

Bose-Einstein凝縮体に対する ゼロモード量子状態と 原子核におけるアルファ凝縮模型への応用

2014/9/5 中村 祐介 (早稲田大学)

Collaborated with :

高橋淳一、山中 由也 (早稲田大学)
大久保 茂男 (高知県立大学、大阪大学)

概要

Bose-Einstein凝縮体に対する
ゼロモード量子状態と
原子核におけるアルファ凝縮模型への応用

- Bose-Einstein凝縮体に対する場の量子論
 - BECは位相変換対称性が自発的に破れている
 - ゼロモード(南部Goldstoneモード)が存在
 - ゼロモードに対する量子状態の定義

Y. Nakamura, J. Takahashi, and Y. Yamanaka, Phys. Rev. A **89**, 013613 (2014).

- 応用例
 - 冷却原子気体系のBEC
 - 原子核(C^{12})におけるアルファ粒子の凝縮模型

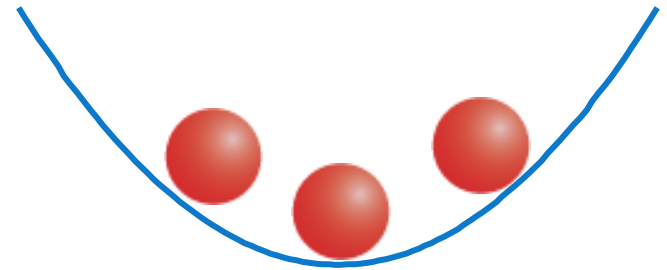
モデル

$$\hat{H} = \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(x) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V_{\text{ex}}(\mathbf{x}) - \mu \right) \hat{\psi}(x) \\ + \frac{1}{2} \int d^3x d^3x' \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}^\dagger(x') U(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \hat{\psi}(x') \hat{\psi}(x)$$

$\hat{\psi}$: Bose粒子の場の演算子 m : Bose粒子の質量 μ : 化学ポテンシャル
 $x = (\mathbf{x}, t)$ $x' = (\mathbf{x}', t)$ $[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x')] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$

$V_{\text{ex}}(\mathbf{x})$: 捕捉ポテンシャル

$U(r)$: 相互作用ポテンシャル(非接触型)



$U(r)$ は十分弱く、**ほぼ完全凝縮**していると仮定。 **基底状態と励起準位を求める！**

φ で書いたハミルトニアン

- Bose-Einstein凝縮している真空を $|0\rangle$ とする

$$\langle 0 | \hat{\psi}(x) | 0 \rangle = \xi(x)$$

- 場を秩序変数とゆらぎに分割

$$\hat{\psi}(x) = \xi(x) + \hat{\varphi}(x)$$

- ハミルトニアンを φ の次数で整理

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \hat{H}_4$$

$|0\rangle$ を決定するために、まず非摂動ハミルトニアンを決める。 $\|\xi\| \gg \|\varphi\|$ なので φ の低次を拾う

$$\hat{H}_1 = \int d^3x \ (\hat{\varphi}(x) + \hat{\varphi}^\dagger(x)) (h_0(x) - \mu + V_H(x)) \xi(x)$$

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2} \int d^3x d^3x' \ (\hat{\varphi}^\dagger(x) \quad -\hat{\varphi}(x)) \begin{pmatrix} \mathcal{L}(x, x') & \mathcal{M}(x, x') \\ -\mathcal{M}(x, x') & -\mathcal{L}(x, x') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}(x') \\ \hat{\varphi}^\dagger(x') \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}_3 = \int d^3x d^3x' U(|x - x'|) \xi(x') (\hat{\varphi}^\dagger(x) \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') + \hat{\varphi}^\dagger(x') \hat{\varphi}^\dagger(x) \hat{\varphi}(x))$$

$$\hat{H}_4 = \frac{1}{2} \int d^3x d^3x' U(|x - x'|) \hat{\varphi}^\dagger(x) \hat{\varphi}^\dagger(x') \hat{\varphi}(x') \hat{\varphi}(x)$$

