４体フェルミ相互作用模型の正則化と有限温度密度相構造

稲垣 知宏　広島大学
木村 大自　宇部高専
幸山 浩章　台湾大学

H. Kohyama, D. Kimura, and T. I., Nucl. Phys. **B896** (2015) 682.

関連した仕事

- ３次元カットオフと次元正則化の比較
  - 中性子星の質量と半径：T. Fujihara, D. Kimura, T. I., and A.Kvinikhidze, Phys. Rev. **D79** (2009) 096008.
  - メソン９重項：T. I., D. Kimura, H. Kohyama, and A. Kvinikhidze, Phys. Rev. **D83** (2011) 034005.
- 正則化に依らない解析
  - 処方の導入：T. I., D. Kimura, H. Kohyama, and A. Kvinikhidze, Int. J. Mod. Phys. **A28** (2013) 1350164-1-1350164-16.
  - Next to leading order：T. I., D. Kimura, and H. Kohyama, Int. J. Mod. Phys. **A29** (2014) 1450048-1-1450048-9.
- いろいろな正則化での解析
  - 理論の相構造：H. Kohyama, D. Kimura, and T. I., Nucl. Phys. **B896** (2015) 682.

目次

- 4体フェルミ相互作用模型
- いろいろな正則化
- 有限温度・密度効果
- まとめ

関連レビュー：

U. Vogl, W. Weise, Prog. Part. Nucl. Phys. 27 (1991) 195.
S.P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. 64 (1992) 649.
T. Hatsuda, T. Kunihiro, Phys. Rep. 247 (1994) 221.
M. Buballa, Phys. Rep. 407 (2005) 205.
M. Huang, Int. J. Mod. Phys. E 14 (2005) 675.

QCDの低エネルギー有効理論

4体フェルミ相互作用模型

4体フェルミ相互作用模型

- Nambu-Jona-Lasinio model (1960, 1961)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_i\right)\psi_i \\ &\quad + G\left[\left(\sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i \psi_i\right)^2 + \sum_{a=1}^{N_f^2-1}\left(\sum_{i,j=1}^{N_f} \bar{\psi}_i i\gamma_5 \tau^a_{ij} \psi_j\right)^2\right]\end{aligned}$$

- Dynamical symmetry breaking for $m = 0$

$$\begin{aligned}&SU_L(N_f) \otimes SU_R(N_f) \otimes U_A(1) \otimes U_B(1) \\ &\qquad \to SU_{L+R}(N_f) \otimes U_B(1)\end{aligned}$$

4体フェルミ相互作用模型

- Similar symmetry property with QCD
- A simple model of the chiral symmetry breaking
- 1/N expansion is useful to evaluate non-perturbative phenomena.

くりこみ可能性

Mass dimension

- Fermion field: (D-1)/2
- Four-fermion interaction: 2(D-1)
- Four-fermion coupling: dim(G)=D-2(D-1)=2-D

D=2: dim(G)=0, Renormalizable.

D>2: dim(G)<0, Non-renormalizable.

D=3: Renormalizable in the sense of1/N expansion.

T. Eguchi, P.R. **D17** (1978) 611, K. Shizuya, P.R. **D21** (1980) 2327.

正則化依存

Four Fermion interaction → dim. 2(D-1) operator

↓

Non-renormalizable in four dimensions

↓

The model depends on regularization methods.

カットオフ、Pauli-Villars, Proper-time, 次元正則化

いろいろな正則化

カットオフ正則化

- 発散する積分の上限を切断
  - 4D cut

$$\int_0^\infty \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \to \frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^\Lambda dk \int d\Omega_4$$

  - 3D cut

$$\int_0^\infty \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \to \int_0^\infty \frac{dk_0}{(2\pi)^4}\int_0^\Lambda dk \int d\Omega_3$$

