

# 冷却原子系によるU(1)gauge-Higgsモデルの 量子シミュレーション

2015/8/31

熱場の量子論とその応用

共同研究者

近畿大 笠松健一、 近畿大 坂根真矢  
京都大 高橋義朗、 名工大 一瀬郁夫  
近畿大 松居哲生

名工大 久野義人

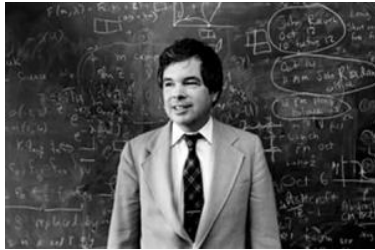
1. 光格子上の拡張Bose-Hubbard modelから  
U(1) lattice gauge-Higgsモデルの  
対応と構築法

2. GP方程式を用いた  
U(1) lattice gauge-Higgsモデルの  
ダイナミクス  
(特に閉じ込め相の電束の振る舞い)

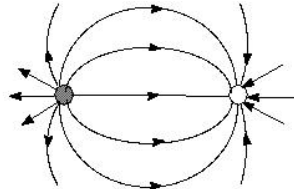
最近取り組んでいること

3. 光格子(3+1)次元モデルへの拡張  
GP方程式によるチャージ間張力の計算

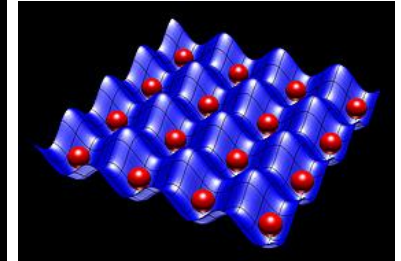
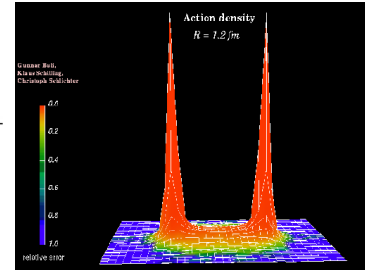
# はじめに



(a)



(b)



- **格子ゲージ理論の量子シミュレーションとは?**

光格子上の原子系の**制御性**を上手く利用して

原子系のモデルを格子ゲージ理論のモデルに見立てこれまでの理論を検証し、さらに新しい知見を得ること。

理論が貢献できそうなこと

光格子上原子系での構築法を提案したい



実際に原子系の上でゲージ理論の物理量はどのように観測され  
実験で観測できるかを预言したい

**系の時間発展解析の手法(GP方程式)を用いて、  
格子ゲージ理論のダイナミクスを解析できるのではない  
か？**

さらに、格子ゲージ理論のみ範囲内でもゲージ理論におけるダイナミクスの探求は  
未だに未開ではないだろうか？

# 1. 光格子上の2D Bose-Hubbard modelと U(1) lattice gauge-Higgsモデルの対応

[2]K. Kasamatsu, I. Ichinose, and T. Matsui, Phys. Rev. Lett. 111, 115303 (2013).

# 拡張Bose-Hubbard model

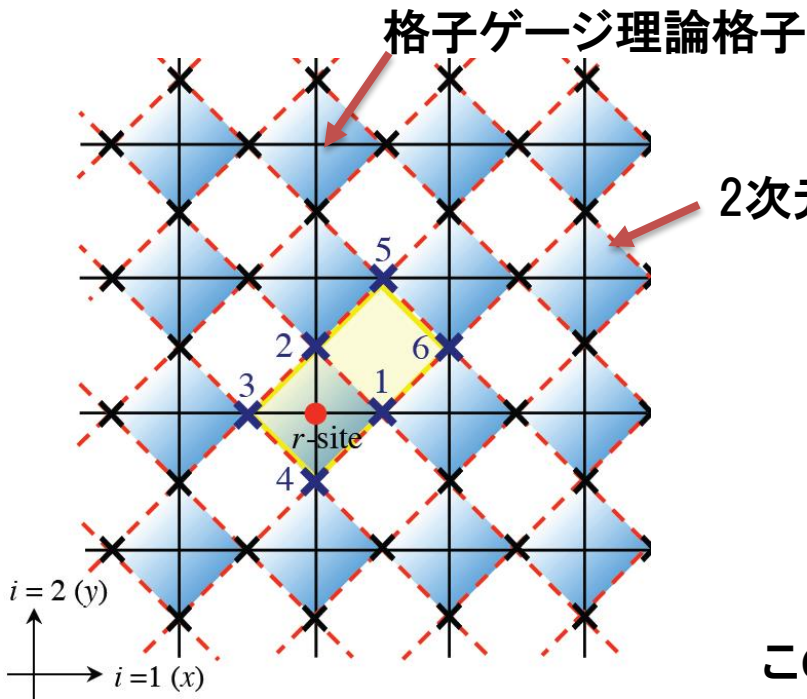
$$H = - \sum_{r,a \neq b} J_{a,b} \hat{\psi}_{r,a}^\dagger \hat{\psi}_{r,b} + \frac{V_0}{4} \sum_{r,a} \hat{\rho}_{r,a}^2$$

$$+ \sum_{r,a \neq b} \frac{V_{ra,rb}}{2} \hat{\rho}_{r,a} \hat{\rho}_{r,b}$$

On-site斥力  
NN- NNNの密度-密度相互作用  
dipole-dipole interaction, など

これを上手くチューニングしてGauss則を満たすような相互作用項に変形したい

## 光格子と格子ゲージ理論格子の対応



2次元正方光格子

格子ゲージ理論格子のリンクの上に  
BEC状態の原子を置くことに対応

BECの位相 ⇒ ベクトルポテンシャル

この対応をもとにU(1)gauge-Higgsモデルを構築する

各リンクにのっている原子場を分割して、低エネルギー有効理論を考えてみる

$$\hat{\Psi}_{ri} = \sqrt{\hat{\rho}_{ri}} e^{i\hat{\theta}_{ri}}, \quad \hat{\rho}_{ri} = \rho_0 + \hat{\eta}_{ri}$$

平均粒子密度    密度揺らぎ

原子系でのカノニカル共役関係をU(1)ゲージ理論と対応させると

$$\{\hat{\eta}_{ri}, \hat{\theta}_{ri}\}, \text{ conjugate variables}$$



$$\hat{E}_{r,i} = -\hat{\eta}_{r,i} \quad \hat{A}_{r,i} = \hat{\theta}_{r,i}$$

電場 = 原子の密度ゆらぎ

BECの位相  $\Rightarrow$  ベクトルポテンシャル

有効作用は拡張Bose Hubbardモデルから  $O(\eta_{r,i}^2)$ まで展開して

$$H_a = \frac{1}{2\gamma^2} \sum_r \left( \sum_i \nabla_i \hat{\eta}_{r,i} \right)^2 + \frac{V'_0}{2} \sum_{r,i} \hat{\eta}_{r,i}^2 + H_L$$
$$H_L = -2J\rho_0 \sum_r \left[ \cos(\hat{\theta}_{r,1} - \hat{\theta}_{r,2}) + \cos(\hat{\theta}_{r,1} - \hat{\theta}_{r,4}) \right. \\ \left. + \cos(\hat{\theta}_{r,2} - \hat{\theta}_{r,3}) + \cos(\hat{\theta}_{r,3} - \hat{\theta}_{r,4}) \right]$$

この有効理論はU(1)gauge-Higgs モデルと解釈できる

$$H_a = \frac{1}{2\gamma^2} \sum_r \left( \sum_i \nabla_i \hat{\eta}_{r,i} \right)^2 + \frac{V'_0}{2} \sum_{r,i} \hat{\eta}_{r,i}^2 + H_L$$

