アルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈

只木孝太郎

中部大学 工学部 情報工学科

Abstract: 本発表で何をするか

U: universal Turing machine.

アルゴリズム的情報理論 (Algorithmic Information Theory, AIT と略す) はprogram-size complexityの理論である．本発表では、カノニカル分布に従う温度Tの量子力学系の熱力学的量に対し、次の置き換えを行うことにより、AIT に熱力学的量の概念を導入する．そして、AIT の熱力学的量の randomness property について調べる．

エネルギー固有状態n $\Longrightarrow$ universal TM U の program p,

nのエネルギーE_n $\Longrightarrow$ pの長さ$|p|$,

Boltzmann定数k $\Longrightarrow$ $1/\ln 2$ （温度の単位をbitに選ぶ）.

分配関数 $Z(T)=\sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}}$ $\Longrightarrow$ $Z(T)=\sum_p 2^{-\frac{|p|}{T}}$,

自由エネルギー $F(T)=-kT\ln Z(T)$ $\Longrightarrow$ $F(T)=-T\log_2 Z(T)$,

エネルギー $E(T)=\frac{1}{Z(T)}\sum_n E_n e^{-\frac{E_n}{kT}}$ $\Longrightarrow$ $E(T)=\frac{1}{Z(T)}\sum_p |p|\,2^{-\frac{|p|}{T}}$,

エントロピー $S(T)=\frac{E(T)-F(T)}{T}$ $\Longrightarrow$ $S(T)=\frac{E(T)-F(T)}{T}$.

温度 ＝ 圧縮率

準備

アルゴリズム的情報理論(AIT)の基礎

AIT の基礎: Program-size Complexity

- $\{0,1\}^* := \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$. The set of finite binary strings.
（有限２進列の集合）
- 任意の $x \in \{0,1\}^*$ に対し、$|x|$ は x の長さ (length) を表す。

U を universal Turing machine とする。

$\boxed{\text{Definition}}$ The *program-size complexity* (or *Kolmogorov complexity*) $H(x)$ of $x \in \{0,1\}^*$ is defined by $H(x) := \min\left\{ |p| \;\middle|\; p \in \{0,1\}^* \;\&\; U(p) = x \right\}$.

$H(x)$: U に入力として与えたとき、U に x を出力させる有限2進列 p の中で、最も短いものの長さ.
$\Longrightarrow$ $H(x)$ は、x の圧縮時のサイズを表す。

---

universal TM は任意の計算プロセスを模倣する事ができるのに、x を出力するためには補助情報として $H(x)$ の長さの入力が必要であるという事は、$H(x)$ は、アルゴリズム的な方法では生成する事のできない、x の random な部分の大きさを表していると考えられる。

$\Longrightarrow$ $H(x)$ は、x の random 性の強さを表す。

AIT の基礎: 実数の圧縮率 I

Definition [実数の接頭語] Let α be a real, and let n be a positive integer. We denote by $\alpha\restriction_n$ the first n bits of the base-two expansion of $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor$.

α の少数部分.

Definition [the compression rate of a real (実数の圧縮率)] Let α be a real. The limit value

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha\restriction_n)}{n}$$

is called the *compression rate of α* (α の圧縮率).

分子 $H(\alpha\restriction_n)$: 有限2進列 $\alpha\restriction_n$ の圧縮時の長さ.

分母 $n = |\alpha\restriction_n|$: 有限2進列 $\alpha\restriction_n$ のもとの長さ.

AIT の基礎: 実数の圧縮率 II

Definition [Chaitin の停止確率 Ω, Chaitin 1975]

$$\Omega := \sum_{p \in \mathrm{Dom}\, U} 2^{-|p|}.$$

Ω: The probability that the universal Turing machine U halts when U starts on the input tape filled with an infinite binary string generated by infinitely repeated tosses of a fair coin.

Ω の 2 進展開の最初の n bit (即ち、$\Omega\restriction_n$) は、U の n bit 以下の入力に対する停止問題を解く.

Theorem [Chaitin 1975] Ω is incompressible (圧縮不可能), i.e., the compression rate of Ω equals to 1. □

AIT の基礎: Ω の一般化

Definition [Chaitin の Ω の一般化, Tadaki 1999]

$$\Omega(D) := \sum_{p \in \mathrm{Dom}\, U} 2^{-\frac{|p|}{D}} \qquad (D > 0).$$

よって、$\Omega(1) = \Omega$.