並進不変性を壊すが、カイラル対称性とは矛盾しない
温度、密度がΛに近づくと、切断の寄与が大きくなる？

Pauli-Villars正則化

- 仮想的な重い質量粒子の伝搬関数を引き去る

$$\boxed{\frac{1}{k^2-m^2} \rightarrow \frac{1}{k^2-m^2} - \sum_i \frac{a_i}{k^2-\Lambda_i}}$$

a_iは発散が相殺するように選ぶ

カウンター項がカイラル対称性を破る

温度、密度がΛ_iに近づくと、切断の寄与が大きくなる？

Proper-time正則化

- Proper-time積分を利用して収束因子を導入

$$\boxed{\frac{1}{(k^2-m^2)^n} \to \frac{1}{(n-1)} \int_{1/\Lambda_{PT}^2}^{\infty} d\tau \tau^{n-1} e^{-(k^2-m^2)\tau}}$$

例えば、n=1のとき、

$$\frac{1}{k^2-m^2} \to \int_{1/\Lambda_{PT}^2}^{\infty} d\tau e^{-(k^2-m^2)\tau}$$

$$= \frac{1}{k^2-m^2} e^{-(k^2-m^2)/\Lambda_{PT}^2}$$

温度、密度がΛ_iに近づくと、切断の寄与が大きくなる？

次元正則化

- 発散する積分の次元を4からDに解析接続

$$\int_0^\infty \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \to M^{4-D}\int_0^\infty \frac{d^Dk}{(2\pi)^D}$$

