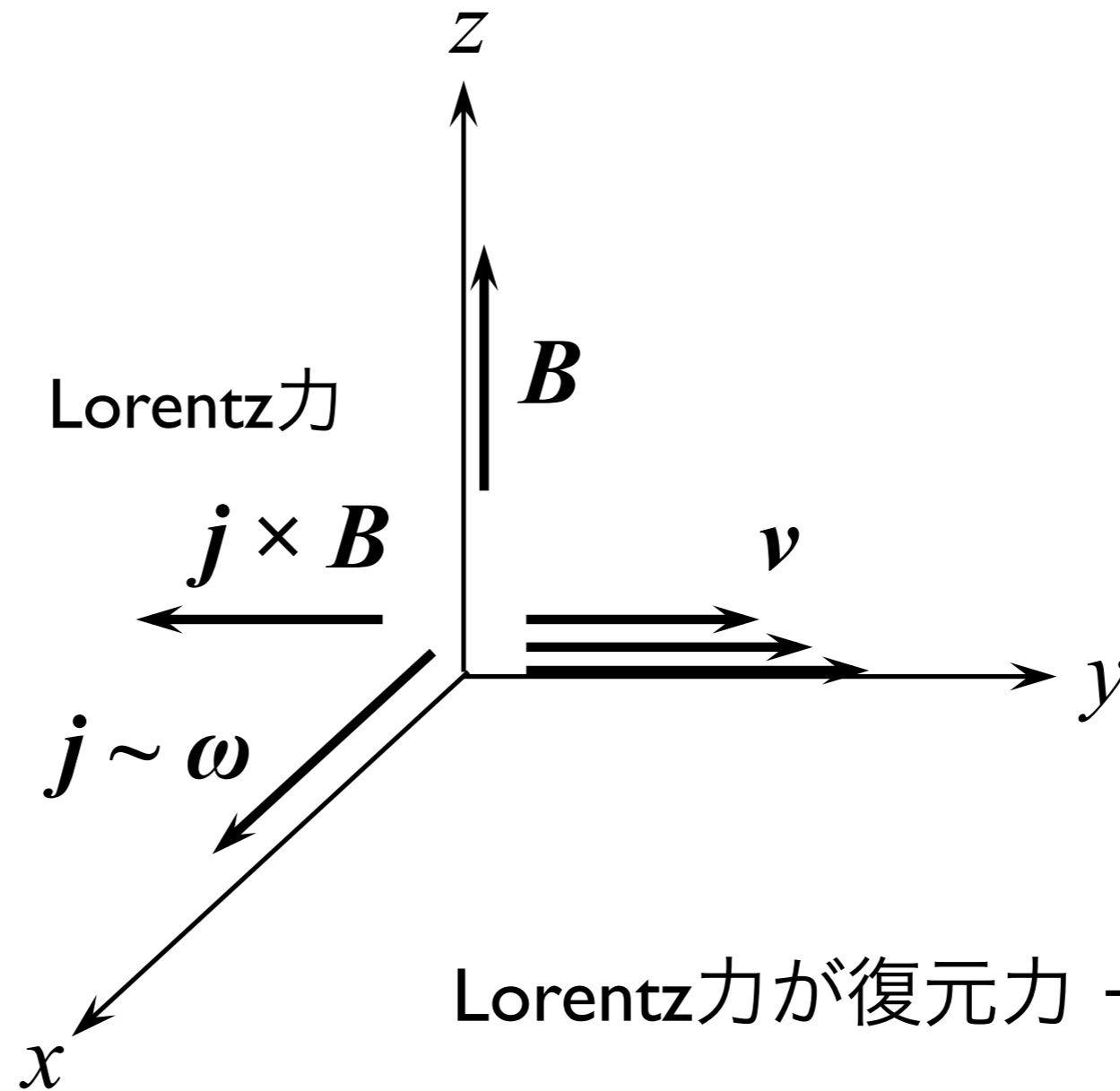
定性的な議論



定性的な議論



定性的な議論



Lorentz力が復元力 $\rightarrow v$ の振動:

chiral Alfvén wave

Chiral Plasma Instability (CPI)

