Analysis of the dynamical chiral symmetry breaking by the viscous nonperturbative renormalization group equation

金沢大学　熊本真一郎

共同研究者：青木健一（金沢大学），佐藤大輔（金沢大学）

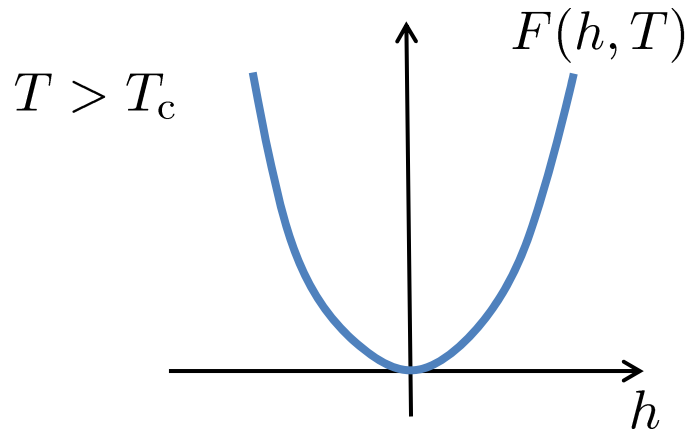
熱場の量子論とその応用

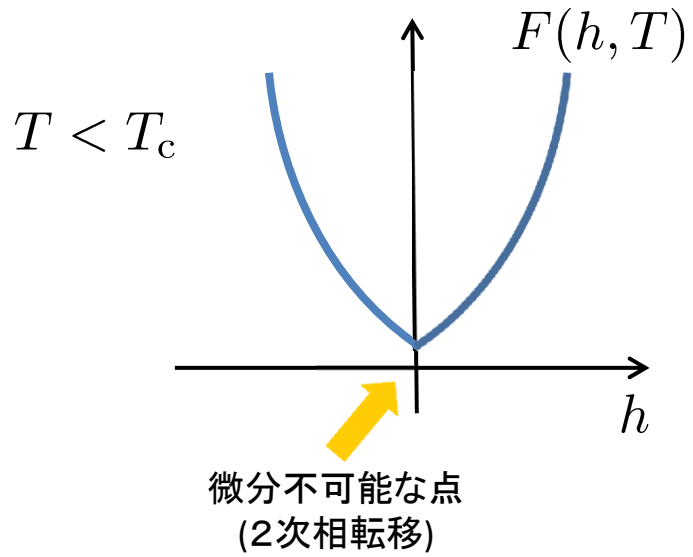
2014年9月5日　理化学研究所 大河内記念ホール

導入

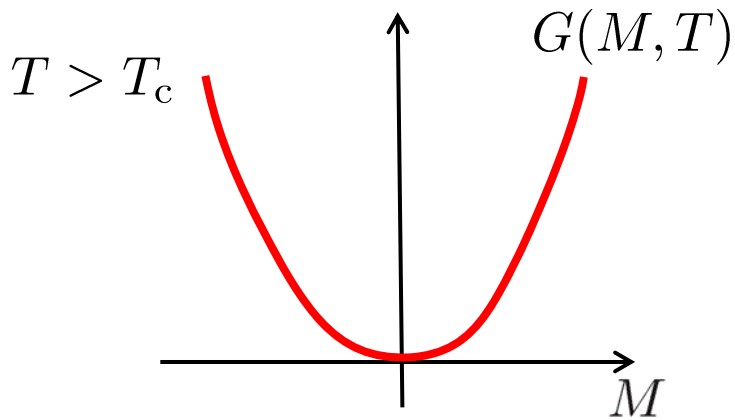
自発的対称性の破れ（2次元イジングモデル）

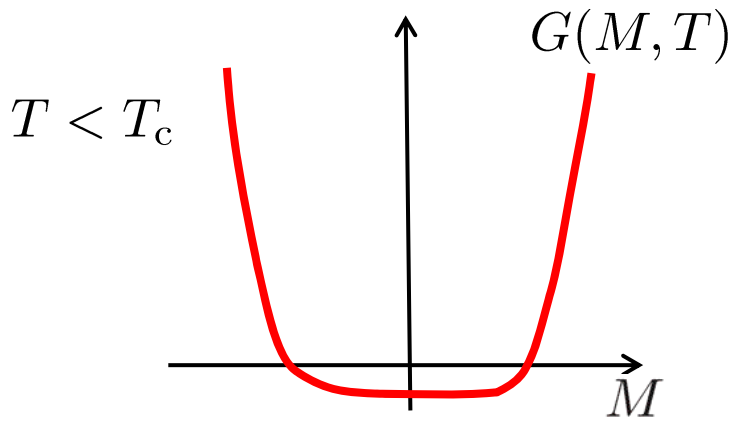
$F(h,T)$: Helmholtzの自由エネルギー
h : 外場
T: 温度