Gauss則
電場の項

↓
↓

磁場プラケット項は考えない

Hopping項からの寄与

ここで、長距離相互作用をチューニングして出てくるGauss則項は

$$\gamma^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \nabla \eta_{r,i} = 0$$

$$\gamma^2 \neq 0 \Rightarrow \nabla \eta_{r,i} = |\phi|^2 = \rho$$

Gauss則のゆらぎをコントロール

hopping項は何を意味するのか?

$$H_L = -2J\rho_0 \sum_r \left[ \cos(\hat{\theta}_{r,1} - \hat{\theta}_{r,2}) + \cos(\hat{\theta}_{r,1} - \hat{\theta}_{r,4}) \right. \\ \left. + \cos(\hat{\theta}_{r,2} - \hat{\theta}_{r,3}) + \cos(\hat{\theta}_{r,3} - \hat{\theta}_{r,4}) \right]$$

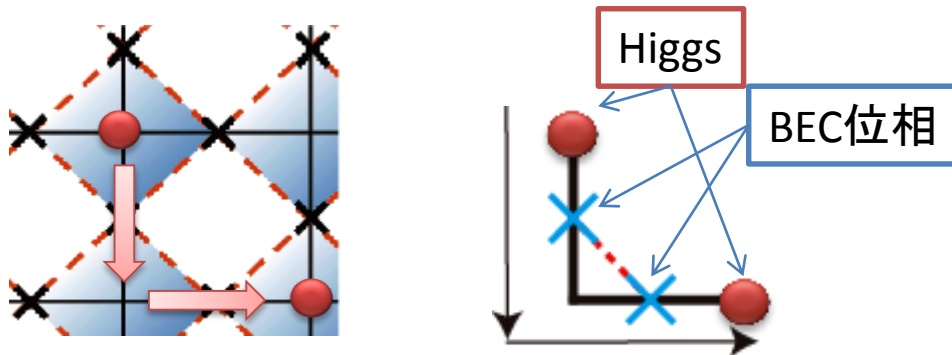


# Hopping項はL字型に結合するHiggsカップリング項である

Higgs場 (London limit)

$$\phi_r = e^{i\varphi_r}$$

これがhopping項の中に存在しているとする



$$H'_L = -J\rho_0 \sum_{r,\mu<\nu} \left[ \cos(\varphi_{r+x} + \theta_{r,1} - \theta_{r,2} - \varphi_{r+y}) + \cos(\varphi_{r+x} + \theta_{r,1} - \theta_{r,4} - \varphi_{r-y}) \right. \\ \left. + \cos(\varphi_{r+y} + \theta_{r,2} - \theta_{r,3} - \varphi_{r-x}) + \cos(\varphi_{r-x} + \theta_{r,3} - \theta_{r,4} - \varphi_{r-y}) \right]$$

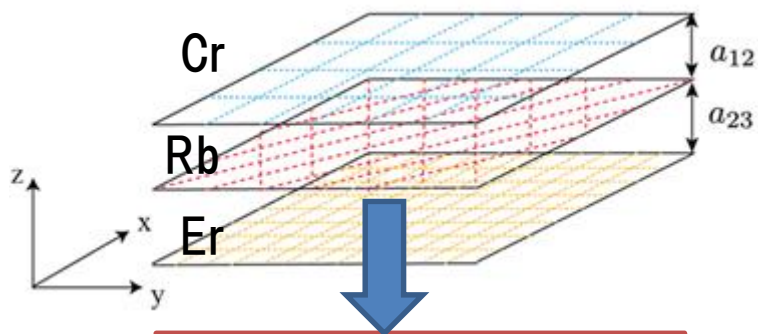
$$\varphi_r = 0 \quad \text{ユニタリーゲージを考えればよい}$$

Higgs場は仮想的な場としてとらえるが、このhopping項はGauss則を破れを記述する (この破れは原子系の上でコントロール可能である)

# Gauss則項の実験的構築法の提案を一つ

$$\sum_{r,a \neq b} \frac{V_{ra,rb}}{2} \hat{\rho}_{r,a} \hat{\rho}_{r,b} \longrightarrow \frac{1}{2\gamma^2} \sum_r \left( \sum_i \nabla_i \hat{\eta}_{r,i} \right)^2$$

Dipolar原子を上手く使う



U(1)gauge-Higgsモデル

三層構造の光格子

層で異なる格子形状

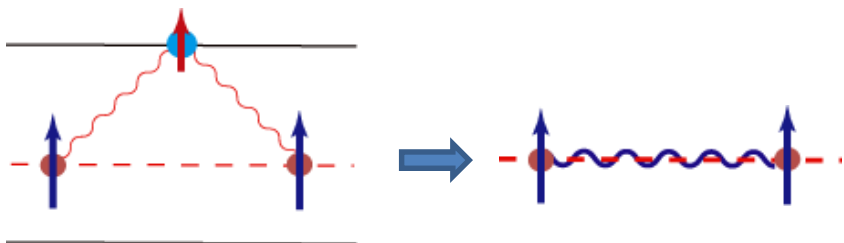
層間の間隔の調整

原子密度

層間のdipole-dipole相互作用を考える

2次摂動で真ん中の層の有効相互作用を解析的に導く

⇒ Gauss側を満たす相互作用を作る



## 2. GP方程式を用いた

U(1) lattice gauge-Higgsモデルのダイナミクス  
(特に閉じ込め相の電束の振る舞い)

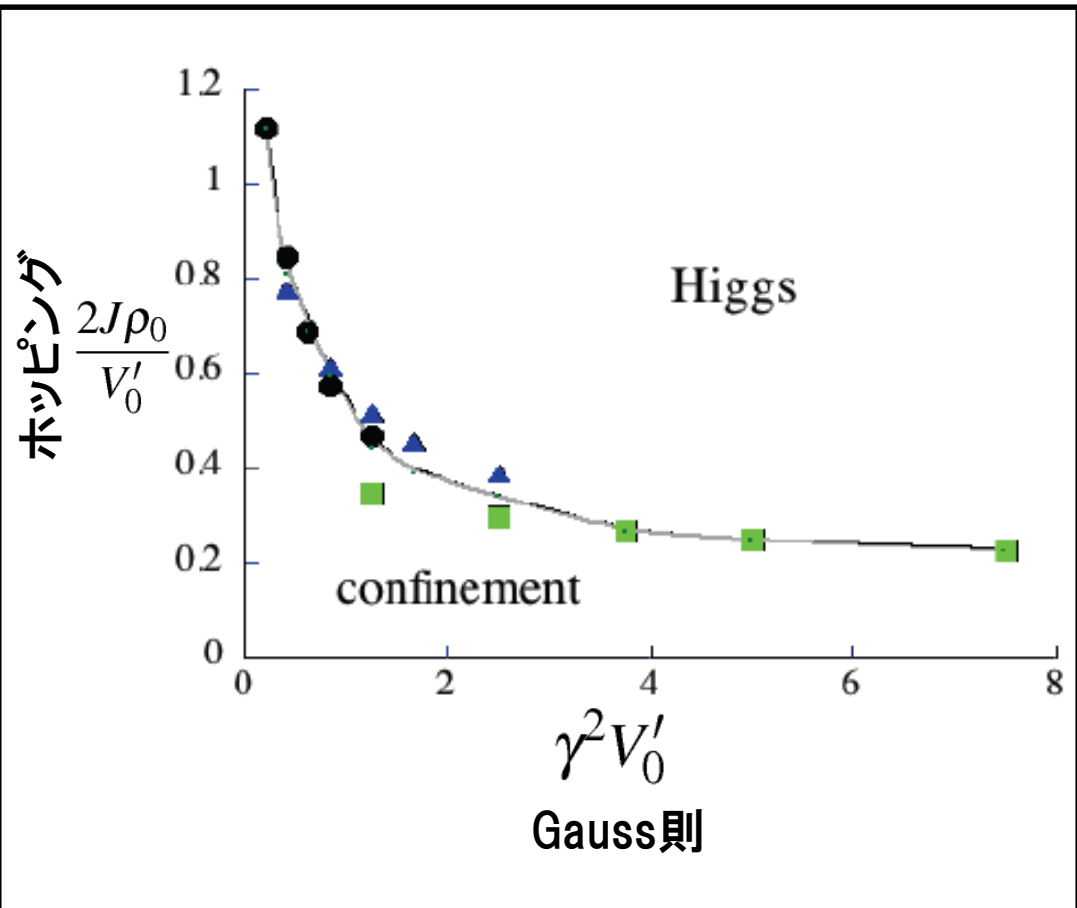
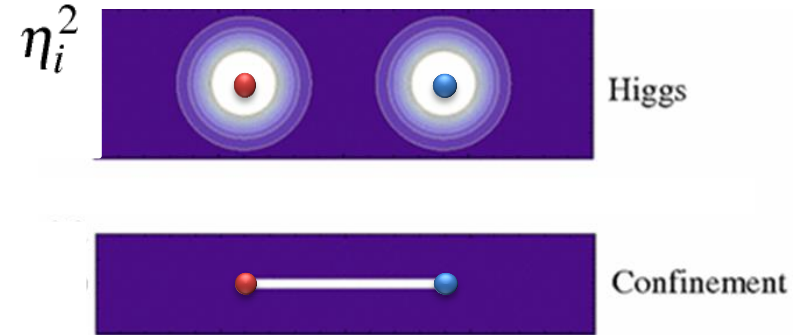
[3] Y. K. K. Kasamatsu, Y. Takahashi, I. Ichinose, and T. Matsui,  
New J. Phys. 17, 063005 (2015).