Definition A real D is called *computable* if there exists an algorithm which calculates each bit in the base-two expansion of D one by one. □

$\Omega(D)$ の 2 進展開の最初の n bit (即ち、$\Omega(D)\restriction_n$) は、U の Dn bit 以下の入力に対する停止問題を解く.

Theorem [Tadaki 1999] Let D be a real.

(i) If $0 < D \leq 1$ and D is computable, then the compression rate of $\Omega(D)$ equals to D.

(ii) If $1 < D$, then $\Omega(D)$ diverges to ∞. □

アルゴリズム的情報理論(AIT)の統計力学的解釈

AIT の統計力学的解釈: 契機

[Calude & Stay 2006] の指摘: $\Omega(D)$ は統計力学の分配関数に似ている。

- 統計力学において、分配関数 $Z(T)$ は次式で与えられる:

$$Z(T) = \sum_{n} e^{-\frac{E_n}{kT}}.$$

ここで、n はエネルギー固有状態（の量子数）、E_n はそのエネルギー、T は温度。

- 一方、$\Omega(D)$ は次式で与えられる:

$$\Omega(D) = \sum_{p \in \mathrm{Dom}\, U} 2^{-\frac{|p|}{D}} \qquad (D > 0).$$

従って、

次の置き換えをすることにより、$Z(T)$ は $\Omega(D)$ と一致する:

エネルギー固有状態 n	$\Longrightarrow$	program $p \in \mathrm{Dom}\, U$,
n のエネルギー E_n	$\Longrightarrow$	p の長さ $|p|$,
温度 T	$\Longrightarrow$	圧縮率 D,
Boltzmann 定数 k	$\Longrightarrow$	$1/\ln 2$　（温度の単位を bit に選ぶ）.

本発表の目的

$\Omega(D)$ が分配関数として現れる、AIT の統計力学的解釈を展開する [Tadaki 2008].

これを次のようにして行う:

カノニカル分布に従う温度 T の量子力学系の熱力学的量（自由エネルギー、エネルギー、エントロピー、比熱）に対し、次の置き換えを行うことにより、AIT に熱力学的量（自由エネルギー、エネルギー、エントロピー、比熱）を導入する:

エネルギー固有状態 n $\Longrightarrow$ program $p \in \mathrm{Dom}\, U$,

n のエネルギー E_n $\Longrightarrow$ p の長さ $|p|$,

Boltzmann 定数 k $\Longrightarrow$ $1/\ln 2$ （温度の単位を bit に選ぶ）.

そして、このように導入した AIT の熱力学的量の収束・発散を吟味し、収束する場合にはその圧縮率を計算する.

注意: 置き換えの３番目の意味

特に、置き換えの３番目

$$\text{Boltzmann定数}\,k \quad \Longrightarrow \quad 1/\ln 2 \quad \text{（温度の単位を bit に選ぶ）.}$$

の意味は以下の通りである。

上記置き換えを行うと、Boltzmann の公式

$$S(E) = k \ln \Theta(E)$$

で定義される統計力学のエントロピーは次の形になる:

$$S(E) = \log_2 \Theta(E).$$

一般に情報理論では、情報量の定義において、この式のように対数の底は２にとり、情報量を bit の単位で測るが、上記置き換えはこれに対応している。アルゴリズム的情報理論は、その名が示す通り、情報理論との結び付きも深いが、上記置き換えはこの結び付きを反映するものである、と解釈できる。

AIT の統計力学的解釈: 熱力学的量の導入

温度 T の量子力学系の熱力学的量に対し、次の置き換えを行う.