電弱理論 Redlich-Wijewardhana (1985); Rubakov (1986)

初期宇宙 Joyce-Shaposhnikov (1997)

QGP Akamatsu-NY (2013, 2014) 中性子星 Ohnishi-NY (2014)

Polarization tensor with μ_5

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = \text{Diagram}$$

- $\Pi^{ij}(k)$ のテンソル分解 ($A_0 = 0$)

$$\hat{k}^i \hat{k}^j, \delta^{ij} - \hat{k}^i \hat{k}^j, i\epsilon^{ijk} \hat{k}^k$$

$$\Pi_{-}^{ij}(k) = \frac{e^2 \mu_5}{4\pi^2} i\epsilon^{ijk} \left(1 - \frac{\omega^2}{|\mathbf{k}|^2}\right) \left(1 - \frac{\omega}{2|\mathbf{k}|} \ln \frac{\omega + |\mathbf{k}|}{\omega - |\mathbf{k}|}\right) k^k$$

T=0 [Son-NY (2013)] T≠0 [Manuel, Torres-Rincon (2014)]

集団モード

- Maxwell方程式: $\partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu$
- 線形応答理論: $j^\mu(k) = \Pi^{\mu\nu}(k)A_\nu(k)$

$$[k^2\delta^{ij} - k^i k^j + \Pi^{ij}(k)]A^j = 0$$

集団モード

- Maxwell方程式: $\partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu$
- 線形応答理論: $j^\mu(k) = \Pi^{\mu\nu}(k)A_\nu(k)$

$$[k^2\delta^{ij} - k^i k^j + \Pi^{ij}(k)]A^j = 0$$

(Transverse part, $\omega \ll k$)

- $\mu_5=0$ では $\omega = -\frac{4ik^3}{\pi m_D^2}$; $e^{-i\omega t} \sim e^{-\gamma(k)t}$ Landau減衰
- $\mu_5 \neq 0$ では $\omega = \frac{4ik^2}{\pi m_D^2} \left(\frac{e^2|\mu_5|}{4\pi^2} - k \right)$; $e^{-i\omega t} \sim e^{\gamma(k)t}$ for small k
Akamatsu-NY (2013) プラズマ不安定性

カイラルプラズマ不安定性 (CPI)



最初に一様な μ_5 があると仮定

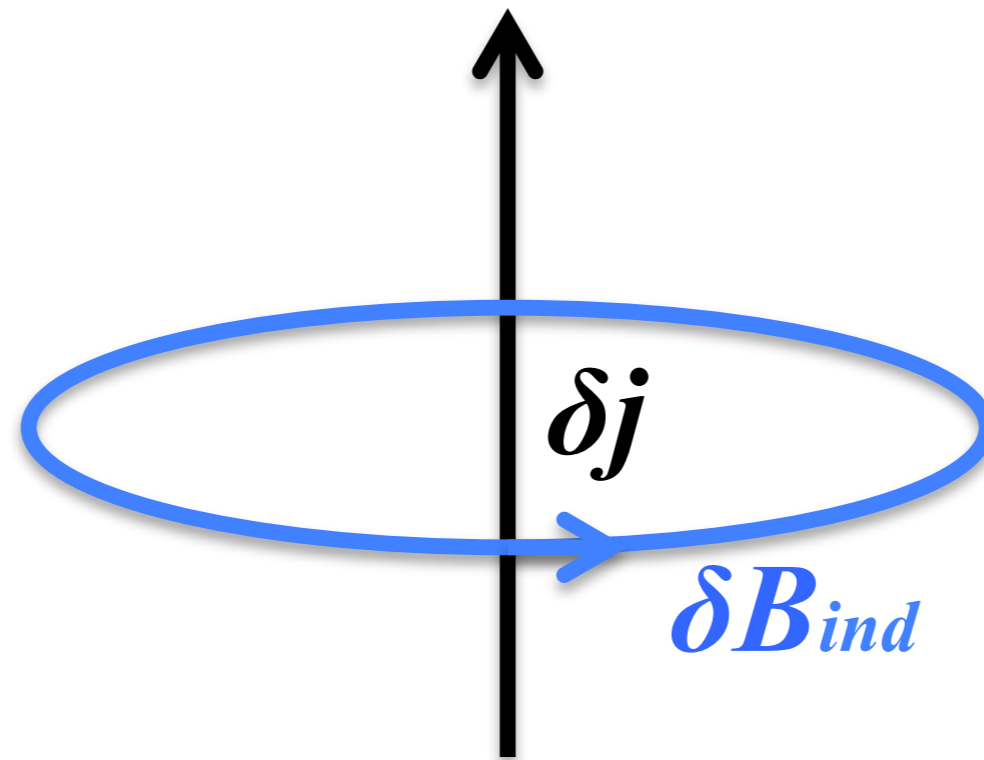
カイラルプラズマ不安定性 (CPI)