# Monte-Carlo法から予想される平衡状態での相構造

$$H_a = \frac{1}{2\gamma^2} \sum_r \left( \sum_i \nabla_i \hat{\eta}_{r,i} \right)^2 + \frac{V'_0}{2} \sum_{r,i} \hat{\eta}_{r,i}^2 + H_L$$

$$H_L = -2J\rho_0 \sum_r \left[ \cos(\theta_{r,1} - \theta_{r,2}) + \cos(\theta_{r,1} + \theta_{r,4}) \right. \\ \left. + \cos(\theta_{r,2} + \theta_{r,3}) + \cos(\theta_{r,3} - \theta_{r,4}) \right]$$

## Staticチャージ間での 原子の密度ゆらぎの分布(予想)



相の対応

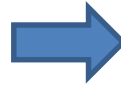
Higgs相 ⇒ 超流動相

閉じ込め相 ⇒ 位相のコヒーレンスが弱い

# Full Gross-Pitaevskii equations (GPE)

Gauss則を満たす相互作用をもつ拡張Bose Hubbardモデル.

$$H = - \sum_{r,a \neq b} J_{a,b} \hat{\psi}_{r,a}^\dagger \hat{\psi}_{r,b} + \frac{V_0}{4} \sum_{r,a} \hat{\rho}_{r,a}^2 + \sum_{r,a \neq b} \frac{V_{ra,rb}}{2} \hat{\rho}_{r,a} \hat{\rho}_{r,b},$$



$$H_a = \frac{1}{2\gamma^2} \sum_r \left( \sum_i \nabla_i \hat{\eta}_{r,i} \right)^2 + \frac{V'_0}{2} \sum_{r,i} \hat{\eta}_{r,i}^2 + H_L$$

$$H_L = -2J\rho_0 \sum_r \left[ \cos(\hat{\theta}_{r,1} - \hat{\theta}_{r,2}) + \cos(\hat{\theta}_{r,1} + \hat{\theta}_{r,4}) + \cos(\hat{\theta}_{r,2} + \hat{\theta}_{r,3}) + \cos(\hat{\theta}_{r,3} - \hat{\theta}_{r,4}) \right]$$

## Gross-Pitaevskii equation

$$i \frac{\partial \psi_{r,i}}{\partial t} = -J(\psi_{r,\bar{i}} + \psi_{r-\bar{i},\bar{i}} + \psi_{r+i,\bar{i}} + \psi_{r+i-\bar{i},\bar{i}}) + \left[ \left( V'_0 + \frac{2}{\gamma^2} \right) |\psi_{r,i}|^2 + \frac{1}{\gamma^2} (|\psi_{r,\bar{i}}|^2 + |\psi_{r-\bar{i},\bar{i}}|^2 + |\psi_{r+i,\bar{i}}|^2 + |\psi_{r+i-\bar{i},\bar{i}}|^2 + |\psi_{r-i,i}|^2 + |\psi_{r+i,i}|^2) \right] \psi_{r,i}$$

London limit

~~$$|\psi_{r,i}|^2 = \rho \sim \rho_0 + \eta$$~~

Higgsカップリング項の振幅が揺らいでいるモデル

Higgs相と閉じ込め相の境界ははっきりする。

[6]S. Wenzel, et.al,  
Phys. Rev. Lett. **95**, 051601 (2005).