(U: universal Turing machine)

$$\begin{array}{lcl} \text{エネルギー固有状態}\, n & \Longrightarrow & \text{program } p \in \mathrm{Dom}\, U, \\ n\, \text{のエネルギー}\, E_n & \Longrightarrow & p\, \text{の長さ}\, |p|, \\ \text{Boltzmann 定数}\, k & \Longrightarrow & 1/\ln 2. \end{array}$$

Boltzmann 因子: $2^{-\frac{|p|}{T}}$

分配関数 $Z(T) = \sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}} \quad \Longrightarrow \quad Z(T) = \sum_{p \in \mathrm{Dom}\, U} 2^{-\frac{|p|}{T}},$

自由エネルギー $F(T) = -kT \ln Z(T) \quad \Longrightarrow \quad F(T) = -T \log_2 Z(T),$

エネルギー $E(T) = \frac{1}{Z(T)} \sum_n E_n e^{-\frac{E_n}{kT}} \quad \Longrightarrow \quad E(T) = \frac{1}{Z(T)} \sum_{p \in \mathrm{Dom}\, U} |p|\, 2^{-\frac{|p|}{T}},$

エントロピー $S(T) = \frac{E(T) - F(T)}{T} \quad \Longrightarrow \quad S(T) = \frac{E(T) - F(T)}{T},$

比熱 $C(T) = \frac{d}{dT} E(T) \quad \Longrightarrow \quad C(T) = \frac{d}{dT} E(T).$

AIT の統計力学的解釈: 熱力学的量の厳密な定義

先の一時的定義を、次のように厳密に定義し直す.

Definition Let $q_1, q_2, q_3, \dots\dots$ be an arbitrary enumeration of $\mathrm{Dom}\, U$. $\square$

$\{q_i\}$ の選択は、本発表の結果に影響しない.

Definition [AIT の熱力学的量, Tadaki 2008] Let $T > 0$.

(i) 分配関数 $Z(T) := \lim_{m\to\infty} Z_m(T)$, where $Z_m(T) = \sum_{i=1}^{m} 2^{-\frac{|q_i|}{T}}$.

(ii) 自由エネルギー $F(T) := \lim_{m\to\infty} F_m(T)$, where $F_m(T) = -T \log_2 Z_m(T)$.

(ii) エネルギー $E(T) := \lim_{m\to\infty} E_m(T)$, where $E_m(T) = \dfrac{1}{Z_m(T)} \sum_{i=1}^{m} |q_i|\, 2^{-\frac{|q_i|}{T}}$.

(iii) エントロピー $S(T) := \lim_{m\to\infty} S_m(T)$, where $S_m(T) = \dfrac{E_m(T) - F_m(T)}{T}$.

(iv) 比熱 $C(T) := \lim_{m\to\infty} C_m(T)$, where $C_m(T) = E'_m(T)$. $\square$

Remark これらは、Chaitin の Ω の変種. 特に、$Z(T) = \Omega(T)$.

AIT の統計力学的解釈: 帰結

$$温度 \ = \ 圧縮率.$$

$$温度 T = 1 で相転移.$$

AIT の熱力学的量: 性質

Theorem [Tadaki 2008] Let T be a real.

(i) If $0 < T < 1$ and T is computable, then each of $Z(T)$, $F(T)$, $E(T)$, $S(T)$, and $C(T)$ converges to a real whose compression rate equals to T, i.e.,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H(Z(T)\restriction_n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{H(F(T)\restriction_n)}{n}=T,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H(E(T)\restriction_n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{H(S(T)\restriction_n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{H(C(T)\restriction_n)}{n}=T.$$

(ii) If $1 < T$, then $Z(T)$, $E(T)$, and $S(T)$ diverge to ∞, and $F(T)$ diverges to $-\infty$. $\square$

(i) の意味: 全ての熱力学的量の圧縮率は温度 T に等しい.

(ii) の熱統計力学的解釈: 温度 $T=1$ で "相転移" が起こる.

AIT の熱力学的量: 注意

Remark [AIT の熱力学的量だけが持つ特別な性質]

AIT の熱力学的量の各定義には、Boltzmann 因子 $2^{-|p|/T}$ が現れる. 例えば、

$$E(T)=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}|q_i|\,2^{-|q_i|/T}}{\sum_{i=1}^{\infty}2^{-|q_i|/T}},$$

$$C(T)=\frac{d}{dT}E(T)=\frac{\ln 2}{T^2}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{\infty}|q_i|^2\,2^{-|q_i|/T}}{\sum_{i=1}^{\infty}2^{-|q_i|/T}}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\infty}|q_i|\,2^{-|q_i|/T}}{\sum_{i=1}^{\infty}2^{-|q_i|/T}}\right)^2\right\}.$$

しかしながら、Boltzmann 因子 $2^{-|p|/T}$ が現れる任意の量に対し、その圧縮率が温度 T に等しくなる訳ではない.