$$h_0(x) = -\frac{\nabla^2}{2m} + V_{\text{ex}}(x)$$

$$V_H(x) = \int d^3x' U(|x - x'|) \xi^2(x')$$

$$V_F(x, x') = U(|x - x'|) \xi(x) \xi(x')$$

$$\mathcal{L}(x, x') = \delta(x - x') (h_0 - \mu + V_H(x)) + V_F(x, x')$$

$$\mathcal{M}(x, x') = V_F(x, x')$$

従来の方法

- ① $\hat{H}_1 + \hat{H}_2$ を非摂動ハミルトニアンに選ぶ
- ② $|0\rangle$ を非摂動ハミルトニアンの固有状態に選ぶ
- ③ $\langle 0|\hat{\varphi}|0\rangle = 0$ を要請 $\left[\langle 0|\hat{\psi}|0\rangle = \xi \quad \hat{\psi} = \xi + \hat{\varphi} \text{ と等価} \right]$

② $\rightarrow \langle 0|[\hat{\varphi}, \hat{H}_1 + \hat{H}_2]|0\rangle = 0$

③ $\downarrow$

$\hat{H}_1 = 0$

$(h_0 - \mu + V_H)\xi = 0$

Gross-Pitaevskii 方程式

$$\left[V_H(\mathbf{x}) = \int d^3x' U(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)\xi^2(\mathbf{x}') \right]$$

非摂動ハミルトニアンに対角化

- 結局、非摂動ハミルトニアンは $\hat{H}_2 = \frac{1}{2} \int d^3x d^3x' \begin{pmatrix} \hat{\varphi}^\dagger(x) & -\hat{\varphi}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}(x, x') & \mathcal{M}(x, x') \\ -\mathcal{M}(x, x') & -\mathcal{L}(x, x') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}(x') \\ \hat{\varphi}^\dagger(x') \end{pmatrix}$

- $\hat{H}_2$ を対角化するために、Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式を使う

N. N. Bogoliubov, J. Phys. (Moscow) **11**, 32 (1947).

P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys* (Benjamin, New York, 1966).

- BdG方程式の完全系で $\hat{\varphi}$ を展開することで、 $\hat{H}_2$ が“対角化”される。

M. Lewenstein and L. You, Phys. Rev. Lett. **77**, 3489 (1996).

H. Matsumoto and S. Sakamoto, Prog. Theor. Phys. **107**, 679 (2002).

Bogoliubov-de Gennes方程式

$$T \mathbf{y}_\ell = \omega_\ell \mathbf{y}_\ell \quad T = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M} & -\mathcal{L} \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}_\ell = \begin{pmatrix} u_\ell \\ v_\ell \end{pmatrix}$$

BdG完全系による場の展開

- BdG方程式には常に、ゼロ固有値が存在する。

位相変換対称性の自発的対称性の破れに対応するゼロモード

$$T\mathbf{y}_0 = 0$$

$$\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi \end{pmatrix}$$

- BdG固有関数で完全系を作るために、1つ別の関数を追加する。(共役モード) $\mathbf{y}_{-1} = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix}$

M. Lewenstein and L. You, Phys. Rev. Lett. **77**, 3489 (1996).

H. Matsumoto and S. Sakamoto, Prog. Theor. Phys. **107**, 679 (2002).

$$\left[\eta = \frac{\partial \xi}{\partial N_0} \quad N_0 = \int d\mathbf{x} \xi^2 \right]$$

- BdG完全系による、場の演算子 $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ の展開

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell} \left[\hat{a}_{\ell}(t) u_{\ell}(\mathbf{x}) + \hat{a}_{\ell}^{\dagger}(t) v_{\ell}^*(\mathbf{x}) \right] - i\hat{Q}(t)\xi(\mathbf{x}) + \hat{P}(t)\eta(\mathbf{x})$$

仮定

- 複素固有値が存在しない(系は動的不安定ではない)
- 他の対称性は自発的に破れていない(ソリトン等は存在しない)

- 交換関係 $[\hat{a}_{\ell}(t), \hat{a}_{\ell'}^{\dagger}(t)] = \delta_{\ell\ell'}$ $[\hat{Q}(t), \hat{P}(t)] = i$ (otherwise) = 0

励起モードとゼロモードで定性的な違い！

非摂動ハミルトニアンに対角化と ゼロモードのジレンマ

$$\hat{H}_2 = \sum_{\ell} \omega_{\ell} \hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell} + \frac{I \hat{P}^2}{2} \quad \left(I = \frac{\partial \mu}{\partial N_0} \right)$$