カイラル磁気効果

$$\delta j \sim \mu_5 \delta B$$

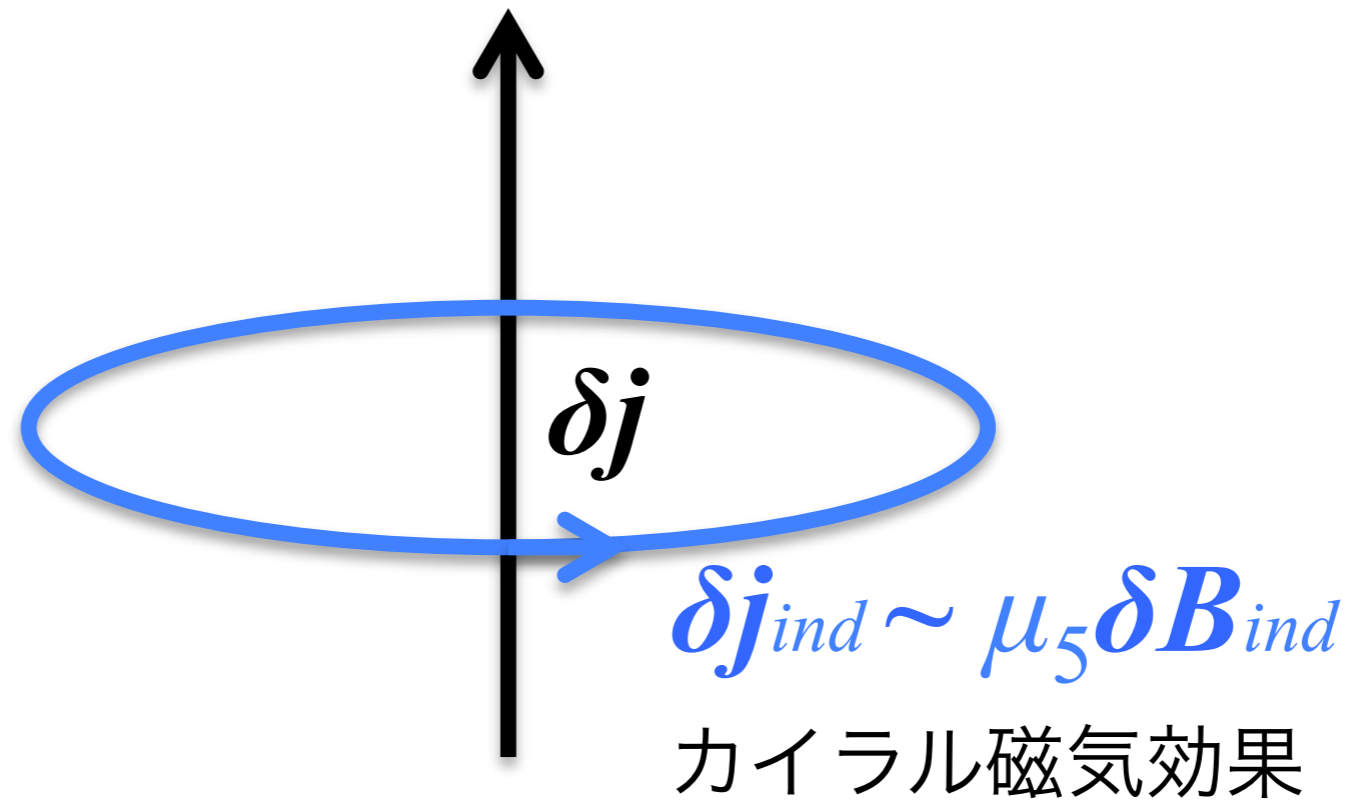
カイラルプラズマ不安定性 (CPI)