これを見るため、次の量 $\bar{Z}(T)$ を考えよう. 統計力学的観点からは、この量は不自然なものである:

$$\bar{Z}(T):=\sum_{i=1}^{\infty}\left(2^{-\frac{|q_i|}{T}}\right)^2.$$

$\bar{Z}(T)=Z(T/2)$ なので、次が成り立つ: For every $T\in(0,1)$, if T is computable then the compression rate of $\bar{Z}(T)$ equals to $T/2$ and not to T.

AIT の熱力学的量: 圧縮率 $=$ 温度

ところで、最も典型的な熱力学的量は温度 T それ自身である.

Question 温度 T の圧縮率は温度 T に等しいか？ Self-referential Question

これは、次の形で肯定的に成り立つ:

Theorem [圧縮率に関する不動点定理, Tadaki 2008]
For every $T \in (0,1)$, if $Z(T)$ is a computable real, then

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(T\restriction_n)}{n} = T,$$

i.e., the compression rate of T equals to T itself. □

直観的意味: たとえ話 仮に、無限の容量を持つファイルを考える。

"このファイルの圧縮率は次の通りである: 0.100111001 $\cdots\cdots$"

と書いてあるファイルを実際に圧縮にかけると、確かに圧縮率は0.100111001 $\cdots\cdots$ になっている。 ＜不動点になっていて、自己参照的＞

温度 ＝ 圧縮率

AITの統計力学的解釈

これは一体何なのか？

AIT の統計力学的解釈: これは一体何なのか？

- [物理的議論] AIT の熱力学的量の統計力学的意味の解明 [Tadaki 2010]:

AIT の枠組の中にミクロカノニカルアンサンブルを同定し、AIT の熱力学的量の統計力学的意味を明らかにした.

- [数学的議論] 統計力学的手法に基づく不動点の性質の解明 [Tadaki 2009]:

AIT に量子力学系の合成の概念を導入し、それに基づいて、不動点の性質 simultaneous disjointness を明らかにした.

- [数学的議論] 温度 $T = 1$ における相転移現象の解明 [Tadaki 2010, Tadaki 2013]:

分配関数 $Z(T)$ の 2 進展開と、停止問題 Dom U の特性系列の接頭語の計算能力を比較し、$T = 1$ と $T < 1$ とで質的な違いがあることを示した. 即ち、温度 $T = 1$ で現れる $Z(T)$ から Dom U への 1 方向性が、$T < 1$ では消失し、両方向性に移行することを示した. 更に、無限 2 進列に対して Strong Predictability の概念を新たに導入して、それを AIT の熱力学的量に適用することにより、この相転移現象の全く別の側面を明らかした.

- [物理的議論] Landauer の原理との関係.

AIT の統計力学的解釈: これは一体何なのか？

- [物理的議論] AIT の熱力学的量の統計力学的意味の解明 [Tadaki 2010]:

AIT の枠組の中にミクロカノニカルアンサンブルを同定し、AIT の熱力学的量の統計力学的意味を明らかにした.

- [数学的議論] 統計力学的手法に基づく不動点の性質の解明 [Tadaki 2009]:

AIT に量子力学系の合成の概念を導入し、それに基づいて、不動点の性質 simultaneous disjointness を明らかにした.

- [数学的議論] 温度 $T = 1$ における相転移現象の解明 [Tadaki 2010, Tadaki 2013]:

分配関数 $Z(T)$ の 2 進展開と、停止問題 Dom U の特性系列の接頭語の計算能力を比較し、$T = 1$ と $T < 1$ とで質的な違いがあることを示した. 即ち、温度 $T = 1$ で現れる $Z(T)$ から Dom U への 1 方向性が、$T < 1$ では消失し、両方向性に移行することを示した. 更に、無限 2 進列に対して Strong Predictability の概念を新たに導入して、それを AIT の熱力学的量に適用することにより、この相転移現象の全く別の側面を明らかした.

- [物理的議論] Landauer の原理との関係.