励起モード部分
生成消滅演算子で
対角化されている

ゼロモード部分
対角化されていない。
自由粒子のハミルトニアン

問題：ゼロモード部分の量子状態の定義は？ $|0\rangle = |0\rangle_{\text{ex}} \otimes |\Psi\rangle$

(A) $\hat{H}_2$ の基底固有状態を選ぶ

$$\langle \Psi | \hat{P}^2 | \Psi \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \Psi | \hat{Q}^2 | \Psi \rangle = \infty \quad \Rightarrow \quad \langle \Psi | \hat{\psi}^{\dagger} \hat{\psi} | \Psi \rangle = \infty \quad \text{物理的でない!}$$

(B) $|\Psi\rangle$ として何らかの波束状態を選ぶ

M. Lewenstein and L. You, Phys. Rev. Lett. **77**, 3489 (1996).

- 選ぶ基準が分からない
- 固有状態ではないので、時間発展する

● $\langle \Psi | \hat{Q}^2 | \Psi \rangle$ や $\langle \Psi | \hat{\psi}^{\dagger} \hat{\psi} | \Psi \rangle$ は t^2 で成長
短時間なら有効?

(C) ゼロモードを無視する (Bogoliubov 近似)

$\hat{\varphi}$ の正準交換関係を壊してしまう

新しい非摂動ハミルトニアン

我々の提案する新しいハミルトニアン

$$\hat{H}_u = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \left[\hat{H}_3 + \hat{H}_4 \right]_{QP} - \delta\mu \hat{P}$$

$[\cdots]_{QP}$ は $\hat{Q}, \hat{P}$ だけを取り出す操作

ex.) $\left[\alpha \hat{Q} + \beta \hat{P} \hat{a} + \gamma \hat{a} \right]_{QP} = \alpha \hat{Q}$



- ゼロモード演算子 $\hat{Q}, \hat{P}$ の3次以上の項を含む
- カウンター項の $\delta\mu$ はあとで決める

$$\hat{H}_u = \hat{H}_u^{QP} + \hat{H}_u^{\text{ex}}$$

● $\hat{H}_u^{\text{ex}} = \int d^3x (\hat{\varphi}_{\text{ex}} + \hat{\varphi}_{\text{ex}}^\dagger)(h_0 - \mu + V_H)\xi + \sum_\ell \omega_\ell \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell$

● $\hat{H}_u^{QP} = -(\delta\mu + 2C + 2C')\hat{P} + \frac{I - 4D}{2}\hat{P}^2 + 2B\hat{Q}\hat{P}\hat{Q}$
 $+ 2D\hat{P}^3 + \frac{1}{2}A\hat{Q}^4 - 2B\hat{Q}^2 + C\hat{Q}\hat{P}^2\hat{Q} + \frac{1}{2}E\hat{P}^4$

$$\left[\begin{array}{lll} A = \int d^3x d^3x' U(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \xi^2(\mathbf{x}) \xi^2(\mathbf{x}'), & B = \int d^3x d^3x' U(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \xi^2(\mathbf{x}) \xi(\mathbf{x}') \eta(\mathbf{x}'), & C = \int d^3x d^3x' U(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \xi^2(\mathbf{x}) \eta^2(\mathbf{x}'), \\ C' = \int d^3x d^3x' U(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \xi(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{x}) \xi(\mathbf{x}') \eta(\mathbf{x}'), & D = \int d^3x d^3x' U(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \xi(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{x}) \eta^2(\mathbf{x}'), & E = \int d^3x d^3x' U(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \eta^2(\mathbf{x}) \eta^2(\mathbf{x}'), \end{array} \right]$$

ゼロモード部分の固有関数

$$\hat{H}_u^{QP} = -(\delta\mu + 2C + 2C')\hat{P} + \frac{I - 4D}{2}\hat{P}^2 + 2B\hat{Q}\hat{P}\hat{Q} + 2D\hat{P}^3 + \frac{1}{2}A\hat{Q}^4 - 2B\hat{Q}^2 + C\hat{Q}\hat{P}^2\hat{Q} + \frac{1}{2}E\hat{P}^4$$