ループ積分の次元のみ変更して、ガンマ行列の計算等は４次元のまま行う。
ほとんどの対称性を保持

正則化依存性

有限温度、密度系

- エネルギースケール、温度、密度等が大きくなるとカットオフの寄与が鮮明に

相構造の解析

- 意図しない対称性の破れを導入してしまう可能性

模型のパラメーター

カットオフ正則化	Pauli-Villars正則化	Proper-time正則化	次元正則化
G, m_i, Λ	G, m_i, Λ_j	G, m_i, Λ_{PT}	G, m_i, D, M

パラメータの決定

パイオン
質量

パイオン
崩壊定数

クォーク
質量:仮定

結合定数、
正則化パラメータ

$\pi \to 2\gamma$
(次元正則化)

２フレーバーで解析してみる

有限温度・密度効果

虚時間形式

- 置き換えルール

$$ix_0 \to x_4 \in [0, \beta),$$

$$k^0 \to i\omega_n \ , \quad \omega_n = \begin{cases} 2n\pi T & : \ \text{boson} \\ (2n+1)\pi T & : \ \text{fermion} \end{cases}$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i} \to T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}$$

有限温度・密度効果

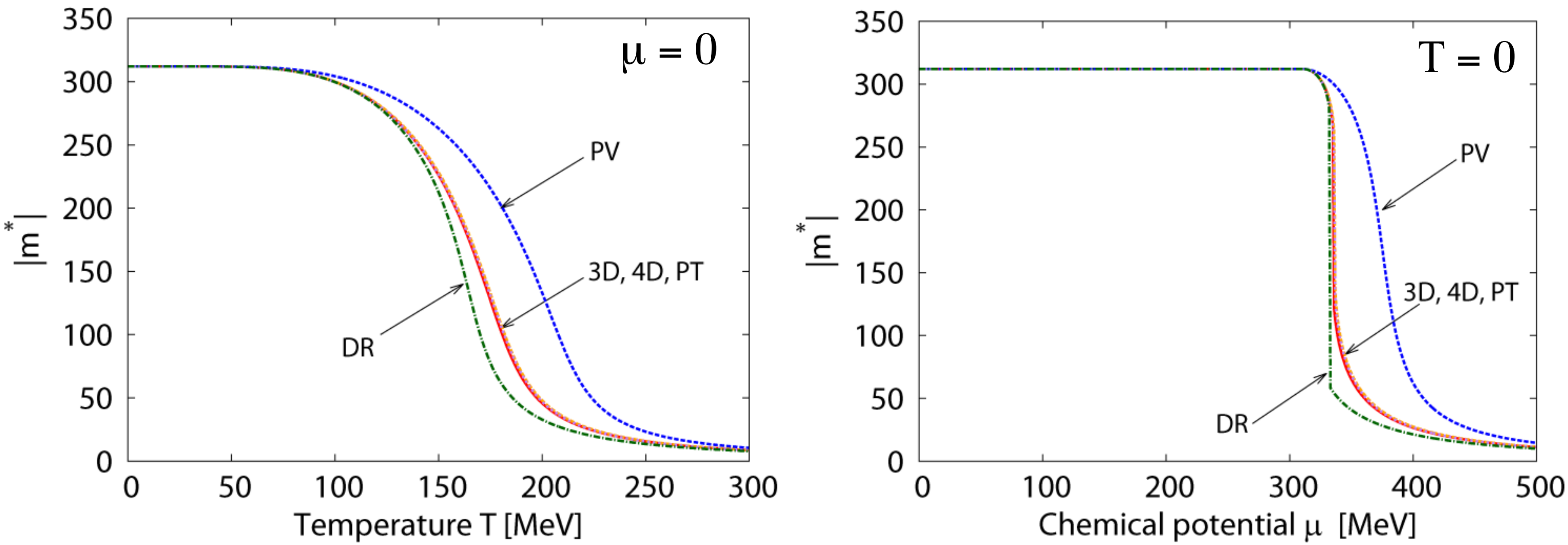
有限温度・密度による寄与は発散しないので、ゼロ温度、密度で正則化できていれば十分。