物理的議論: AIT の熱力学的量の統計力学的意味の解明

通常の統計力学でカノニカル分布に従う系を考え、その熱力学的量について、次の置き換えを行なうことにより、AIT における熱力学的量が得られる。天下り的導入

$$\begin{aligned}
&\text{エネルギー固有状態}\, n && \Longrightarrow && \text{program } p \in \mathrm{Dom}\, U, \\
&n\,\text{のエネルギー}\, E_n && \Longrightarrow && p\,\text{の長さ}\, |p|, \\
&\text{Boltzmann 定数}\, k && \Longrightarrow && 1/\ln 2.
\end{aligned}$$

以下では、この置き換えの統計力学的意味について解明する。

即ち、以下では、AIT に対し、通常の統計力学と完全な対応を持つ統計力学的解釈を与え、AIT に自由エネルギー、エネルギー、エントロピー、比熱などの熱力学的量の概念を“自然に”導入する。

● なお以下では、議論は通常の統計力学と同程度の数学的厳密さで行う。従って以下では、数学的厳密さにはこだわらない。

復習: 平衡統計力学の基本

極めて多数の同一の部分系から構成される量子系 S_{total} を考える。

N: 部分系の個数（1 cm^3 の常温の気体では $N \sim 10^{22}$）

仮定 各部分系は互いに区別できるものとする。
即ち、ここでは、Maxwell-Boltzmann 統計を考察する。

S_i: i 番目の量子部分系　　$(i = 1, 2, \ldots, N)$

量子力学では、どんな量子系も、量子状態によって完全に記述される。
統計力学では、量子状態のなかでも、エネルギー固有状態が重要な役割を果たす。

- 各部分系 S_i のエネルギー固有状態は、量子数と呼ばれる自然数 $n = 1, 2, 3, \ldots$ によって指定される。

このとき、部分系 S_i はエネルギー E_n を持つ。

- 全系 S_{total} のエネルギー固有状態は、N 対の量子数 $(n_1, n_2, \ldots, n_N)$ によって指定される。

このとき、全系 S_{total} はエネルギー $E_{n_1} + E_{n_2} + \cdots + E_{n_N}$ を持つ。

そしてこのとき、各部分系 S_i は、量子数 n_i によって指定されるエネルギー固有状態にある。

復習: 統計力学の基本仮定

The Principle of Equal Probability (等重率の原理)

全系 S_{total} のエネルギーが E から $E+\delta E$ の間にあることがわかっているものとする;

$$E \leq (\text{The energy of } S_{total}) \leq E + \delta E$$

このとき、全系 S_{total} は、

$$E \leq E_{n_1} + E_{n_2} + \cdots + E_{n_N} \leq E + \delta E$$

を満たす $(n_1, n_2, \ldots, n_N)$ によって指定される各エネルギー固有状態に、等しい確率で実現される。
ここで、δE は、全系 S_{total} のエネルギーの測定における不確定の幅である。

全系 S_{total} のエネルギー固有状態のこの一様分布は、ミクロカノニカルアンサンブル（分布）と呼ばれる。

以下、AIT に統計力学的解釈（物理的議論による完全版）を与える。

統計力学的解釈を施す際の一般的心構え

一般に、統計力学とは外見上隔たりのある現象や枠組に対して、統計力学的解釈を施すためには、そこにミクロカノニカルアンサンブルを同定することが重要である。

ミクロカノニカルアンサンブルさえ同定できれば、通常の統計力学の教科書で行われている平衡統計力学の理論の理論展開に従うことにより、ほぼ自動的に、その枠組上に統計力学的解釈を展開することが可能となる。

$\Longrightarrow$

AIT に対して統計力学的解釈を施す際も、AIT の枠組の中にミクロカノニカルアンサンブルを同定することが重要となる。

AIT の統計力学的解釈: 物理的議論による完全版 I

出発点: ミクロカノニカルアンサンブルの同定

AIT は、deterministic Turing machine である universal prefix-free machine U を用いて組み立てられる世界であり、AIT に、元来、確率的なものはない。

AIT 上で統計力学を展開するためには、AIT に対して何らかの確率測度を導入する必要がある。

次のように確率測度を導入する：
fair なコイン投げによって生成される $0, 1$ の片側無限列を考える。
即ち、$0, 1$ の片側無限列の集合 $\{0, 1\}^\infty$ 上の Lebesgue 測度を考える。

$\Longrightarrow$ この無限列が $r \in \{0, 1\}^*$ を接頭語として持つ確率は $Q(r) = 2^{-|r|}$.