量子状態の選び方 $|0\rangle = |\Psi\rangle \otimes |0\rangle_{\text{ex}}$

$|0\rangle_{\text{ex}} : \hat{a}_\ell \text{ の真空}$

$|\Psi\rangle : \hat{H}_u^{QP}|\Psi\rangle = \mathcal{E}_0|\Psi\rangle$

場の分割条件

$$\langle 0 | \hat{\varphi} | 0 \rangle = 0$$



$${}_{\text{ex}}\langle 0 | \varphi_{\text{ex}} | 0 \rangle_{\text{ex}} = 0$$

$$\langle \Psi | Q | \Psi \rangle = 0$$

$$\langle \Psi | P | \Psi \rangle = 0$$

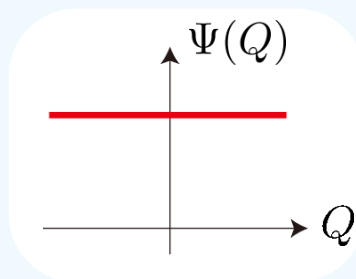
$$(h_0 - \mu + V_H)\xi = 0$$

これらを満たすように $\delta\mu$ を選ぶ

ゼロモードのジレンマの解消

従来の方法

$$\hat{H}_u^{QP} = \frac{I}{2} \hat{P}^2$$



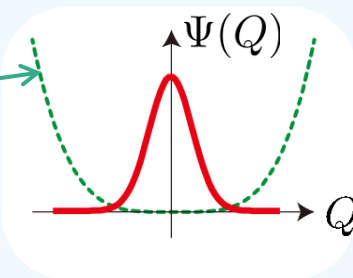
$$\langle \Psi | \hat{P}^2 | \Psi \rangle = 0$$

$$\langle \Psi | \hat{Q}^2 | \Psi \rangle = \infty$$

- 自由粒子型のハミルトニアンが赤外発散を引き起こしていた

新しい方法

$$\hat{H}_u^{QP} = \frac{I}{2} \hat{P}^2 + A \hat{Q}^4 + \dots$$



$$\langle \Psi | \hat{P}^2 | \Psi \rangle < \infty$$

$$\langle \Psi | \hat{Q}^2 | \Psi \rangle < \infty$$

- $\hat{Q}$ の高次の項が“ポテンシャル”の様に働き、赤外発散を回避
- 正準交換関係を破らない
- 量子状態は一意に決まる。時間発展もしない。

ゼロモードを取り入れることで 評価できるようになったもの

$$\hat{H}_u^{QP} |\Psi\rangle = \mathcal{E}_0 |\Psi\rangle$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_u^{QP} = & -(\delta\mu + 2C + 2C')\hat{P} + \frac{I - 4D}{2}\hat{P}^2 + 2B\hat{Q}\hat{P}\hat{Q} \\ & + 2D\hat{P}^3 + \frac{1}{2}A\hat{Q}^4 - 2B\hat{Q}^2 + C\hat{Q}\hat{P}^2\hat{Q} + \frac{1}{2}E\hat{P}^4 \end{aligned}$$