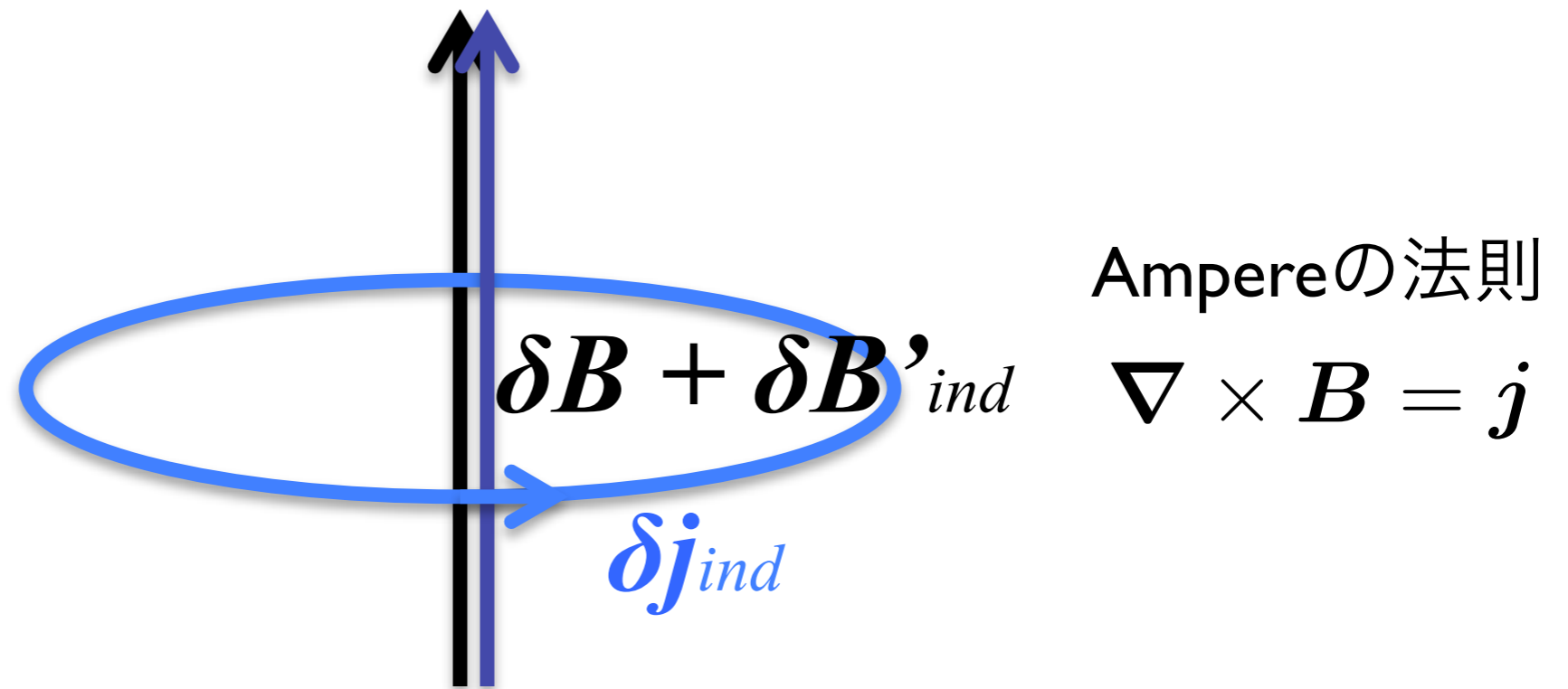
Ampereの法則

$$\nabla \times B = j$$

カイラルプラズマ不安定性 (CPI)