松原モードの和を途中できると、温度に比例した質量を持つ粒子の伝搬関数の和になってしまう。

有限温度・密度の寄与には正則化を適用しない？

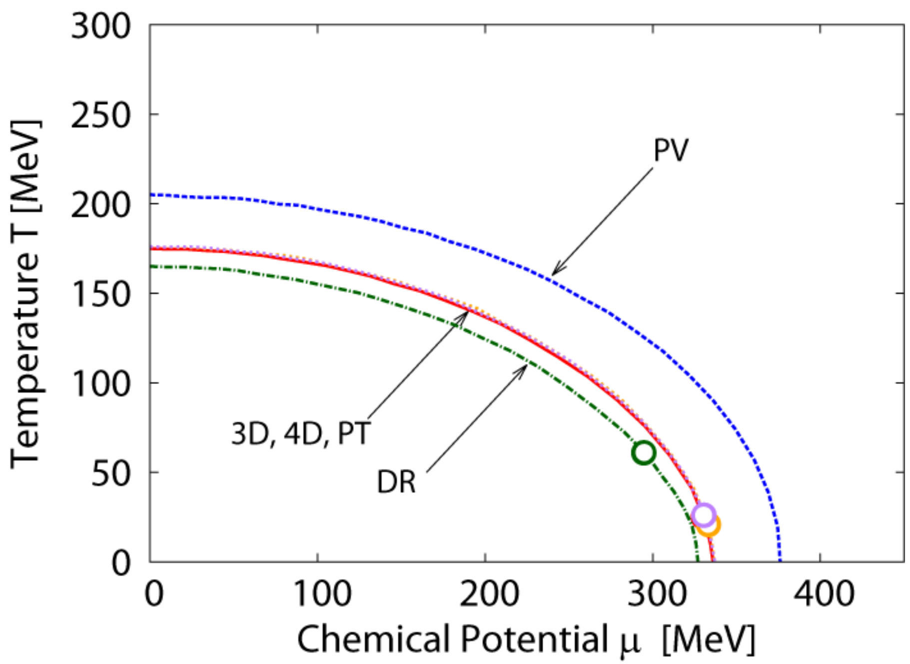
臨界温度、化学ポテンシャル

- 有限温度効果を正則化しない場合
- T=μ=0でm*=311MeVとなるパラメータで比較



T-μ相構造

- 有限温度効果を正則化しない場合
- T=μ=0でm*=311MeVとなるパラメータで比較

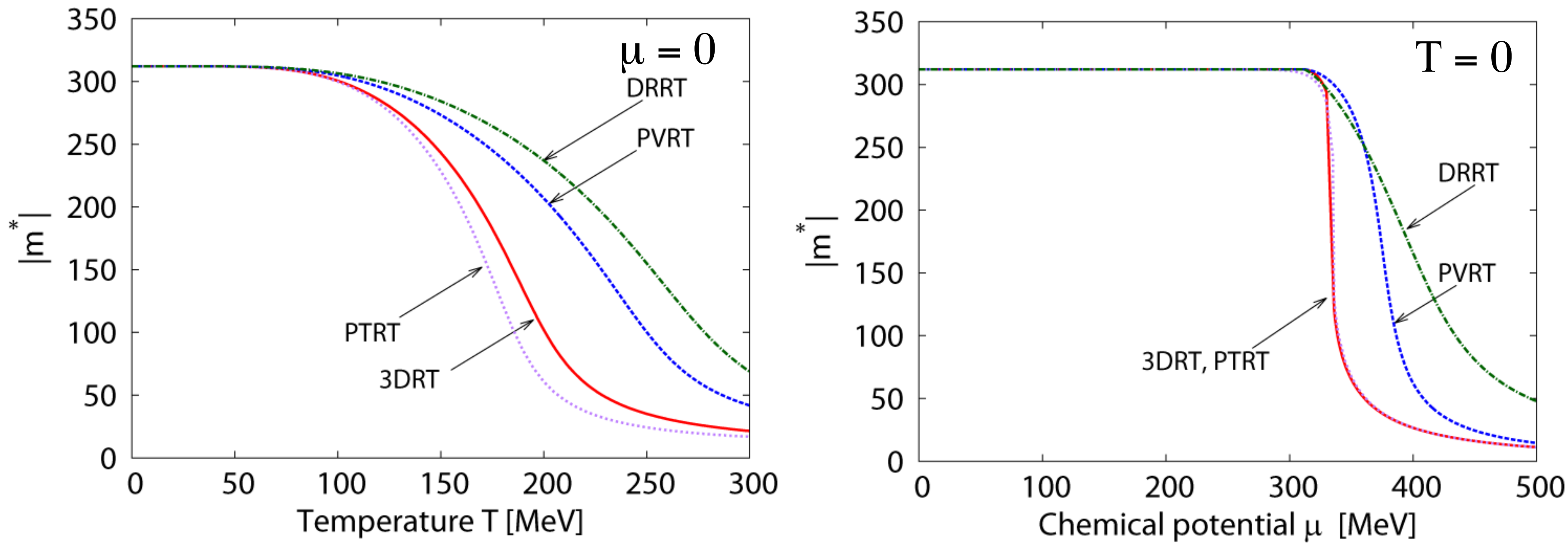


Critical end point の位置

正則化	μ_{cp}	T_{cp}
3D cutoff	330MeV	25.0MeV
4D cutoff	333	46.8
Pro. time	330	26.0
Dim. reg.	289	74.7