Let's see our result

## GP方程式の初期状態の設定

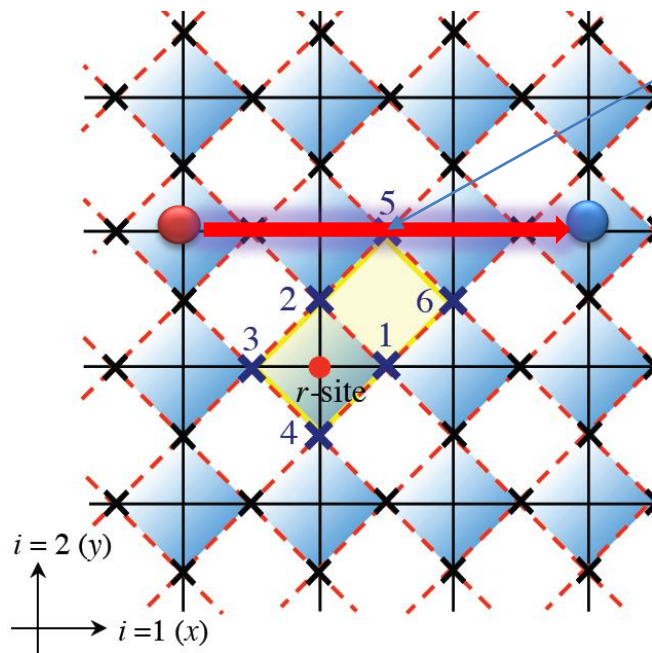
サイト上に二つのstaticチャージペアがあると考える



$$E_{r,\mu}$$

その間に電場の励起として一本のFluxを置く

原子系では密度の励起に対応している



原子の密度揺らぎ = 電場の大きさ

$$\eta_i = -E_i$$

GP時間発展で  
電束が減衰したら

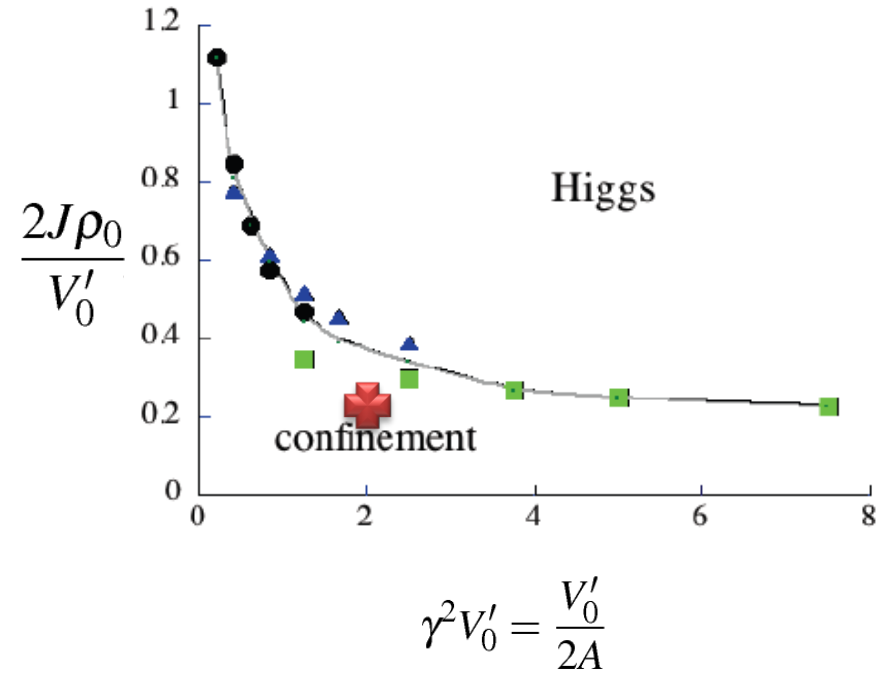
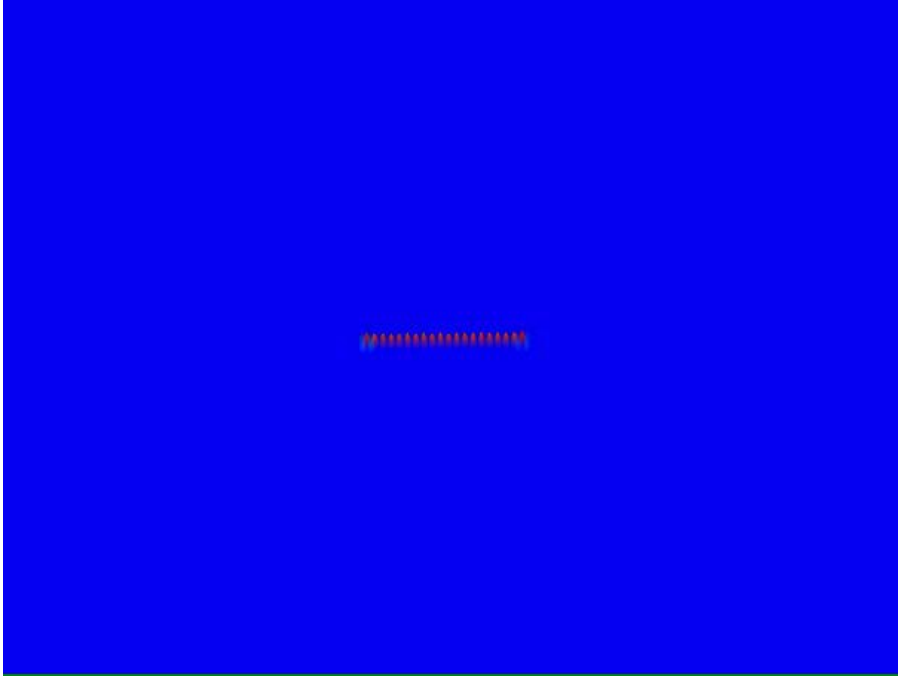
→ Higgs相を観測している.

電束が安定的に存在する

→ 閉じ込め相が安定である.

閉じ込め相

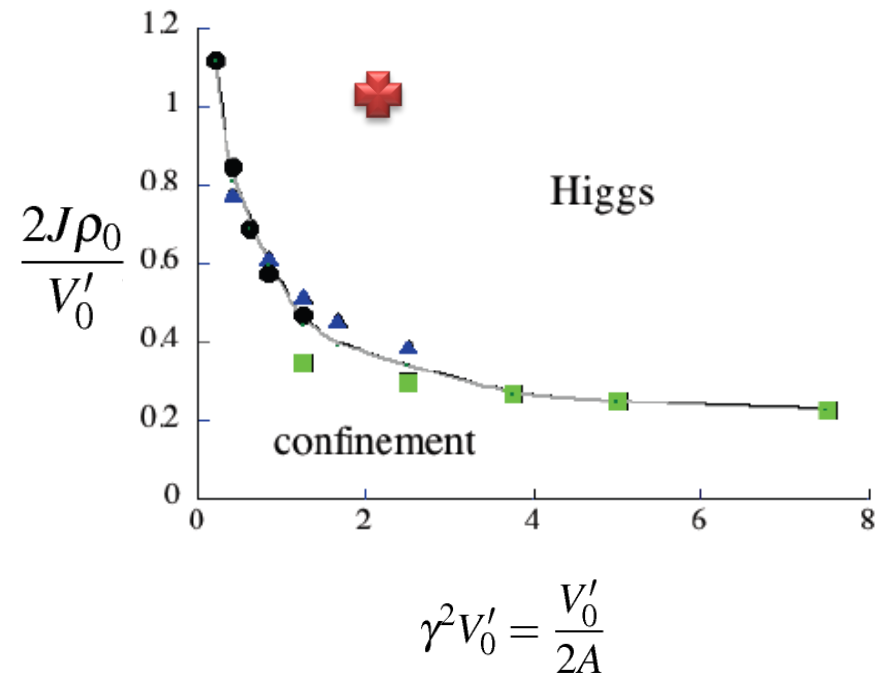
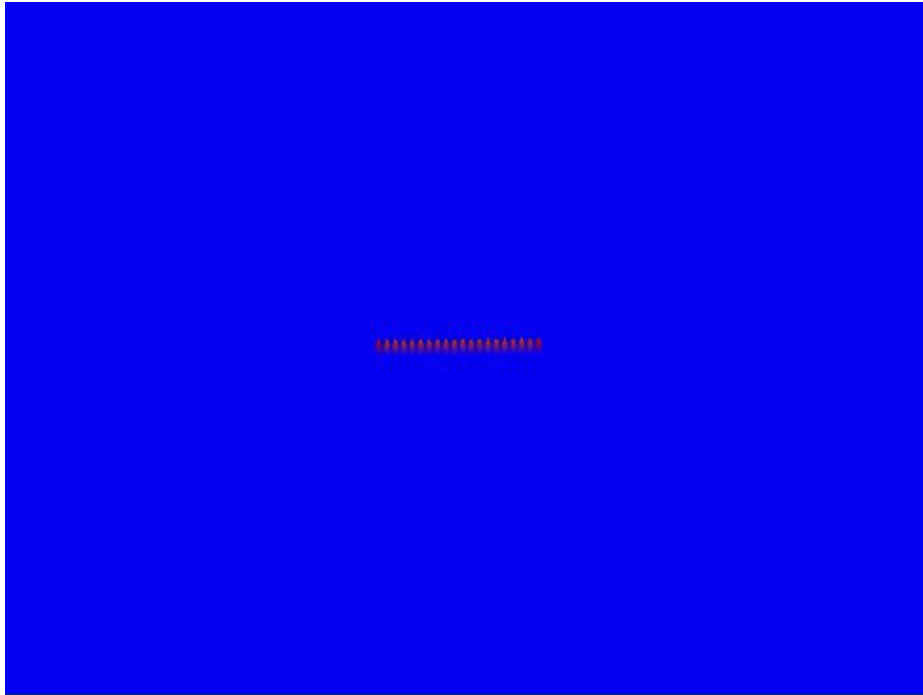
$$\eta_i^2$$



$$\gamma^2 = 0.5, V'_0 = 1, J = 1$$

閉じ込め相 → fluxは振動しながら安定に存在する.