$G(M,T)$: Gibbsの自由エネルギー
M: 磁化の期待値
T: 温度

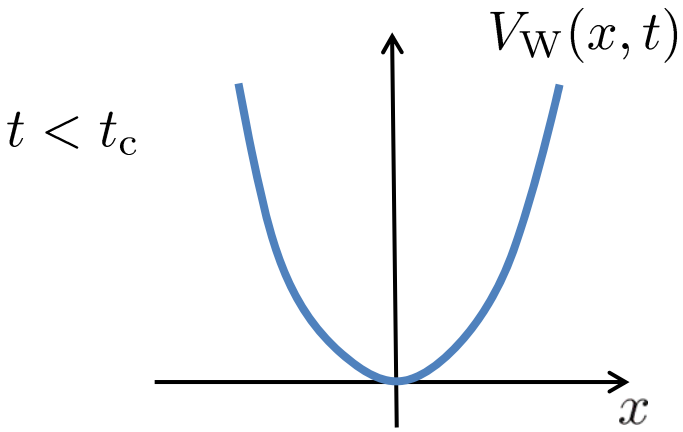


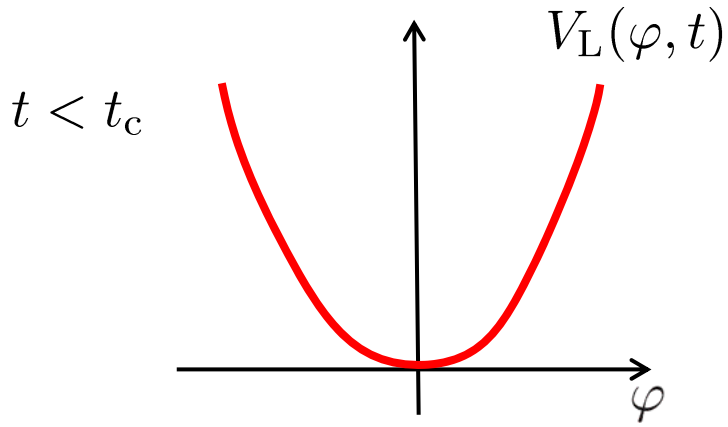


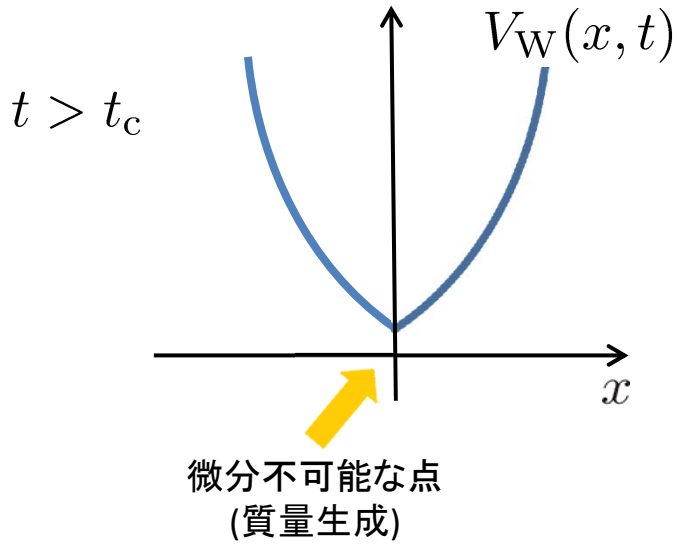
カイラル対称性の自発的破れ（0密度の南部ーJona-Lasinio模型）

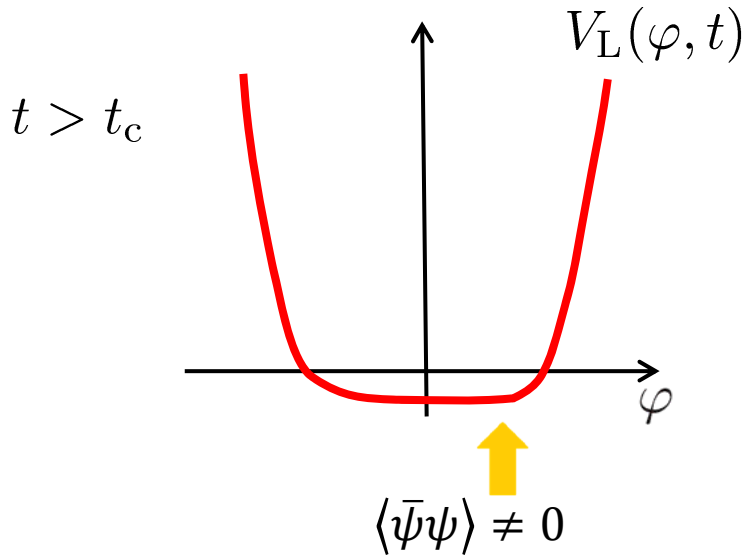
$V_{\mathrm{W}}(x,t)$: Wilsonian有効ポテンシャル
x : $\bar{\psi}\psi$
t: くりこみスケールパラメーター

$V_{\mathrm{L}}(\varphi,t)$: Legendre有効ポテンシャル
φ: カイラル凝縮 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$
t: くりこみスケールパラメーター





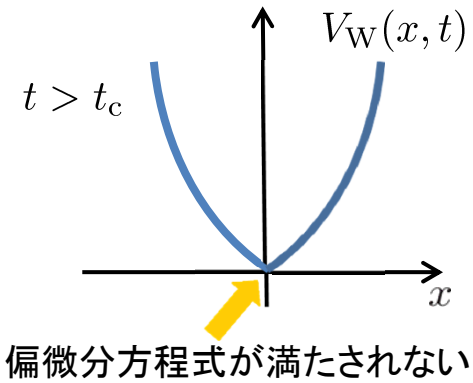




- Wilsonian 有効ポテンシャル$V_{\mathrm{W}}(x,t)$ は、非摂動くりこみ群方程式（偏微分方程式）の解。

$$F\left(V_{\mathrm{W}}, \frac{\partial V_{\mathrm{W}}}{\partial t}, \frac{\partial V_{\mathrm{W}}}{\partial x}, x, t\right) = 0$$

- 特異な解($t > t_{\mathrm{c}}$)は、数学的に偏微分方程式の通常の意味での解ではない。
- 通常の差分法では、偏微分方程式からこのような特異な解は得られない。