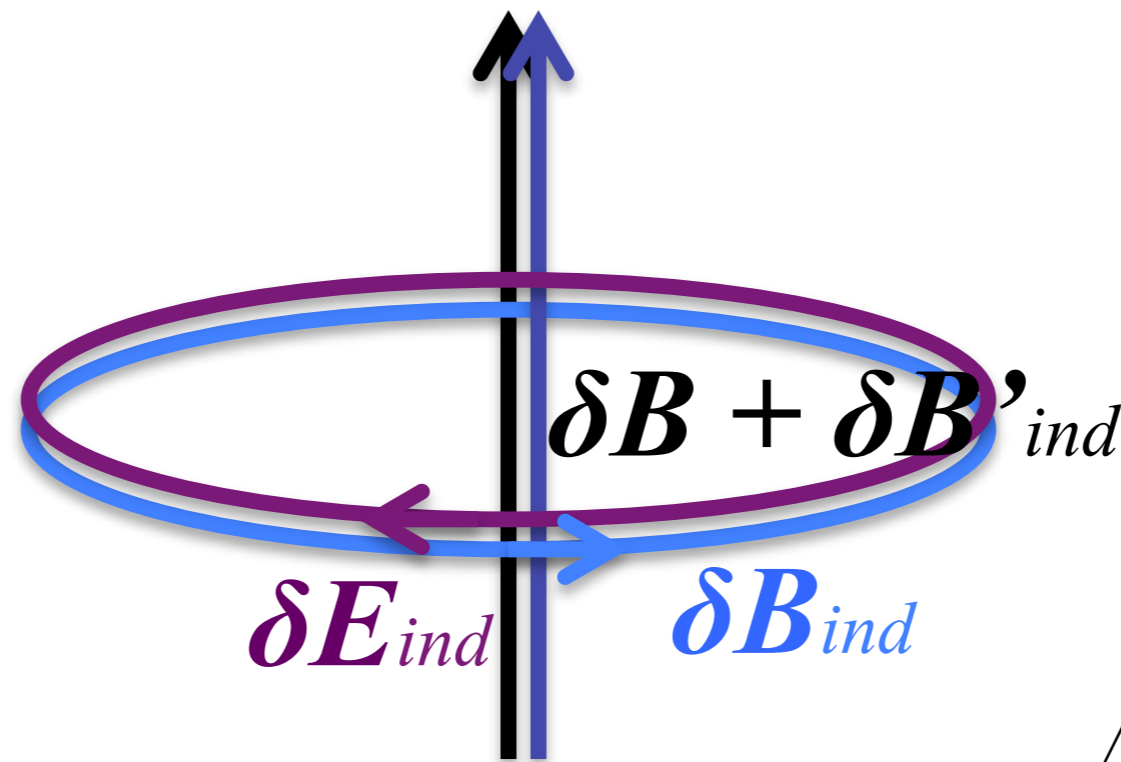


カイラルプラズマ不安定性 (CPI)



正のフィードバック：不安定性

カイラルプラズマ不安定性 (CPI)