# Higgs相

 $\eta_i^2$ time  $\sim 100$  msec

$$\gamma^2 = 1.2, V'_0 = 1, J = 1$$

- Higgs相では、閉じ込めfluxの形態は消え、staticチャージ間から湧き出す原子密度波が等方的に広がる。



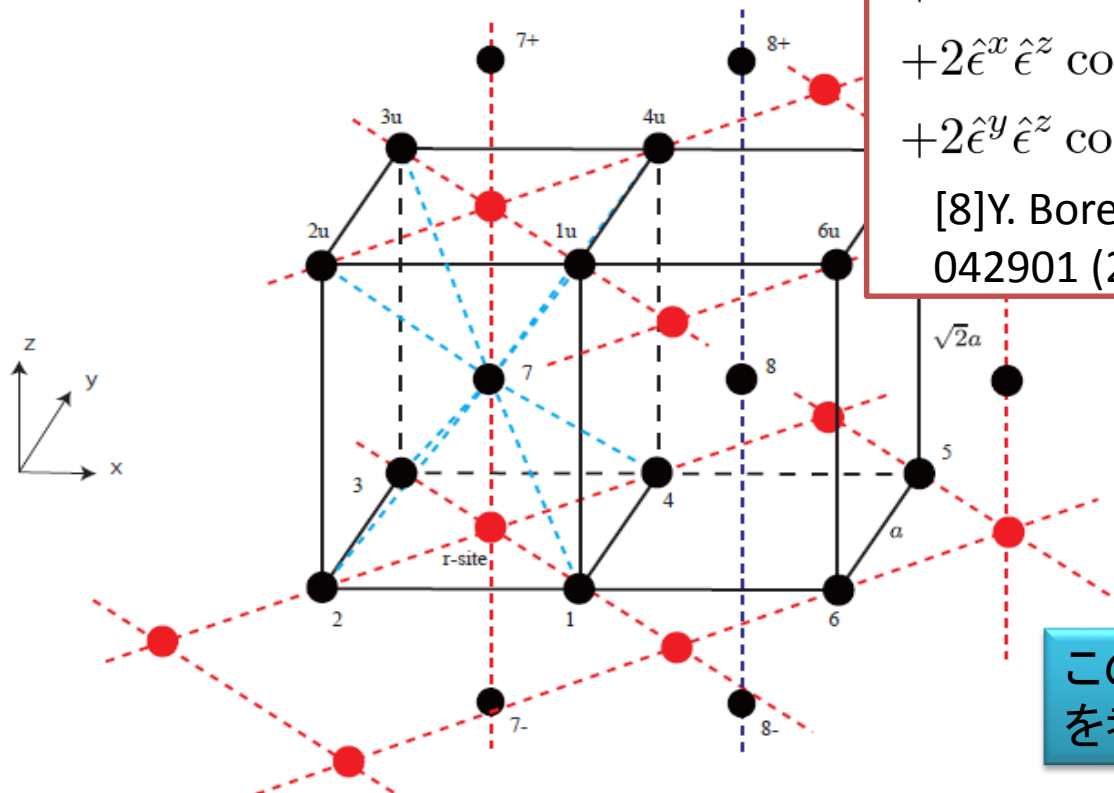
最近取り組んでいること

### 3. 光格子(3+1)次元モデルへの拡張 GP方程式によるチャージ間張力の計算

# 3次元モデルへの拡張の試み

## 3次元 体心立方光格子の提案

- 光格子ポテンシャルミニマム
- 格子ゲージ理論格子



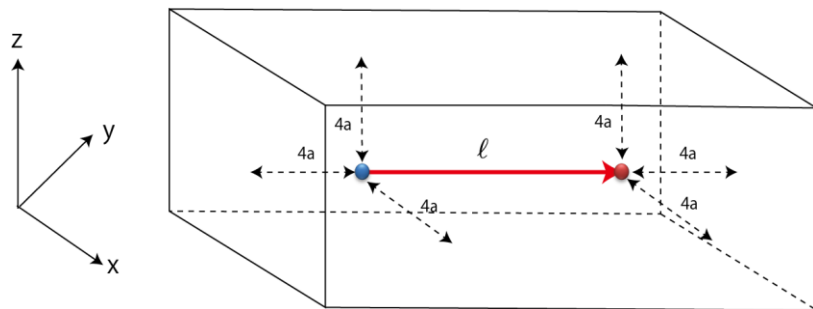
$$\mathbf{A}^{(x)}(x, t) = (E/2)\hat{\epsilon}^x \exp(+i(k_L x + \phi_x)) + (E/2)\hat{\epsilon}^x \exp(-i(k_L x + \phi_x)).$$

$$|\mathbf{A}^{(x)}(x, t) + \mathbf{A}^{(y)}(y, t) + \mathbf{A}^{(z)}(z, t)|^2 = E^2 [\cos^2(k_x x) + \cos^2(k_y y) + \cos^2(k_z z) + 2\hat{\epsilon}^x \hat{\epsilon}^y \cos(k_x x) \cos(k_y y) + 2\hat{\epsilon}^x \hat{\epsilon}^z \cos(k_x x) \cos(k_z z) + 2\hat{\epsilon}^y \hat{\epsilon}^z \cos(k_y y) \cos(k_z z)]$$

[8]Y. Boretz and L. E. Reichl, Phys. Rev. E **91**, 042901 (2015).

この格子の上でBose Hubbardモデルを考え、U(1)gauge-Higgsモデルを考える

# 3次元下でのGP方程式による閉じ込めflux張力の算出



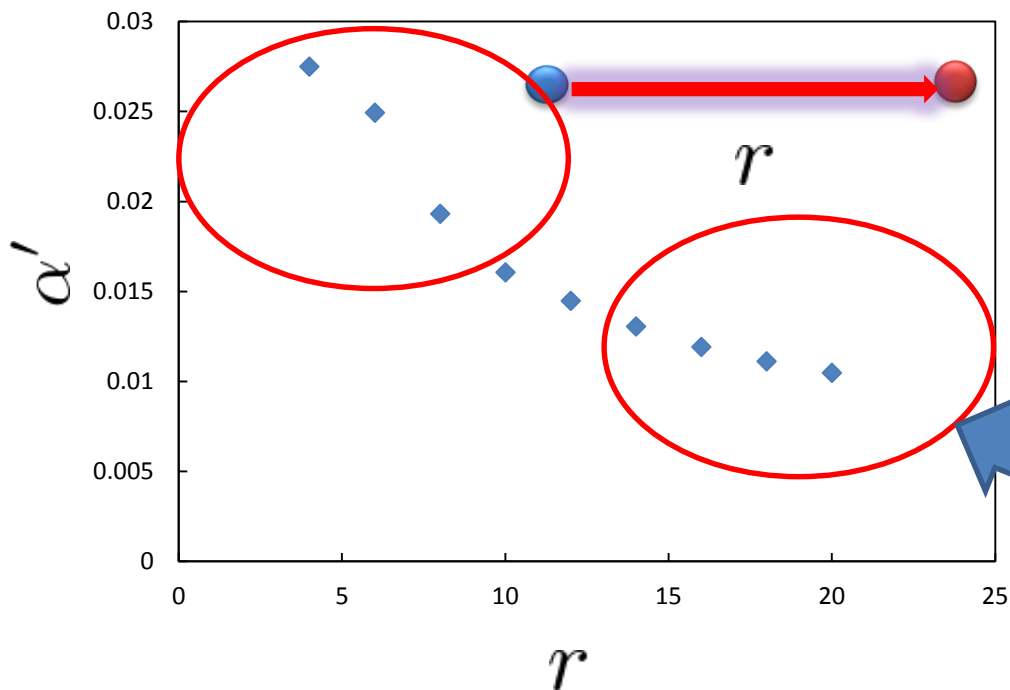
閉じ込め相

3次元空間内  
メソンの1本のflux

GP方程式を解く

系全体のflux周辺のエネルギーの変動  
とエネルギーの時間発展を計測し、  
チャージ間の張力を算出

Time averaged string tension ( $O(100\text{msec})$ )



$$V(r) = \alpha' r$$

張力 Fluxの長さ

各fluxの長さによる張力の算出

長さが大きくなると、  
線型ポテンシャルに近づく

# Summary

- ・ 極低温原子系においてGP方程式を用いて閉じ込めfluxの観測:

Higgs相 → 閉じ込めfluxは次第に消失、原子密度波が生成・伝播  
閉じ込め相 → 閉じ込めfluxは振動しながら安定的に存在する.