- 相転移を正しく記述する特異性のある解に数学的解釈を与える。

⇩

微分不可能な点を持つ、数学的に拡張された解の概念である「弱解」を導入する。

K-I. Aoki, S-I. Kumamoto and D. Sato PTEP 2014 043B05

Table of Contents

1. 非摂動くりこみ群方程式（偏微分方程式）
2. 弱解
3. 結果
4. まとめと課題

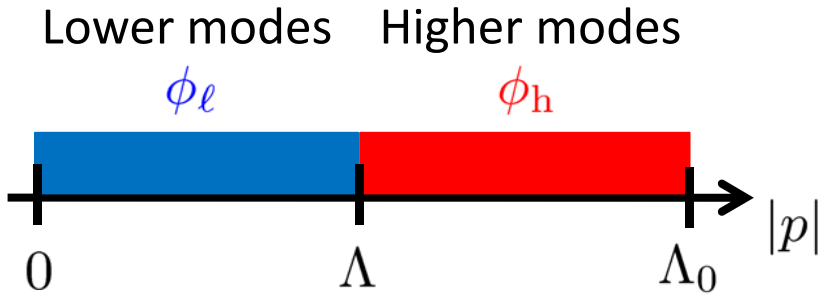
1. 非摂動くりこみ群方程式

分配関数

$$Z = \int_{0\le|p|\le\Lambda_0} \mathcal{D}\phi \quad \exp(-S[\phi;\Lambda_0])$$

$$= \int \mathcal{D}\phi_\ell \, \mathcal{D}\phi_{\rm h} \;\; \exp(-S[\phi_\ell,\phi_{\rm h};\Lambda_0])$$

$$\equiv \int \mathcal{D}\phi_\ell \;\; \exp(-S_{\rm eff}[\phi_\ell;\Lambda])$$



$S_{\rm eff}[\phi;\Lambda]$: Wilsonian有効作用

残った積分変数

量子効果（$|p|>\Lambda$）が含まれている。

非摂動くりこみ群方程式（汎関数微分方程式）

$$\frac{\partial S_{\rm eff}[\phi;\Lambda]}{\partial\Lambda} \equiv \beta(S_{\rm eff}[\phi;\Lambda])$$

⇨ この汎関数微分方程式は解けないので、近似を用いて偏微分方程式に帰着させる。

局所ポテンシャル近似（フェルミオン）

$$S_{\rm eff}[\psi,\bar{\psi};\Lambda(t)] \simeq \int d^4y\ [\bar{\psi}i\partial\!\!\!/\psi - V_{\rm W}(\bar{\psi}\psi,t)]$$

Wilsonian 有効ポテンシャル

$$x \equiv \bar{\psi}\psi,\ t \equiv -\log\frac{\Lambda(t)}{\Lambda_0}$$

非摂動くりこみ群方程式（1階の偏微分方程式）

$$\frac{\partial V_{\rm W}(x,t)}{\partial t} + f\left(M,t\right) = 0 \qquad \left(M \equiv \frac{\partial V_{\rm W}}{\partial x}\right)$$

$$f(M,t) \equiv -\frac{e^{-3t}}{\pi^2}\left[\theta\left(e^{-2t}+M^2-\mu^2\right)\sqrt{e^{-2t}+M^2} + \theta\left(-e^{-2t}-M^2+\mu^2\right)\mu\right]$$

初期条件
（有限密度のNJL模型）

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\partial\!\!\!/\psi + \frac{g}{2}(\bar{\psi}\psi)^2 - \mu\psi^\dagger\psi - m_0\bar{\psi}\psi$$