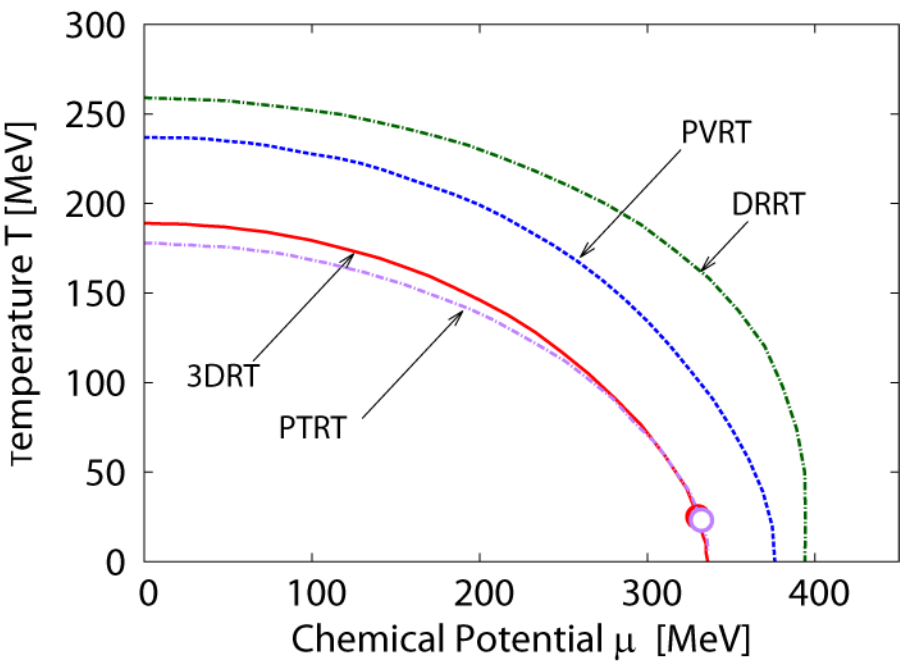
臨界温度、化学ポテンシャル

- 有限温度効果も正則化適用
- T=μ=0でm*=311MeVとなるパラメータで比較



T-μ相構造

- 有限温度効果も正則化適用
- T=μ=0でm^*=311MeVとなるパラメータで比較



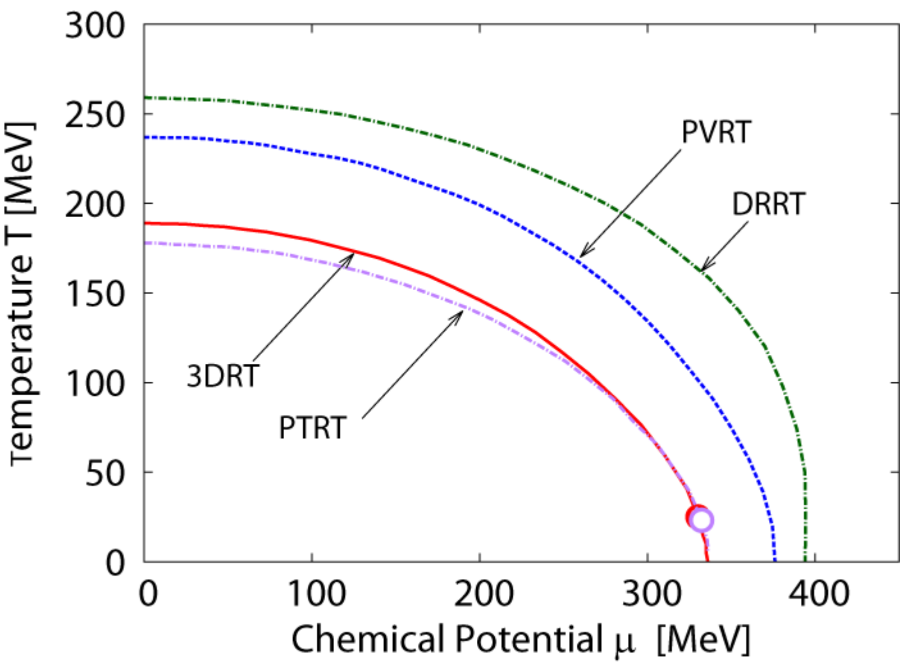
Critical end point の位置

正則化	μ_{cp}	T_{cp}
3D cutoff	330MeV	25.0MeV
Pro. time	332	23.2

T-μ相構造

- 有限温度効果も正則化適用
- T=μ=0でm*=311MeVとな

正則化により、有限温度効果が緩和する。特に、次元正則化の場合、大きな変化

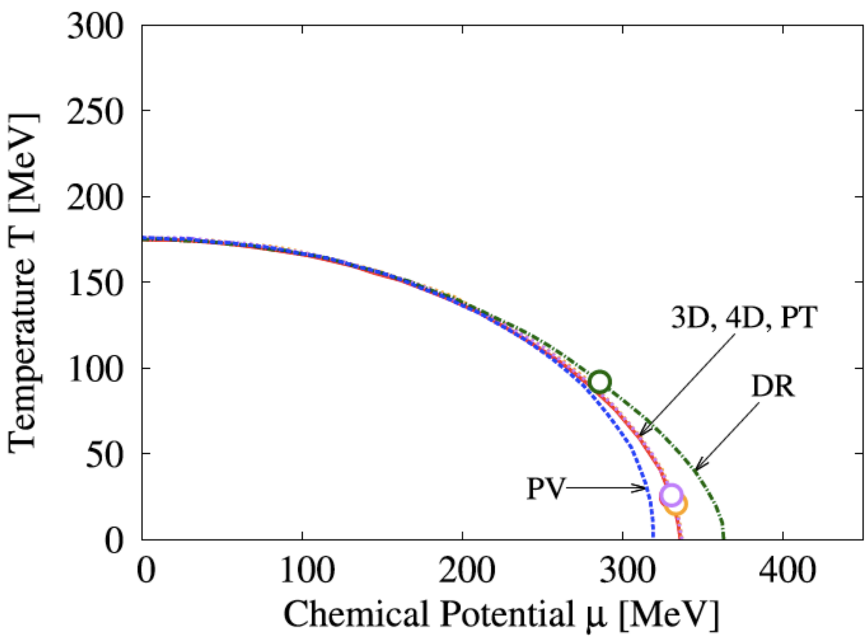


Critical end point の位置