この確率測度の入れ方は AIT では自然。

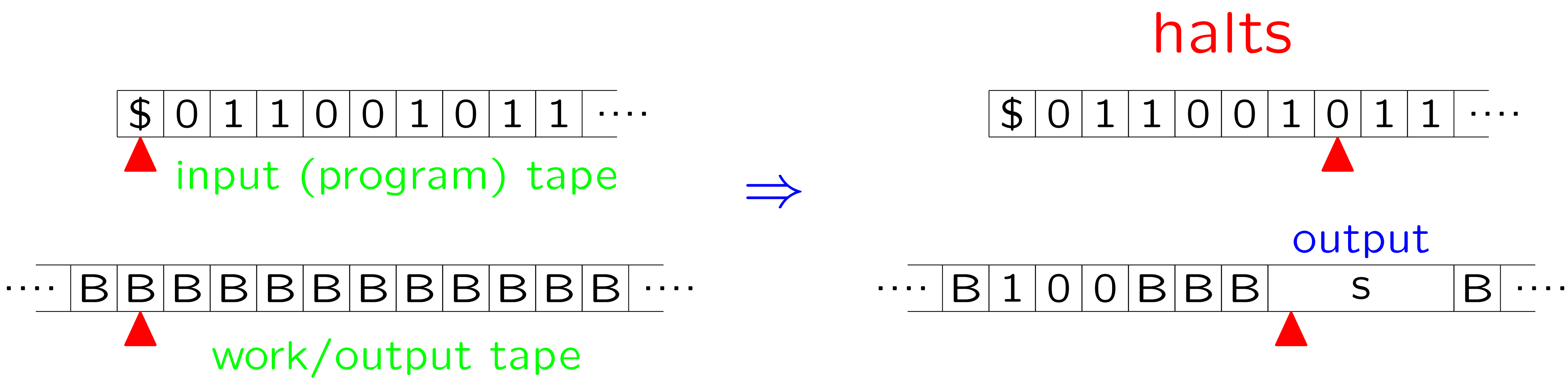
＜理由は次の通り＞

AIT の統計力学的解釈: 物理的議論による完全版 II

理由: **Chaitin** の停止確率 Ω は、この確率測度で実際に "停止確率" の意味を持つ。

Ω: The probability that the universal self-delimiting Turing machine U halts when U starts on the input tape filled with an infinite binary string generated by infinitely repeated tosses of a fair coin.

Self-delimiting Turing machine U



AITの統計力学的解釈：物理的議論による完全版 III

Nを非常に大きな数とする。（$N \sim 10^{22}$）

（コイン投げで生成される）この無限列が

$$p_1 p_2 \cdots p_N \alpha$$

の形を持つ場合を考える。　　ここで、$p_1, p_2, \dots, p_N \in \mathrm{Dom}\, U$ かつ $\alpha \in \{0,1\}^{\infty}$.

注意1　Dom U はprefix-freeなのでこのような分解は一意。

注意2　$s_1 = U(p_1), s_2 = U(p_2), s_3 = U(p_3), \dots, s_N = U(p_N)$ とおくとき、$p_1 p_2 \cdots p_N$ は、情報源系列 $s_1, s_2, s_3, \dots, s_N$ を圧縮・符号化した符号語系列とみなすことができる。　　情報理論における瞬時符号による情報源符号化に対応している。

注意3　この無限列が $p_1 p_2 \cdots p_N \alpha$ となる確率は、

$$\sum_{p_1, p_2, \dots, p_N \in \mathrm{Dom}\, U} Q(p_1 p_2 \cdots p_N) = \Omega^N < 1$$

であり、必ずその形になる訳ではない。しかし、$N \to \infty$ としたとき、その形になるものの集合のHausdorff次元は1（Tadaki 1999).