$$V_{\rm W}(x,0) = 2\pi^2 g x^2 + m_0 x$$

⇨ 連立常微分方程式に帰着させる。

特性曲線の方法

（偏微分方程式 ⇒ 連立常微分方程式）

非摂動くりこみ群方程式

$$\frac{\partial V_{\mathrm{W}}(x,t)}{\partial t} + f(M,t) = 0$$

（$f(M,t)$: Mに関して上に凸）

変数変換 ⇒

$$S(x,t) \equiv -V(x,t)$$
$$p \equiv -M$$
$$H(p,t) \equiv -f(M,t)$$

Hamilton-Jacobi方程式

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + H(p,t) = 0$$

（$H(p,t)$: pに関して下に凸）

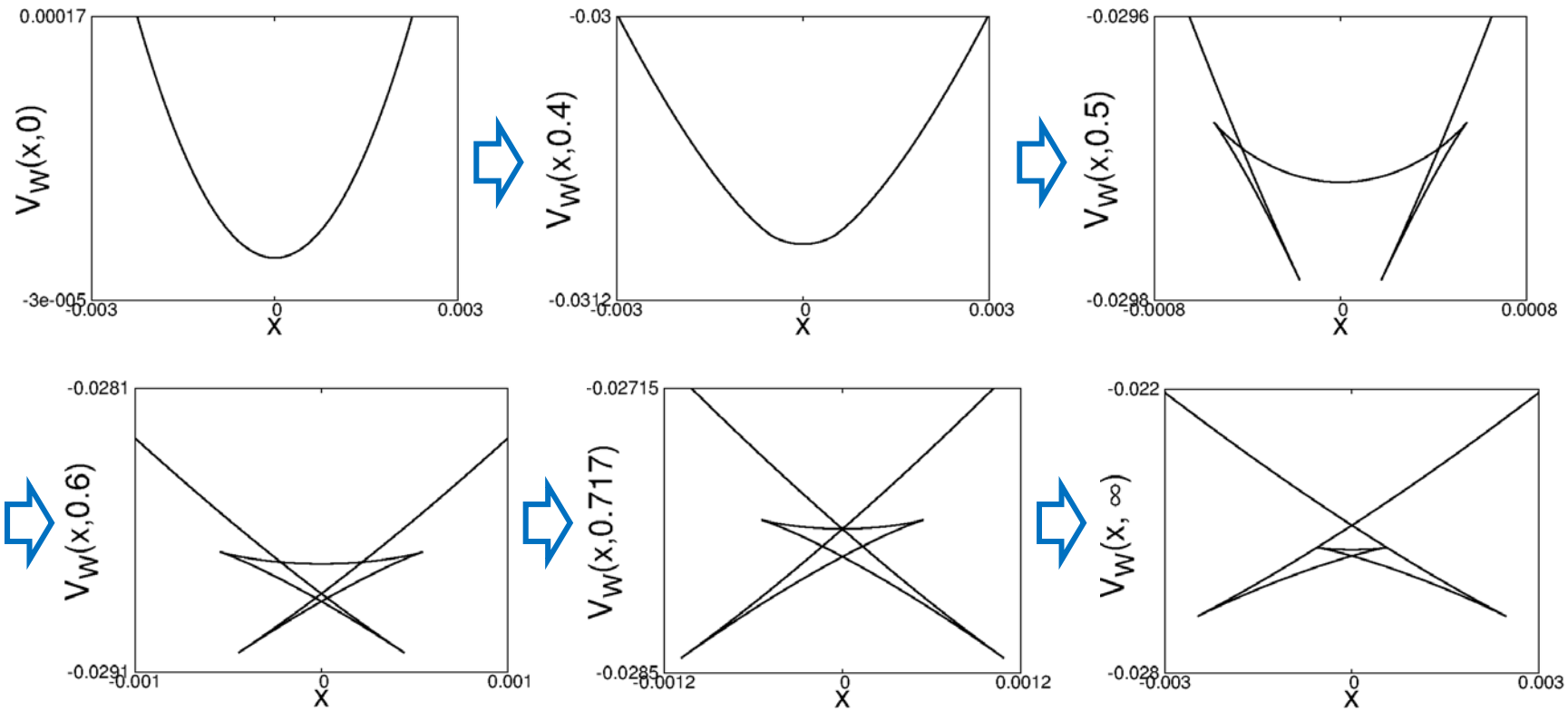
特性曲線方程式

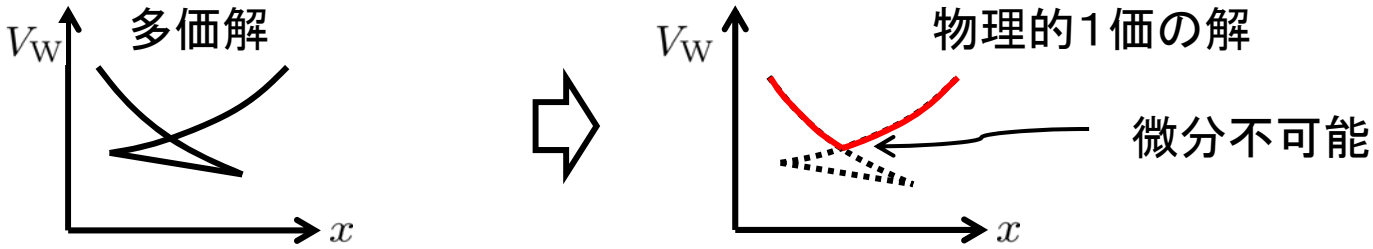
$$\begin{cases} \dfrac{dx_{\mathrm{c}}(t)}{dt} = \left.\dfrac{\partial H(p,t)}{\partial p}\right|_{p=p_{\mathrm{c}}(t)} \\[2ex] \dfrac{dp_{\mathrm{c}}(t)}{dt} = -\left.\dfrac{\partial H(p,t)}{\partial x}\right|_{x=x_{\mathrm{c}}(t)} \\[2ex] \dfrac{dS(x_{\mathrm{c}}(t),t)}{dt} = p_{\mathrm{c}}(t)\dot{x}_{\mathrm{c}}(t) - H(p_{\mathrm{c}}(t),t) \end{cases}$$

正準方程式

Wilsonian有効ポテンシャル　$V_w(x,t)$

($m_0 = 0, g = 1.7 \times g_c$, $\mu = 0.7$, $t = 0$, 0.4, 0.5, 0.6, 0.717, 10)





1価の特異な解として「弱解」を導入する。

2. 弱解

Hamilton-Jacobi方程式

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, t\right) = 0$$

粘性項（x の2階偏微分）を加える。

粘性Hamilton-Jacobi方程式（$S^\epsilon(x,t)$：正則化された滑らかな解）

$$\frac{\partial S^\epsilon(x,t)}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S^\epsilon}{\partial x}, t\right) = \epsilon \frac{\partial^2 S^\epsilon(x,t)}{\partial x^2} \quad (\ \epsilon > 0\ )$$

粘性項

粘性解
（H-J方程式の弱解）

$$S(x,t) \equiv \lim_{\epsilon \to 0} S^\epsilon(x,t)$$

M.G. Crandall and P.-L. Lions, *Trams. Amer. Math. Soc.* **277**, 1 (1983).