正則化	μ_{cp}	T_{cp}
3D cutoff	330MeV	25.0MeV
Pro. time	332	23.2

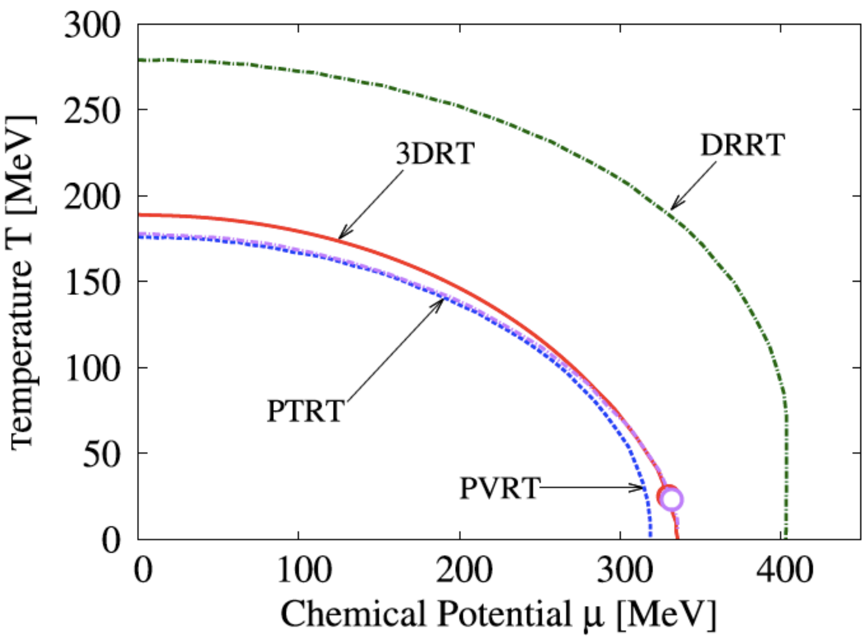
T-μ相構造

- 有限温度効果を正則化しない場合
- μ=0でT_c=175MeVとなるパラメータで比較



T-μ相構造

- 有限温度効果も正則化適用
- μ=0でT_c=175MeVとなるパラメータで比較



まとめ

まとめ

カットオフの寄与がより鮮明になると考えられる、高温、高化学ポテンシャルでの２フレーバー４体フェルミ相互作用模型について、いろいろな正則化で相構造を解析。

- インプット：パイオン質量、崩壊定数、
  $\pi \rightarrow 2\gamma$ (次元正則化)
- パラメータ：クォーク質量以外を、上記で決定
- 有限温度効果は松原形式で導入し、正則化を適用しない場合とした場合で解析