AIT の統計力学的解釈: 物理的議論による完全版 IV

AIT の統計力学的解釈と、（通常の）統計力学との対応関係

AIT		統計力学
i 番目の program p_i の slot	$\Longleftrightarrow$	i 番目の量子部分系 S_i
i 番目の program p_i	$\Longleftrightarrow$	i 番目の量子部分系 S_i のエネルギー固有状態 n
i 番目の program の長さ $\lvert p_i \rvert$	$\Longleftrightarrow$	部分系 S_i のエネルギー固有状態 n のエネルギー E_n
program の連接 $p_1 p_2 \cdots p_N$	$\Longleftrightarrow$	全系 S_{total} のエネルギー固有状態 $(n_1, n_2, \dots, n_N)$
program の連接の長さ $\lvert p_1 p_2 \cdots p_N \rvert$	$\Longleftrightarrow$	全系 S_{total} のエネルギー固有状態 $(n_1, n_2, \dots, n_N)$ のエネルギー $E_{n_1} + E_{n_2} + \cdots + E_{n_N}$

＜注意＞ $|p_1 p_2 \cdots p_N| = |p_1| + |p_2| + \cdots + |p_N|$.

AIT の統計力学的解釈: 物理的議論による完全版 V

programの連接のミクロカノニカルアンサンブル

N 個のprogramの連接で長さが L と $L+\delta L$ の間にあるものの集合:

$$C(L,N) := \{p_1p_2\cdots p_N \mid L \le |p_1p_2\cdots p_N| \le L+\delta L \ \& \ p_1,p_2,\ldots,p_N \in \mathrm{Dom}\,U\}.$$

その個数: $\Theta(L,N) := \#C(L,N)$.

If $p_1p_2\cdots p_N \in C(L,N)$, then $\quad 2^{-L-\delta L} \le Q(p_1p_2\cdots p_N) \le 2^{-L}$,
therefore $\quad Q(p_1p_2\cdots p_N) \simeq 2^{-L}$.

The Principle of Equal Conditoinal Probability

N 個のprogramの連接で長さが L のものが無限列の接頭語に現れるという条件の下、そのような連接の各々が現れる条件付き確率は、等しく $1/\Theta(L,N)$ となる。

条件付き確率で考えることにより、等重率の原理が成り立つ。
このようにして、AIT上にミクロカノニカルアンサンブルを同定し、それに基づいて統計力学を展開する。

AIT の統計力学的解釈: 物理的議論による完全版 VI

統計力学の展開: カノニカル分布の導出

N 個の program の連接のエントロピー $S(L,N)$:　　$S(L,N) := \log_2 \Theta(L,N).$

$k = 1/\ln 2$ として

N 個の program の連接の温度 $T(L,N)$:　　$\dfrac{1}{T(L,N)} := \dfrac{\partial S}{\partial L}(L,N).$

N 個の program の連接で長さが L のものが無限列の接頭語に現れるという条件の下、特定の program $p \in \mathrm{Dom}\, U$ がその無限列の接頭語として現れる確率 $R(p)$ を求める。

$$R(p) = \frac{\Theta(L - |p|\,, N-1)}{\Theta(L,N)}$$

なので、

$$R(p) = \frac{1}{Z(T(L,N))} \sum_{p \in \mathrm{Dom}\, U} 2^{-\frac{|p|}{T(L,N)}}.$$

カノニカル分布

ここで、

$$Z(T) := \sum_{p \in \mathrm{Dom}\, U} 2^{-\frac{|p|}{T}} \qquad (T > 0).$$

分配関数

$Z(T)$ は $\Omega(D)$ であり、

これで $\Omega(D)$ の分配関数としての解釈が正当化された !!

AIT の統計力学的解釈: 物理的議論による完全版 VII

統計力学の展開: 熱力学的諸量の導入

＜エネルギー＞

$E(L,N)$: N 個の program の連接で長さが L のものが無限列の接頭語に現れるという条件の下での、無限列の左端の program の長さの期待値.

$$E(L,N) = \sum_{p \in \mathrm{Dom}\, U} |p|\, R(p) = E(T(L,N)).$$

ここで、

$$E(T) := \frac{1}{Z(T)} \sum_{p \in \mathrm{Dom}\, U} |p|\, 2^{-\frac{|p|}{T}} \qquad (T > 0).$$

＜比熱＞ $C(T) := \dfrac{d}{dT} E(T) \qquad (T > 0).$

＜自由エネルギー＞ $F(T) := -T \log_2 Z(T) \qquad (T > 0).$ カノニカル分布

＜エントロピー＞ $S(T) = \dfrac{E(T) - F(T)}{T} \qquad (T > 0).$ カノニカル分布

AIT の統計力学的解釈: 物理的議論による完全版 – 帰結

通常の統計力学でカノニカル分布に従う系を考え、その熱力学的量について、次の置き換えを行なえば、AIT における熱力学的量が得られることになる。

エネルギー固有状態 n	$\Longrightarrow$	program $p \in \mathrm{Dom}\, U$,
n のエネルギー E_n	$\Longrightarrow$	p の長さ $\lvert p\rvert$,
Boltzmann 定数 k	$\Longrightarrow$	$1/\ln 2$.