これらは冷却原子系の原子密度ゆらぎを観測すれば実験的に確認できる

- ・ 冷却原子系の解析でよく利用されるGross-Pitaevskii方程式は格子ゲージ理論の物理的なダイナミクス計測においても有効である.
- ・ Gross-Pitaevskii方程式を用いて様々なゲージモデルのfluxのダイナミクスや、磁場、モノポール等の計測が可能である(原理上)

冷却原子系上での量子シミュレーションとして、様々なゲージモデルの構築方法が未だに不足している状況であり理論的提案が望まれている.

# REFERENCES

## Optical lattice:

- I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 .
- M. Greiner, et al, *Nature* **415**, 39–44 (2002).
- D. Jaksch, and P. Zoller, *Ann. Phys. (N.Y.)* **315**, 52 (2005).
- T. Lahaye et al, *Rep. Prog. Phys.* **72** 126401 (2009).

## Quantum Simulation of Lattice gauge theory (review article):

- U.-J. Wiese, arXiv:1305.1602v1 (2013).
- E. Zohar, J. I. Cirac, B. Reznik, arXiv:1503.02312v1 (2015).
- J. I. Cirac and P. Zoller, *Nat. Phys* **8**, 264–266 (2012).
- K. Kasamatsu, I. Ichinose, and T. Matsui, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 115303 (2013).
- Y.K., K. Kasamatsu, Y. Takahashi, I. Ichinose, T. Matsui, arXiv:1412.7605.

補足

# Equation of motion: Gauge-Higgs equation (GHE)

The time-dependent equations can be derived from the real-time path integral formulation under **saddle-point approximation**.

The operators of the original Hamiltonian are replaced by the **c-number fields**.

$$H_a = A \sum_{i \in \text{odd}} (\eta_i + \eta_{i+x} - \eta_{i+x+y} - \eta_{i+y})^2 + \frac{V'_0}{2} \sum_i \eta_i^2 - \tilde{J}' \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j)$$

$$L = -i \sum_i \eta_i \frac{d\theta_i}{dt} - H_a$$

$$\frac{d}{dt} \eta_i = \tilde{J}' \sum_j \sin(\theta_i - \theta_j)$$

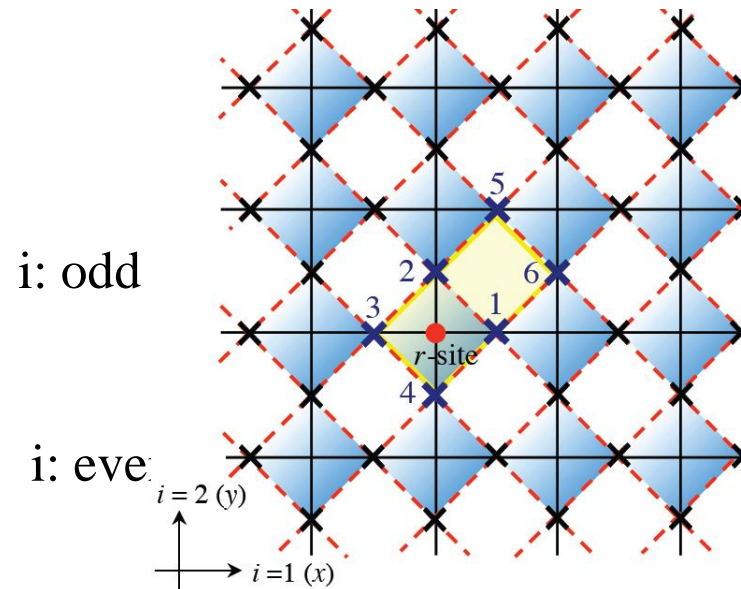
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta_i &= -2A(\eta_i - \eta_{i+x} + \eta_{i+x+y} - \eta_{i+y}) \\ &\quad - 2A(-\eta_{i-x-y} - \eta_{i-y} + \eta_i + \eta_{i-x}) - V'_0 \eta_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta_i &= -2A(-\eta_{i-x} - \eta_i + \eta_{i+y} + \eta_{i-x}) \\ &\quad - 2A(-\eta_{i-y} - \eta_{i-y+x} + \eta_i + \eta_{i+x}) - V'_0 \eta_i \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{2\gamma^2} \quad \text{Gauss's law strength}$$

$$\frac{V'_0}{2} \quad \text{on-site repulsion}$$

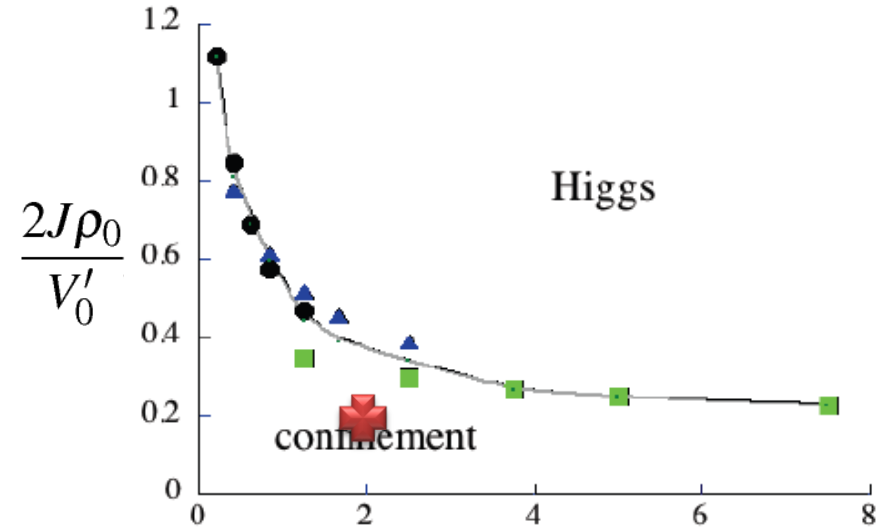
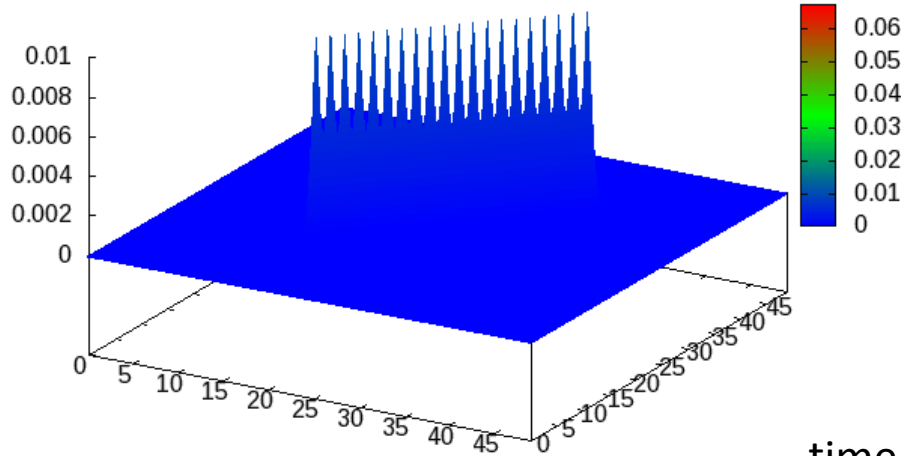
$$\tilde{J}' = 2J\rho_0 \quad \text{Hopping strength}$$