H. Kohyama, D. Kimura, and T. I., Nucl. Phys. **B896** (2015) 682.

今後の課題

有限温度・密度の現象をよく表すのは？

３フレーバーの導入
３体力（バリオン）の導入
カラー超伝導の導入
重イオン衝突での観測可能性検討
天体現象等での観測可能性検討

正則化パラメータの決定

模型のパラメータ

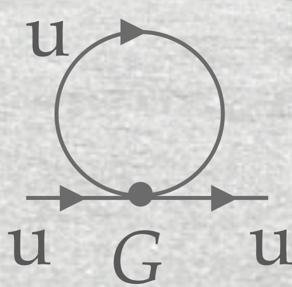
クォーク質量

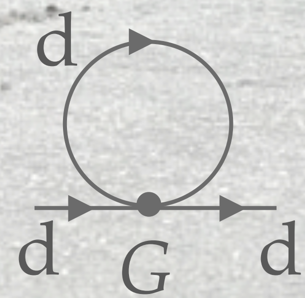
- Current quark mass

  $m_{\mathrm{u}}, m_{\mathrm{d}}, \ldots$

- Constituent quark mass

  Gap equation at the large N limit (2 flavor case)

$m_{\mathrm{u}}^* =$ 

$, m_{\mathrm{d}}^* =$ 

$, \ldots$

動的対称性の破れ

- クォーク、反クォーク対の凝縮
  At the large N limit

$$\langle \bar{u}u \rangle =$$

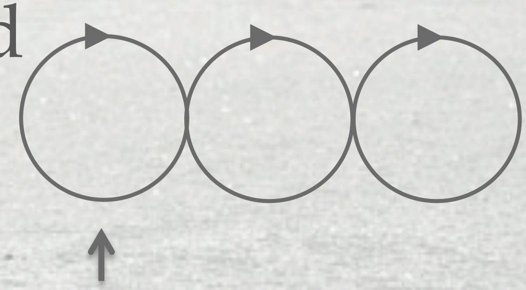
,

$$\langle \bar{d}d \rangle =$$

パイオンの質量と崩壊定数

- パイオン伝搬関数

$$\Delta_\pi(p^2) = \frac{g_{\pi qq}^2}{p^2 - m_\pi^2} \sim \cdots \qquad \cdots$$



- 崩壊定数

$$p^\mu f_\pi = \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu \gamma_5 g_{\pi qq} S(k)\gamma_5 S(k-p)\right]$$

４次元カットオフ正則化

m_u	Λ	$G \cdot 10^{-6}$	m^*	$\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$
3.0	1397	1.80	198	-300
5.0	1027	3.64	242	-253
8.0	768	8.88	369	-216

(MeV)

３次元カットオフ正則化

m_u	Λ	$G \cdot 10^{-6}$	m^*	$\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$
3.0	942	2.00	220	-300
4.0	781	3.09	255	-272
5.0	665	4.71	311	-253
5.5	609	6.26	375	-245

(MeV)

Pauli-Villars正則化

m_u	Λ	$G \cdot 10^{-6}$	m^*	$\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$
3.0	1420	1.77	195	-300
5.0	1071	3.45	229	-253
8.0	853	6.78	283	-216
10.0	778	9.64	312	-198

(MeV)

Proper-time正則化

m_u	Λ	$G \cdot 10^{-6}$	m^*	$\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$
3.0	1464	1.61	178	-300
5.0	1097	3.07	204	-253
8.0	849	5.85	245	-216
10.0	755	8.13	265	-198

(MeV)

次元正則化

m_u	D	$GM_0^{4-D} \cdot 10^{-4}$	m^*	$\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$
3.0	2.37	-113.4	-570	-299
4.0	2.47	-87.9	-543	-272
5.0	2.56	-58.7	-519	-253
8.0	2.78	-24.1	-459	-217

(MeV)