$$\hat{a}_\ell |0\rangle_{\text{ex}} = 0$$

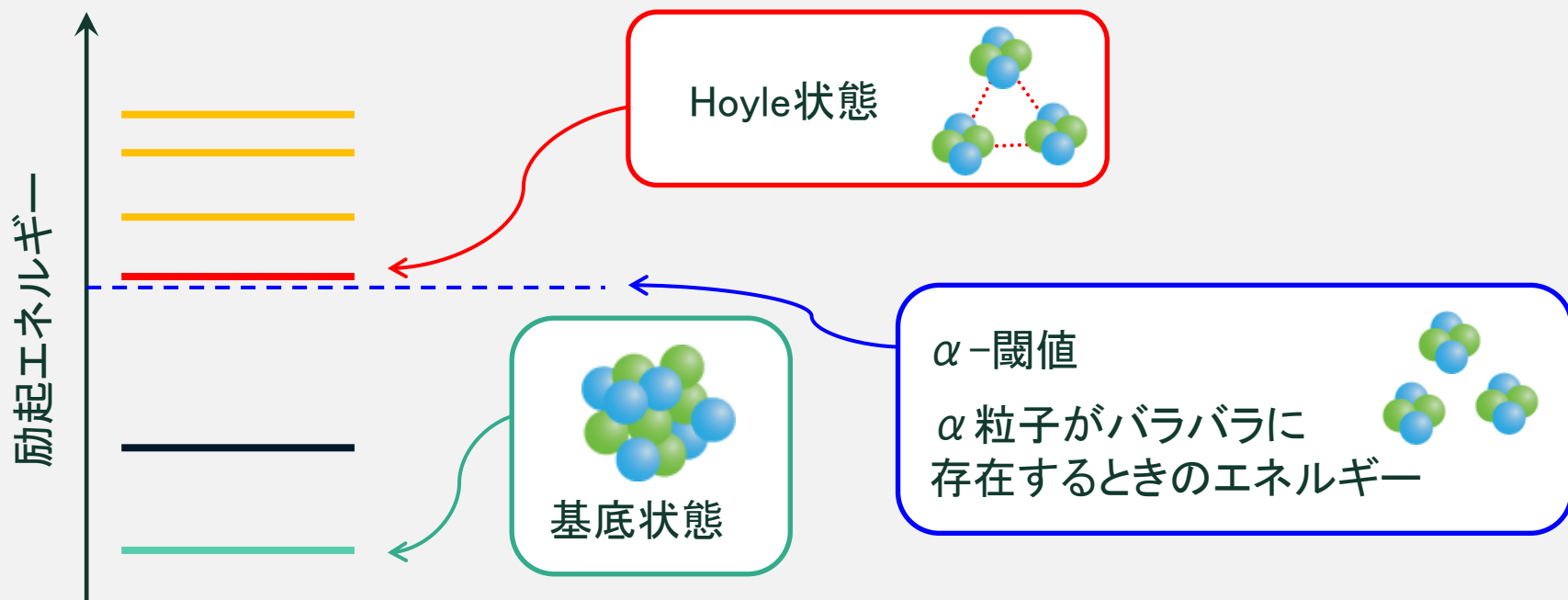
$$\hat{H}_u^{\text{ex}} = \sum_\ell \omega_\ell \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell$$

- 凝縮体の位相揺らぎ ΔQ 、凝縮粒子数揺らぎ ΔP
- ゼロモード由来の励起エネルギー $\mathcal{E}_n$

Cf. 励起モード由来の励起エネルギー ω_ℓ

原子核物理への応用

C^{12} の原子核の励起エネルギー



Hoyle状態は3つのアルファ粒子によるBose-Einstein凝縮である可能性がある

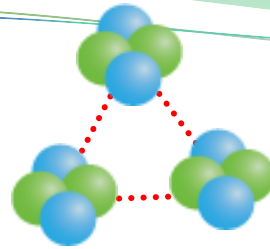
E. Uegaki, *et al.*, Prog. Theor. Phys. **57**, 1262 (1977).

P. Schuck, *et al.*, J. Phys.: Conf. Ser. **413**, 012009 (2013).

S. Ohkubo, arXiv: 1301.7485 (2013).

Hoyle状態からの励起エネルギーは？

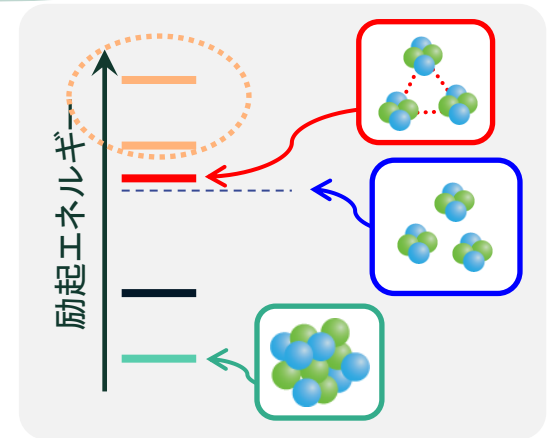
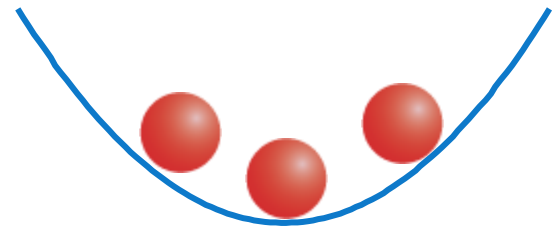
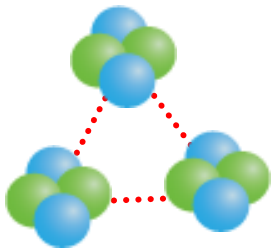
モデリング