粘性解の計算方法

粘性解の計算方法には、代表的な二つの方法がある。

I. 粘性消滅法（定義を用いた計算法）

1. 正則化された滑らかな解 $S^{\epsilon}(x,t)$を差分法で数値計算する。
2. 極限 $S(x,t) \equiv \lim_{\epsilon \to 0} S^{\epsilon}(x,t)$ を取る。

II. 最適制御問題を用いた方法

1. Hamilton-Jacobi方程式の初期値問題を、最適制御問題という異なる問題に置き換える。
2. 粘性解と等価な「値関数」を数値計算する。

⇨ Ⅱの方法を採用する。

最適制御問題

費用汎関数:

$$J[x] \equiv \int_0^t L(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau)\, d\tau \Big|_{x(t)=x} + S_0(x(0))$$

Lagrangian関数　　初期作用関数

$$\boxed{\text{値関数} \quad : \; S(x,t) \equiv \min_{x(\cdot)} J[x] \; (= J[x^*])}$$

(最適制御問題: $J[x]$を最小にする経路$x^*(\tau)$を 見つける。)

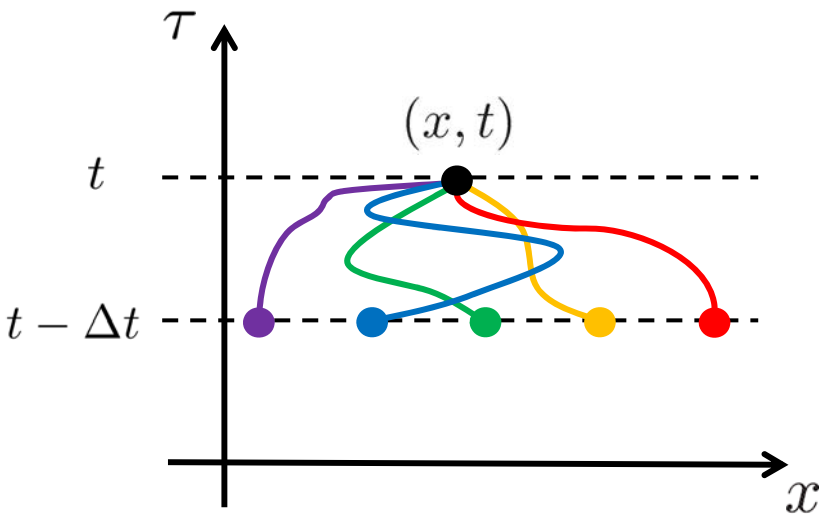
値関数は、Hamilton-Jacobi 方程式の粘性解と等価である事が知られている。

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) = 0 \\ &H(x,p,t) \equiv \max_v [vp - L(x,v,t)] \\ &S(x,0) = S_0(x) \end{aligned}}$$

動的計画法（値関数の計算法）

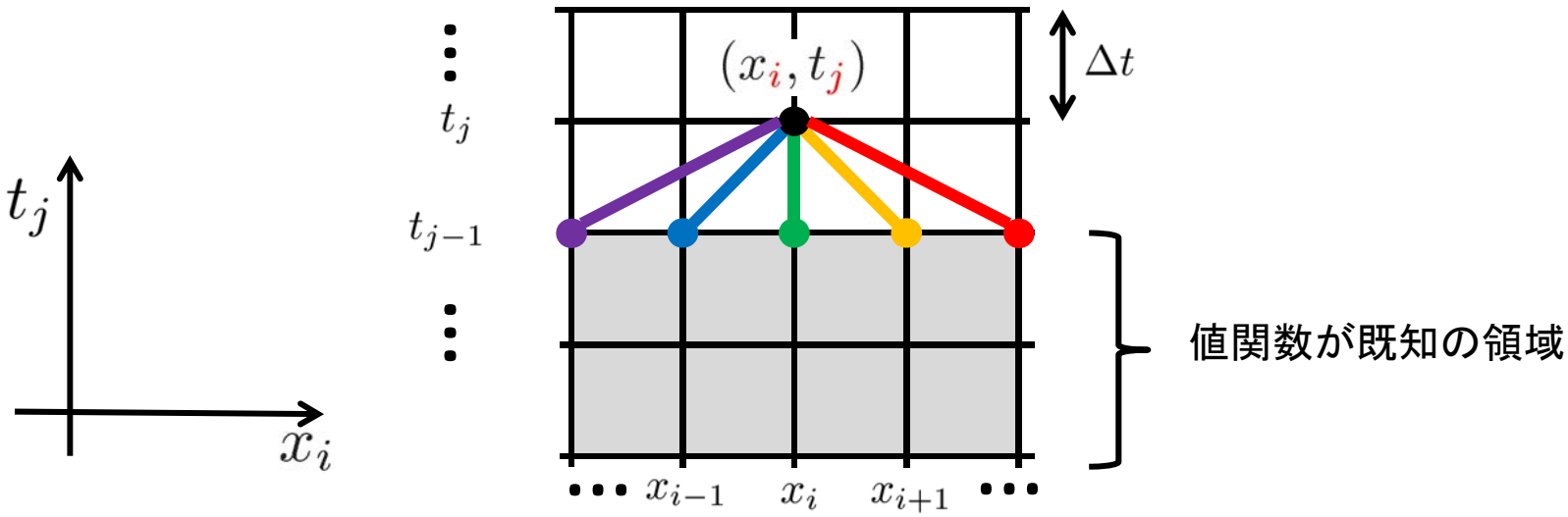
最適性条件（任意のΔtで成立）

$$S(x,t) = \min_x \left[\int_{t-\Delta t}^{t} L(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau)\, d\tau + S\big(x(t-\Delta t), t-\Delta t\big) \right]$$