Faradayの法則

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$$

量子異常

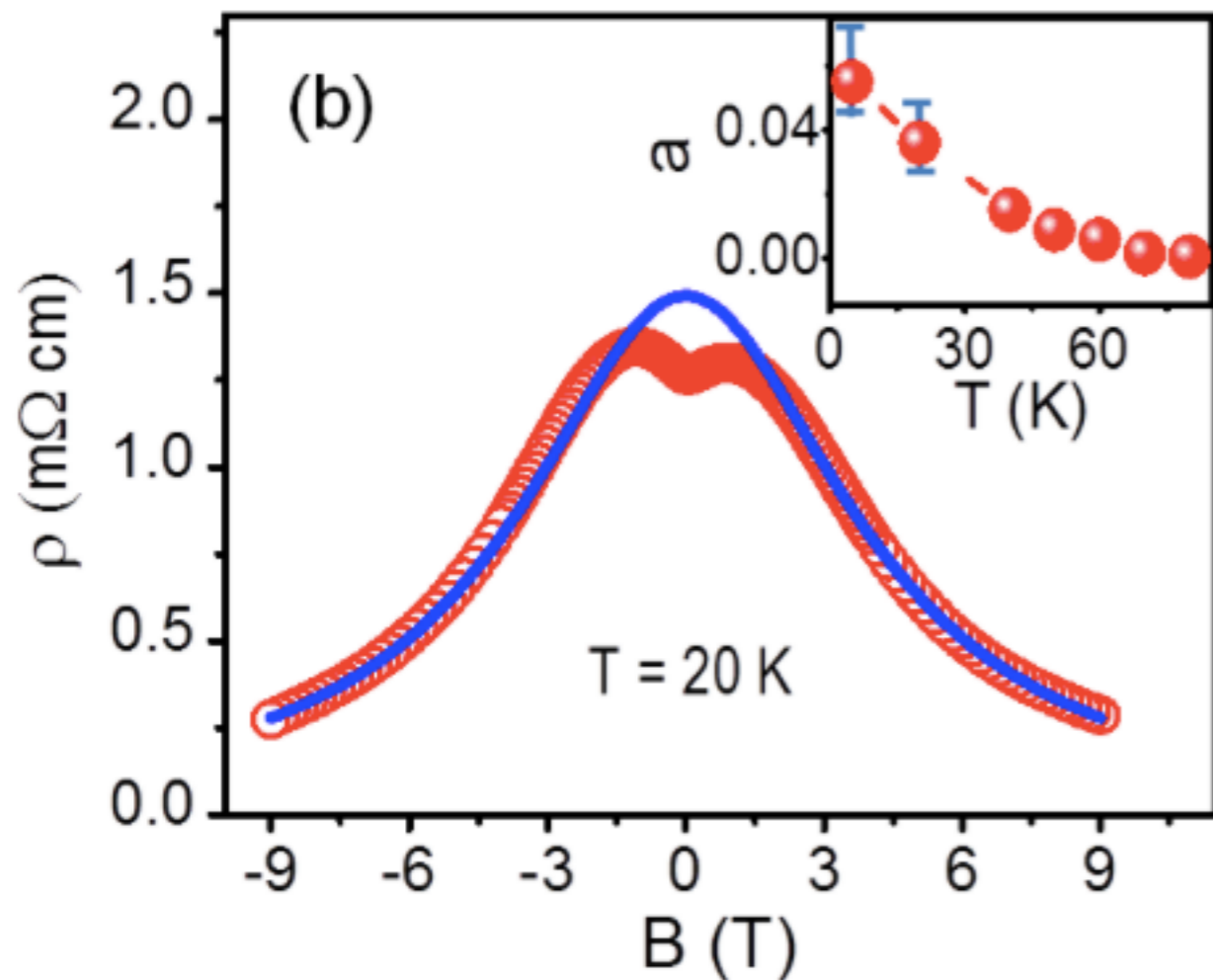
$$\Delta Q_5 = \# \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} < 0$$

自然は左右を等しくしようとする

物性・宇宙物理 への応用の例

負の磁気抵抗 (Weyl半金属)

ZrTe₅



$$\frac{\partial n_5}{\partial t} = C \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \frac{n_5}{\tau}$$

定常状態: $n_5 = \tau C \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$

$$j_{\text{CME}} = C \mu_5 B = \frac{\tau}{\chi} (CB)^2 E$$

σ_{CME}

$$\rho = (\sigma_{\text{Ohm}} + \sigma_{\text{CME}})^{-1}$$

Son-Spivak (2013)