<分配関数> $Z(T) = \sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}}$ $\Longrightarrow$ $Z(T) = \sum_{p\in\mathrm{Dom}\,U} 2^{-\frac{|p|}{T}}$,

<自由エネルギー> $F(T) = -kT \ln Z(T)$ $\Longrightarrow$ $F(T) = -T \log_2 Z(T)$,

<エネルギー> $E(T) = \dfrac{1}{Z(T)} \sum_n E_n e^{-\frac{E_n}{kT}}$ $\Longrightarrow$ $E(T) = \dfrac{1}{Z(T)} \sum_{p\in\mathrm{Dom}\,U} |p|\, 2^{-\frac{|p|}{T}}$,

<エントロピー> $S(T) = \dfrac{E(T) - F(T)}{T}$ $\Longrightarrow$ $S(T) = \dfrac{E(T) - F(T)}{T}$,

<比熱> $C(T) = \dfrac{d}{dT} E(T)$ $\Longrightarrow$ $C(T) = \dfrac{d}{dT} E(T)$.

AITの統計力学的解釈: これは一体何なのか？

- [物理的議論] AITの熱力学的量の統計力学的意味の解明 [Tadaki 2010]:

AITの枠組の中にミクロカノニカルアンサンブルを同定し、AITの熱力学的量の統計力学的意味を明らかにした.

- [数学的議論] 統計力学的手法に基づく不動点の性質の解明 [Tadaki 2009]:

AITに量子力学系の合成の概念を導入し、それに基づいて、不動点の性質 simultaneous disjointness を明らかにした.

- [数学的議論] 温度 $T=1$ における相転移現象の解明 [Tadaki 2010, Tadaki 2013]:

分配関数 $Z(T)$ の2進展開と、停止問題 Dom U の特性系列の接頭語の計算能力を比較し、$T=1$ と $T<1$ とで質的な違いがあることを示した. 即ち、温度 $T=1$ で現れる $Z(T)$ から Dom U への1方向性が、$T<1$ では消失し、両方向性に移行することを示した. 更に、無限2進列に対して Strong Predictability の概念を新たに導入して、それを AIT の熱力学的量に適用することにより、この相転移現象の全く別の側面を明らかした.

- [物理的議論] Landauer の原理との関係.

物理的議論: Landauerの原理との関係

Landauerの原理とAITの統計力学的解釈は、定性的には対応していないが、定量的には対応している.

Landauerの原理

温度Tの環境で、（Maxwellのdemonの）メモリを初期化するとき、メモリ1 bitあたりTの仕事が必要であり、これは熱となって散逸する.

我々は、Boltzmann定数$k = 1/\ln 2$としていることに注意.

AITの統計力学的解釈

温度Tの環境で、熱力学的量の2進展開の1 bitあたりのrandomnessはTである.

Further Reading

[1] 只木孝太郎,「アルゴリズム的情報理論とその統計力学的解釈」（論説）, 雑誌 ‘数学’, 67巻1号, pp.1–25, 日本数学会編集, 岩波書店発売, 2015年1月.

[2] 只木孝太郎,「アルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈」, 特集 ランダムネスを捕まえる. 数学セミナー, 2011年2月号, pp.27–33, 日本評論社.

[3] K. Tadaki. A statistical mechanical interpretation of algorithmic information theory: Total statistical mechanical interpretation based on physical argument. Journal of Physics: Conference Series (JPCS), Vol.201, 012006 (10pp), 2010.

[4] K. Tadaki. Fixed point theorems on partial randomness. Annals of Pure and Applied Logic, Vol.163, pp.763–744, 2012.

[5] K. Tadaki. A statistical mechanical interpretation of algorithmic information theory. Local Proceedings of the Computability in Europe 2008 (CiE 2008), pp.425-434, June 15-20, 2008, University of Athens, Greece. Extended Version Available from: arXiv:0801.4194