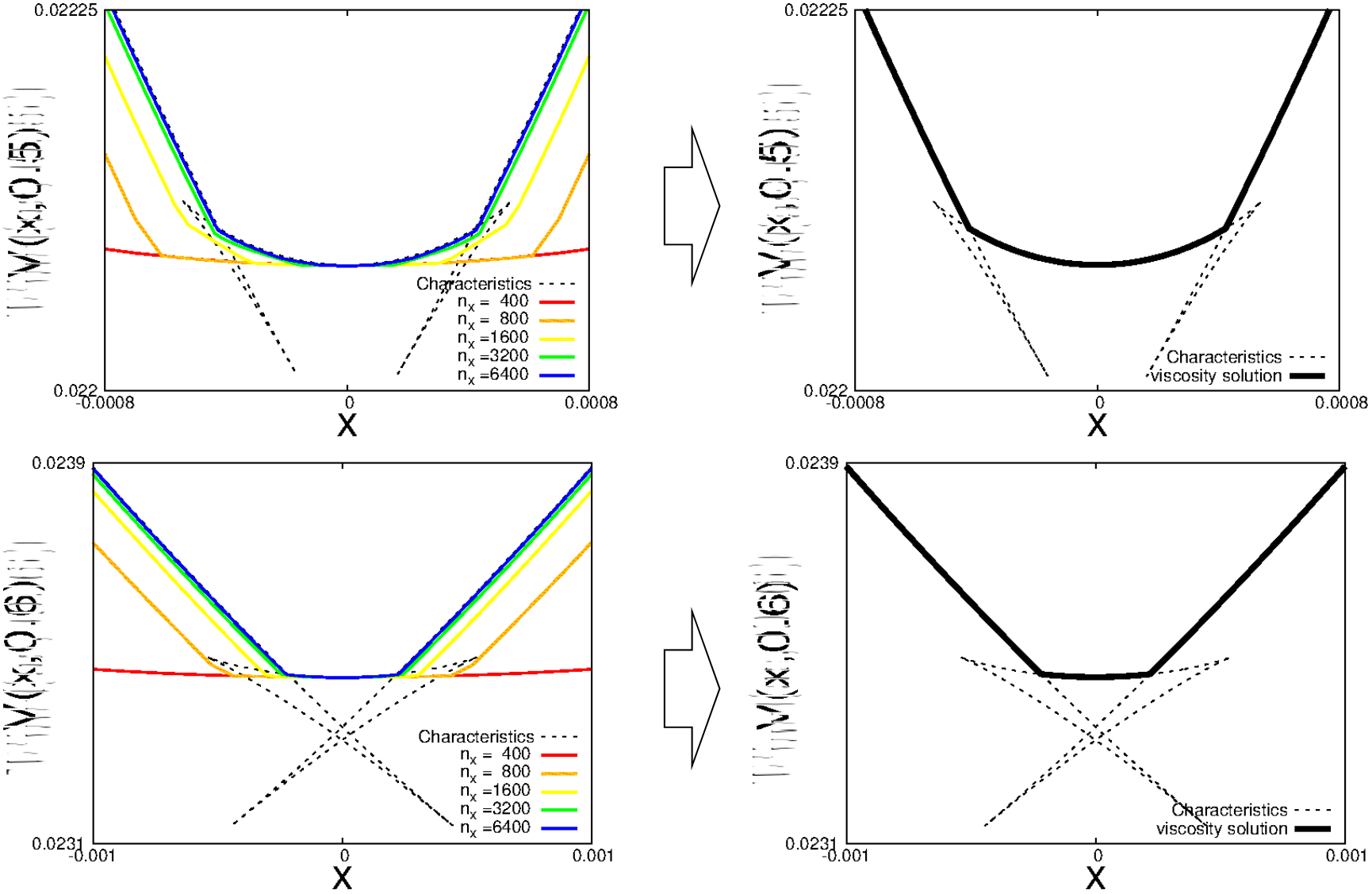
- (x,t)平面を離散化
- Δtを格子幅に取る

$$S(x_i, t_j) \simeq \min_k \left[\underbrace{L\left(\frac{x_i + x_k}{2}, \frac{x_i - x_k}{\Delta t}, \frac{t_j + t_{j-1}}{2}\right) \Delta t}_{t_{j-1} \sim t_j \text{ 間の作用}} + \underbrace{S(x_k, t_{j-1})}_{\text{時刻} t_{j-1} \text{での値関数}} \right]$$

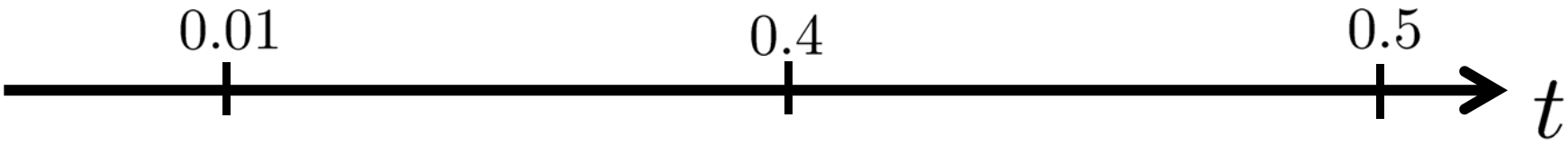


1. 時刻t_{j-1} のすべての格子点の$t_{j-1} \sim t_j$ 間の作用と時刻t_{j-1}での値関数 の和を計算する。
2. 値関数$S(x_i, t_j)$を与えるの格子点t_{j-1}を見つける。