**We can simulate the real-time dynamics!**

First, we will show a numerical result in confinement regime

Confinement phase



time  $\sim 100$  msec

$$\gamma^2 = 2, V'_0 = 1, J = 0.1 \quad \rho_0 = 1$$

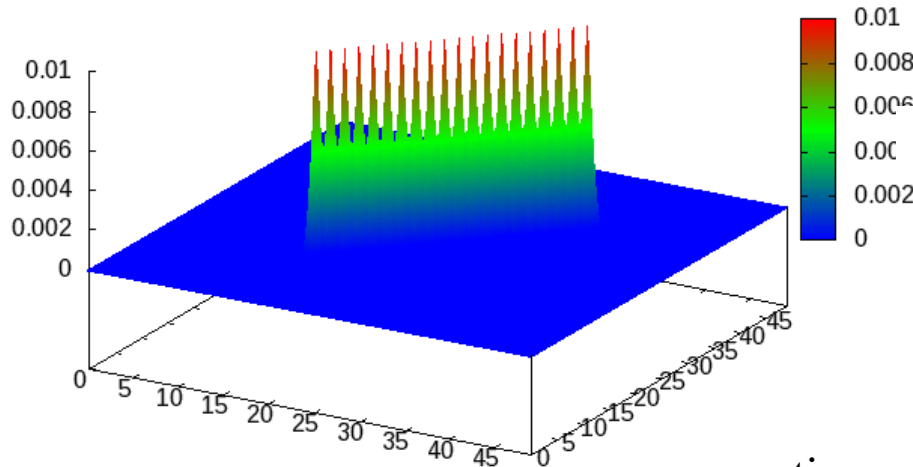
$$\gamma^2 V'_0 = \frac{V'_0}{2A}$$

Flux string is conserved with **oscillating**, and the frequency and amplitude depend on the strength of Gauss's law, on-site interaction and hopping strength.



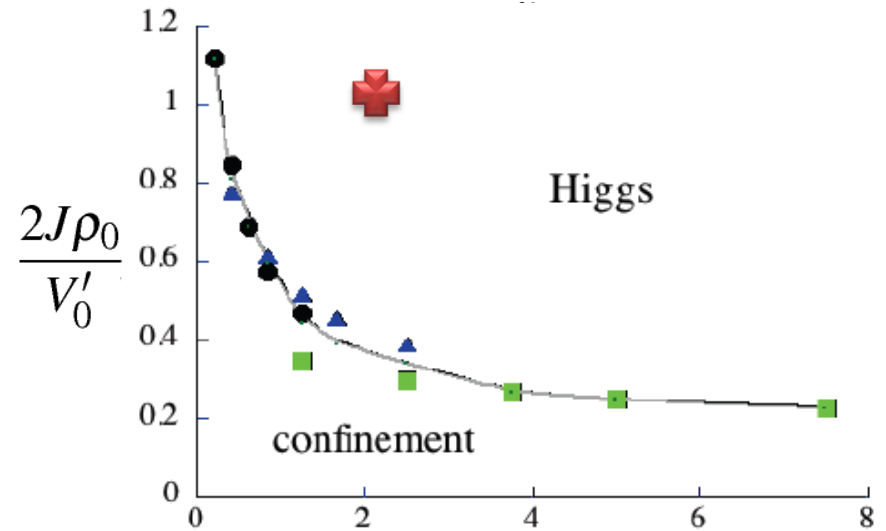
Next, we will show a numerical result in Higgs regime

Higgs phase phase



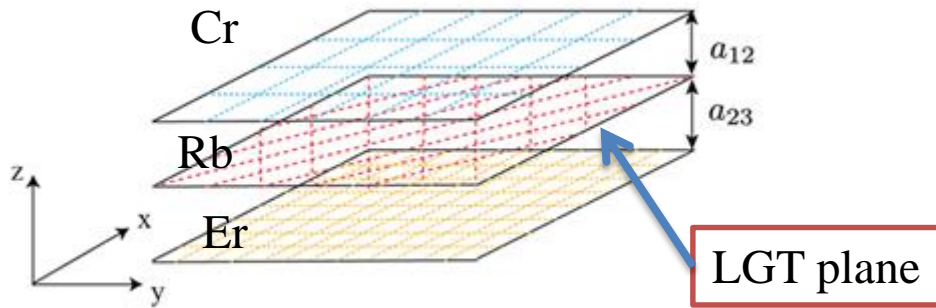
$$\gamma^2 = 2, V'_0 = 1, J = 1 \quad \text{time} \sim 100 \text{ msec}$$

$$\rho_0 = 1$$

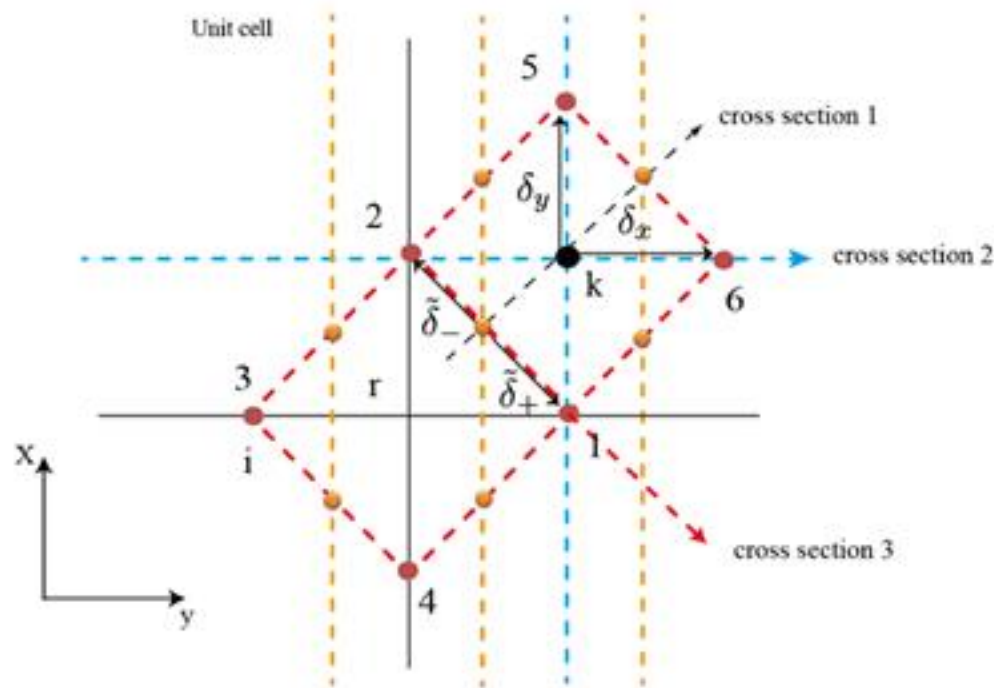


We found **a intermittent density-wave emission**.

Since our GHE corresponds to the **London limit**, in which **the amplitude fluctuation of the Higgs field is absent**, the phase boundary becomes **less clear** because the two phases connect with each other through crossover.



The unit cell of the projective mapping of the all layers.



1. We create triple layer system.

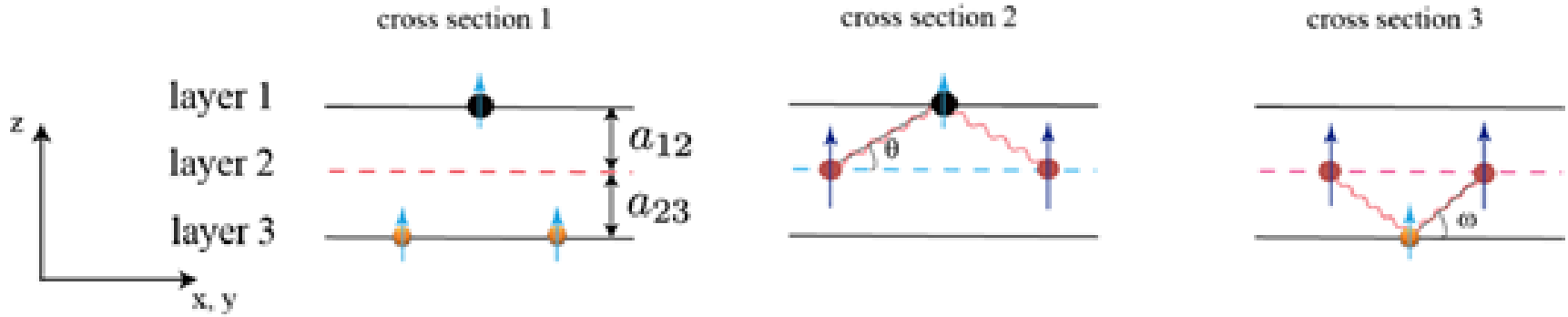
Upper Cr = B boson  
Middle Rb = A-boson  
Lower Er = C-boson

In the middle layer, the U(1)GHM system can be realized.