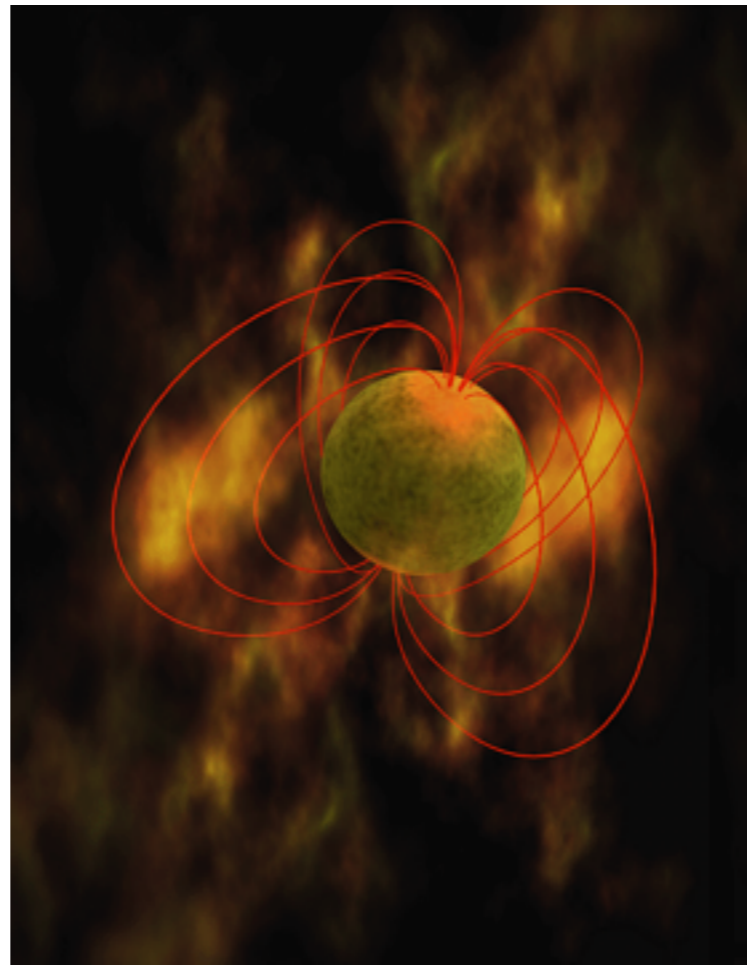
Q. Li *et al.* [arXiv:1412.6543 (cond-mat.str-el)];

J. Xiong *et al.* [arXiv:1503.08179 (cond-mat.str-el)]

量子異常とCMEの帰結

マグネター

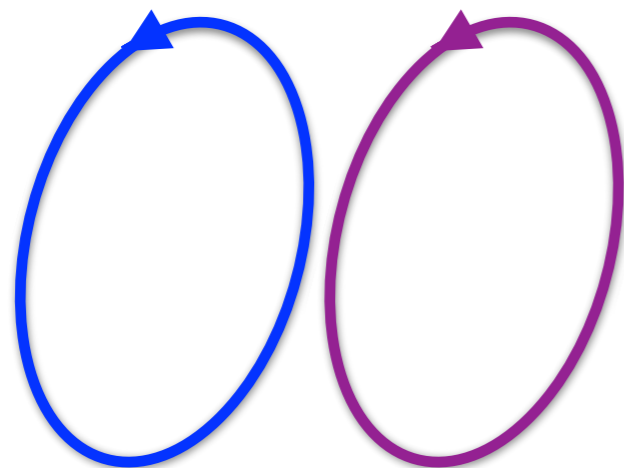
- マグネター：「宇宙最強の磁石」
- 表面磁場は最大 10^{15} G 程度
- このような強くて安定な磁場はどのように作られるのか？



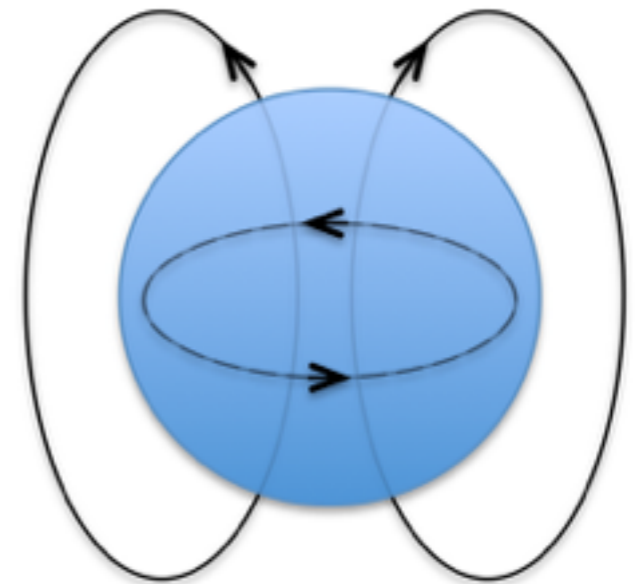
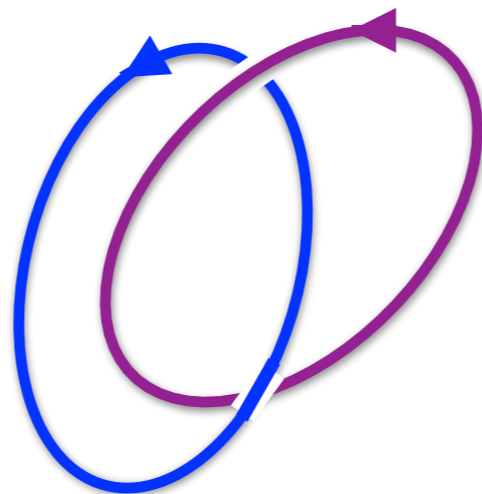
磁気ヘリシティ