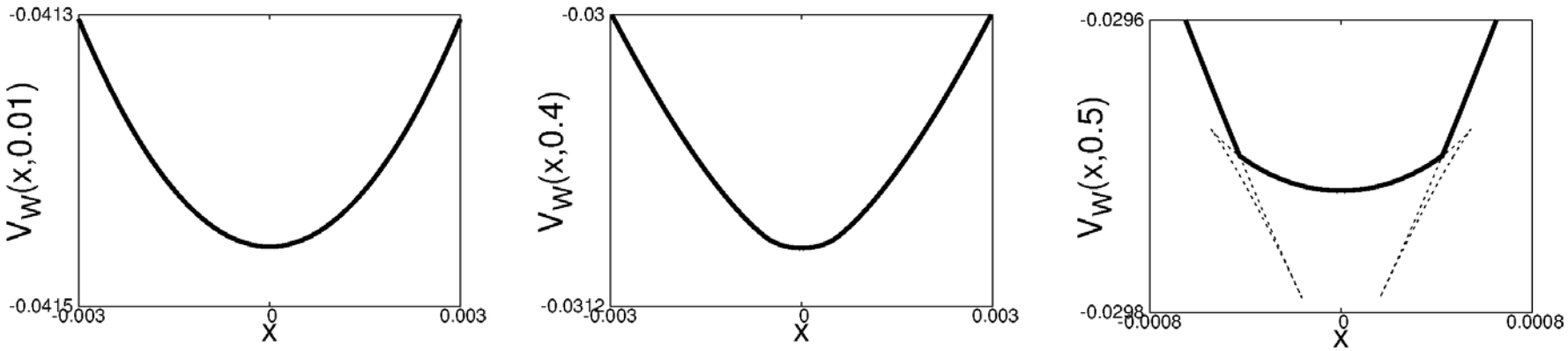
3. 結果 ($t = 0.5, 0.6$)



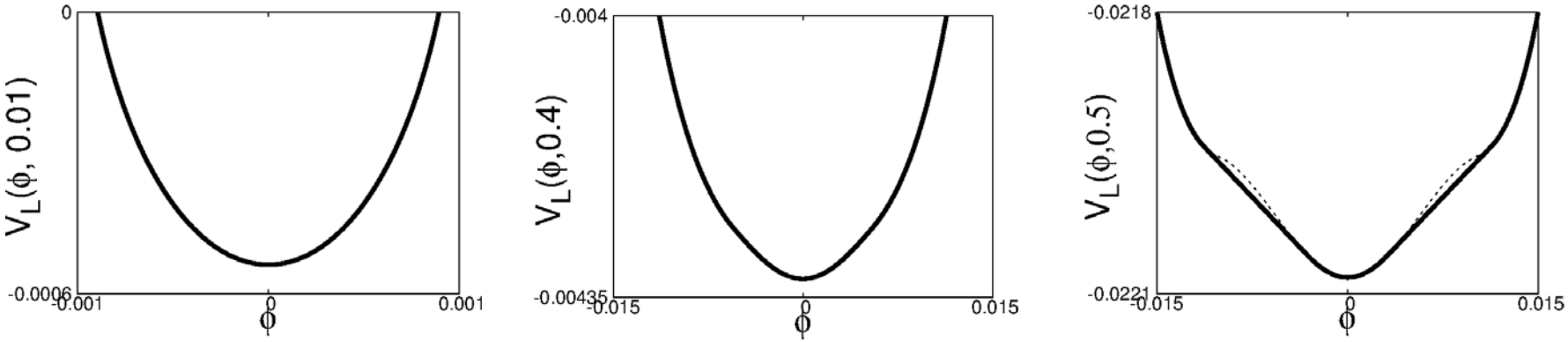
粘性解 $V_{\mathrm{W}}(x,t)$ として、連続かつ最大の解の分岐が選ばれる。



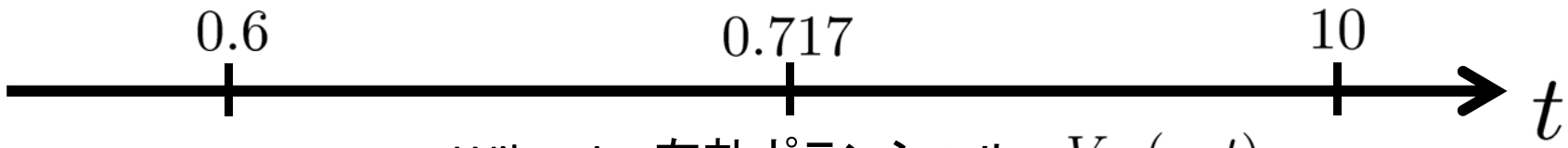
Wilsonian 有効ポテンシャル　$V_{\mathrm{W}}(x,t)$



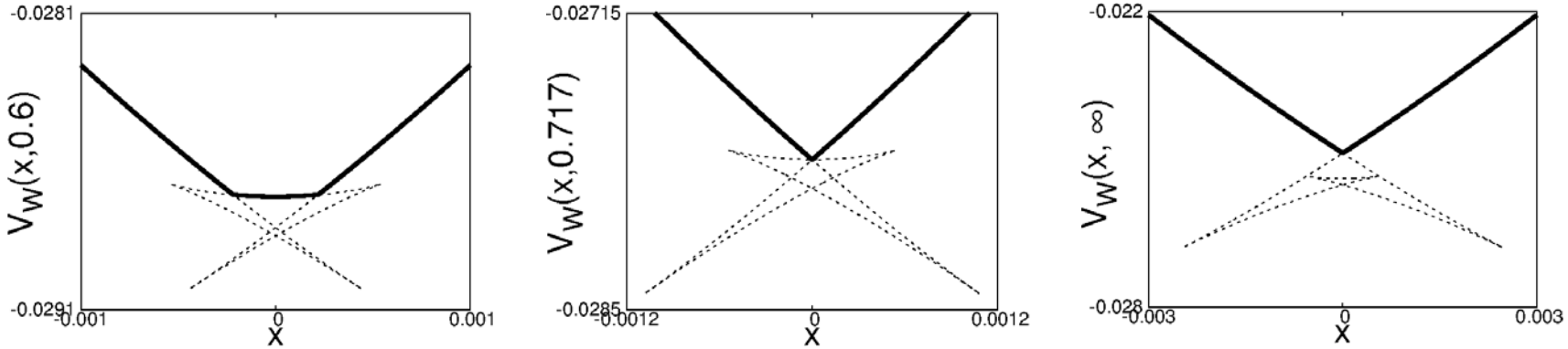
Legendre有効ポテンシャル　$V_{\mathrm{L}}(\varphi,t)$