2. Each species of bosons is assumed to have a dipole, perpendicular to the plane of the layer. By treating the DDI between A-boson and B-boson as a perturbation, the second-order perturbation theory generates an effective inter-site interaction between the A-bosons.

3. Also, the DDI between A- and C-bosons generates another inter-site interactions between the A-bosons.

We show the two types inter-site interaction



In Cross section 2, the inter-site DDI becomes

$$H_{AB} = U_{ab} \sum_{k, \delta} \rho_{A, k+\delta} n_{B, k}$$

In Cross section 3, the inter-site DDI becomes

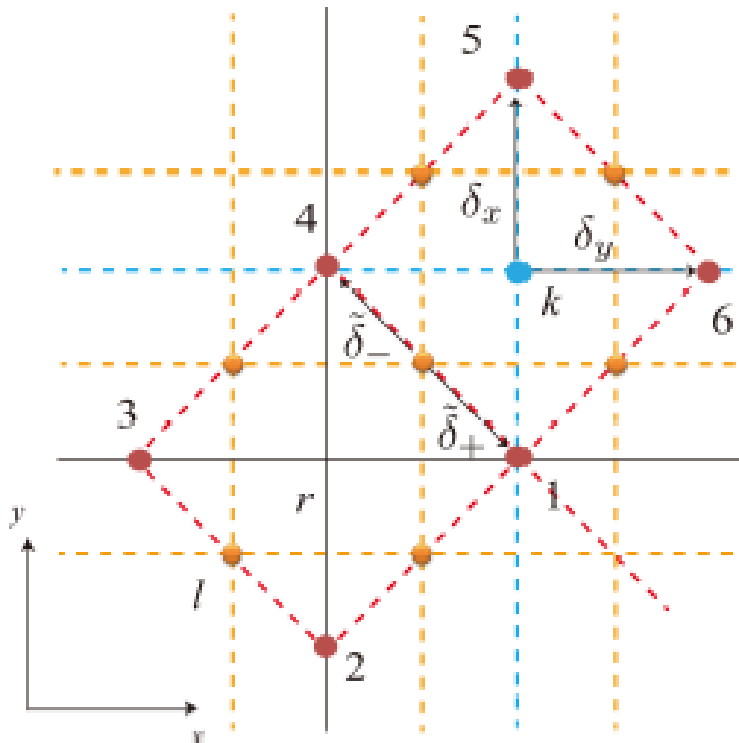
$$H_{AC} = U_{ac} \sum_{l, \bar{\delta}} \rho_{A, l+\bar{\delta}} n_{C, l}$$

## Gauss law tuning

By using the inter-site interactions, we want to change only A-boson long-range interaction(DDI). See the below table.

group	range	$(a, b)$	$V_{ab}$
(i)	NN	(1,2), (2,3), (3,4), (1,4)	$\gamma^{-2}$
(ii)	1st half of NNN	(1,3), (2,4)	$\gamma^{-2}$
(iii)	2nd half of NNN	(1,5), (4,6)	0

A-boson long-range interaction



1. NN and NNN interactions are same amplitude.

2. We want to vanish (1,5), (4,6) link interactions

From now, we will derive effective interactions from path integral formulation.

- The B- and C-bosons are trapped in deep optical lattices with negligible hopping.
- second-order perturbation theory.

## Calculation in Path-integral formulation(A-boson and C-boson)

We start to define the Inter-layer dipole-dipole interaction,

$$\begin{aligned}
 & \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \frac{1}{2} \psi_c^\dagger(\mathbf{r}) \psi_a^\dagger(\mathbf{r}') U_{DDI}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \psi_c(\mathbf{r}) \psi_a(\mathbf{r}') \\
 & \sim U_{ac} \sum_{l, \tilde{\delta}} a_{l+\tilde{\delta}}^\dagger a_{l+\tilde{\delta}} c_l^\dagger c_l = U_{ac} \sum_{l, \tilde{\delta}} n_{a, l+\tilde{\delta}} n_{c, l}, \\
 & U_{ac} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' w_{c, l}^2(\mathbf{r}) U_{DDI}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') w_{a, l+\tilde{\delta}}^2(\mathbf{r}'), \\
 & U_{DDI}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{d}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \left[ 1 - \frac{3a_{23}^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right].
 \end{aligned}$$

Next, C-boson system can be defined as follows,

$$\begin{aligned}
 Z_c & \equiv \int [dc_l dc_l^\dagger] \exp \left( \int_0^\beta d\tau \sum_l \left( -c_l^\dagger(\tau) \partial_\tau c_l(\tau) + \mu_c c_l^\dagger(\tau) c_l(\tau) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - U_c n_{c, l}(\tau) (n_{c, l}(\tau) - 1) + U_{ac} \sum_{\tilde{\delta}} (n_{c, l}(\tau) - \rho_c) n_{a, l+\tilde{\delta}}(\tau) \right) \right) \\
 & \equiv \int [dc_l dc_l^\dagger] e^{-\int_0^\beta d\tau (\sum_l c_l^\dagger(\tau) \partial_\tau c_l(\tau) + H_c + H'_{int})}, \\
 H_c & \equiv \sum_l \left( -\mu_c c_l^\dagger(\tau) c_l(\tau) + U_c n_{c, l}(\tau) (n_{c, l}(\tau) - 1) \right), \\
 H'_{int} & \equiv \sum_{l, \tilde{\delta}} U_{ac} (n_{c, l}(\tau) - \rho_c) n_{a, l+\tilde{\delta}}(\tau).
 \end{aligned}$$

Integrate out C-boson system (Second perturbation theory)

$$Z_c \sim 1 + U_{ac}^2 \int_0^\beta d\tau \sum_{l, \tilde{\delta}} \beta C(\mu_c, U_c, \beta) \underline{n_{a, l+\tilde{\delta}}(\tau) n_{a, l-\tilde{\delta}}(\tau)}$$

$$\equiv e^{-\int_0^\beta d\tau H_{qVc}}.$$

A-boson density-density interaction!

This effective interaction depends on the following factor,

$$C(\mu_c, U_c, \beta) \equiv \frac{\sum_{m_l} e^{-\beta E_{m_l}} m_l^2}{\sum_{m_l} e^{-\beta E_{m_l}}} - \rho_c^2 = \langle (\hat{n}_c - \langle n_c \rangle)^2 \rangle.$$

**This factor is controllable** in an optical lattice system!

Also, we can same calculation for B-boson sector.

In this situation, when only bare long-range interaction of A-boson is

$$\sum_{r, a \neq b} \frac{V_{ra, rb}}{2} \rho_{r, a} \rho_{r, b} \quad V_{ra, rb} = \begin{cases} 2V & (ra, rb) = \text{NN} \\ 2V_N & (ra, rb) = \text{NNN} \end{cases}$$

The above A-boson interactions **can be modified by effective interactions from B- and C-bosons.**

In such a mechanism, we obtain tuning relations **for realizing Gauss's law.**

Fine tuning relation

$$2V - U_{ab}^2 \beta C(\mu_b, U_b, \beta) - U_{ac}^2 \beta C(\mu_c, U_c, \beta) = 2V_N,$$

$$2V_N - U_{ab}^2 \beta C(\mu_b, U_b, \beta) = 0.$$