- 磁気ヘリシティ: $\mathcal{H} = \int d^3x \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
- Gaussの絡み目数に比例: トポロジカルな安定性
- 電磁流体力学(MHD)の初期条件として仮定. その起源は?

$$\mathcal{H} = 0$$



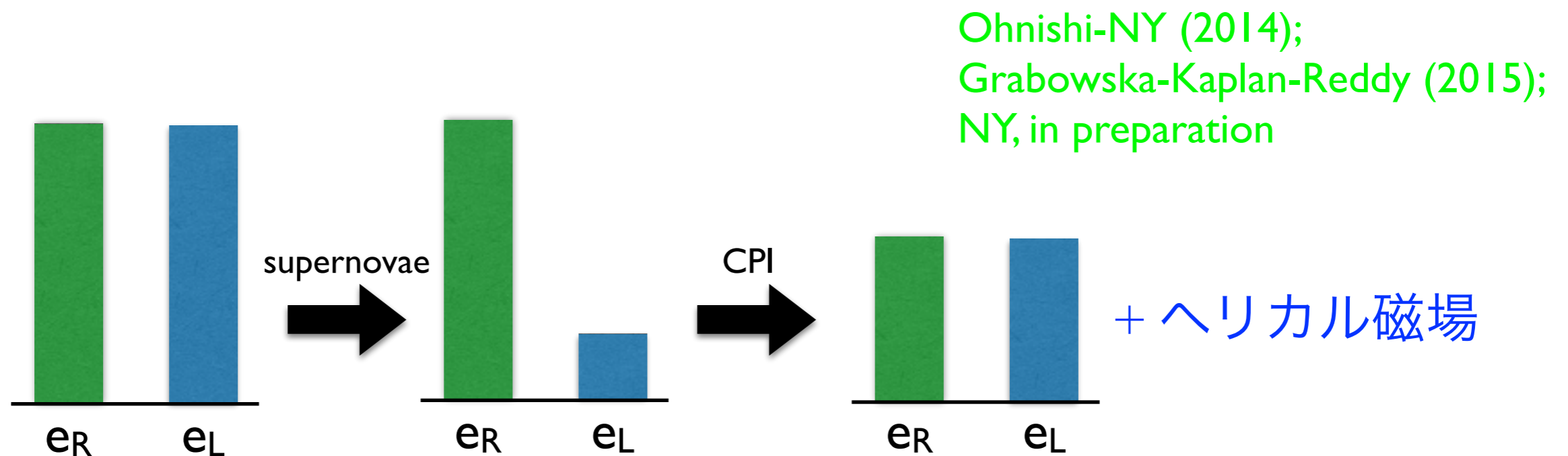
$$\mathcal{H} = -2\Phi_1\Phi_2$$



poloidal/toroidal磁場

CPIによるマグネター磁場

- 超新星爆発におけるニュートリノ放出: $p + e_L^- \rightarrow n + \nu_e^L$
- 右巻き電子の方が多く残る → この状態はCPIにより不安定
- **ヘリシティの保存**: 電子のヘリシティ → 磁気ヘリシティ
- 磁気ヘリシティをもった強磁場の生成



Conclusion

- カイラリティによる新奇的な輸送現象
- 量子異常 \Leftrightarrow 輸送理論 + Berry曲率
- カイラル輸送理論の宇宙・原子核・物性への応用
 - 初期宇宙や超新星爆発（特にニュートリノ物理）
 - カイラルトロンニクスの可能性