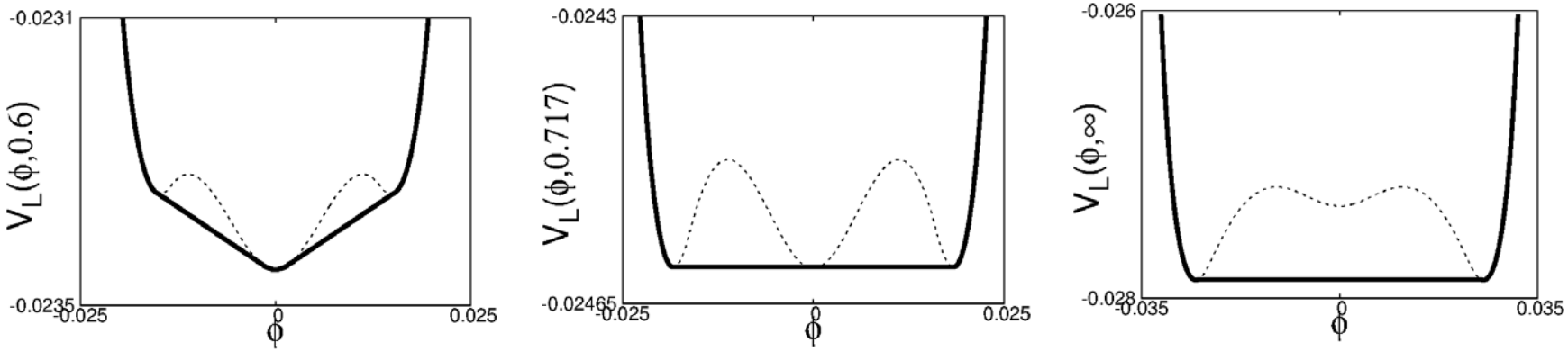
破線：特性曲線、実線：粘性解



Wilsonian有効ポテンシャル　$V_{\mathrm{W}}(x,t)$



Legendre有効ポテンシャル　$V_{\mathrm{L}}(\varphi,t)$

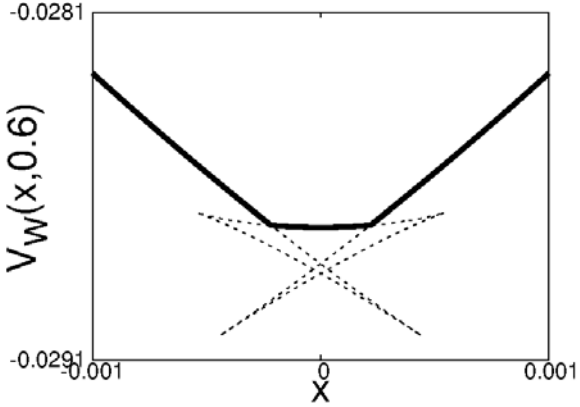
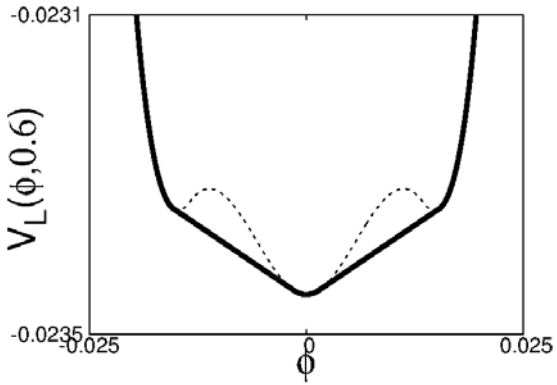


非摂動くりこみ群方程式の粘性解から得られるLegendre有効ポテンシャルは、特性曲線方程式（正準方程式）の結果を凸化させる。それによりLegendre有効ポテンシャルは真空を示す最小値以外の極小値を持たない。

5. まとめと課題

- NJLモデルの非摂動くりこみ群方程式がHamilton-Jacobi方程式型であり、それを特性曲線の方法で解くと多価解を得る。
- 微分不可能点を持つ特異な解は、弱解（粘性解）として解釈できる。
- 「非摂動くりこみ群方程式の粘性解」と等価な、「最適制御問題の値関数」を動的計画法を用いて計算した。
- 粘性解による自発的対称性の破れの記述はグローバルミニマムを真空として自動的に選ぶことが保証され、一次相転移にも直接適用可能である。
- 有限温度・有限密度QCD 、近似を上げた2階偏微分方程式に応用する。

Wilsonian 有効ポテンシャル$V_{\mathrm{w}}(x,t)$



Legendre 有効ポテンシャル$V_{\mathrm{L}}(\varphi,t)$