- Hoyle状態は、真空中に α 粒子が複雑な相互作用によって結合している。
- α 粒子の内部自由度を無視

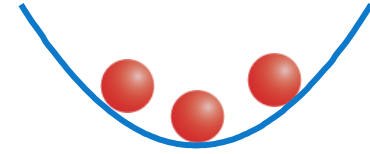


- 「複雑な相互作用」を現象論的に単純化
 - 「捕捉ポテンシャル」+「単純な2体相互作用」



Hoyle励起エネルギー : 約2MeV
 α 粒子結合エネルギー : 28MeV
陽子の質量 : 938MeV

ハミルトニアン



$$\hat{H} = \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(x) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V_{\text{ex}}(\mathbf{x}) - \mu \right) \hat{\psi}(x) + \frac{1}{2} \int d^3x d^3x' \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}^\dagger(x') U(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \hat{\psi}(x') \hat{\psi}(x)$$

現象論的な捕捉ポテンシャル

$$V_{\text{ex}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} m \Omega^2 x^2$$



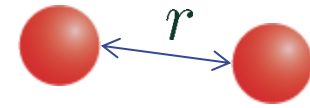
現象論的な相互作用ポテンシャル
(Ali-Bodmerポテンシャル)

$$U(r) = V_r e^{-\mu_r^2 r^2} + V_a e^{-\mu_a^2 r^2}$$



フィッティング・パラメータ: $\Omega, V_r, V_a, \mu_r, \mu_a$

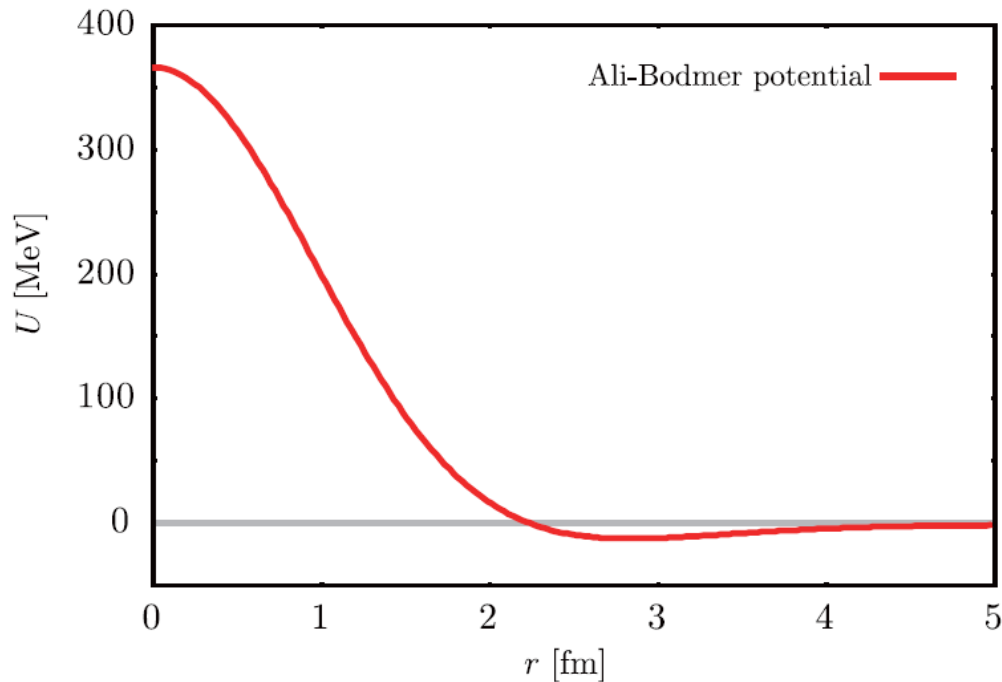
Ali-Bodmerポテンシャル



V_r	μ_r	V_a	μ_a
500 MeV	0.7 fm^{-1}	-130MeV	0.475 fm^{-1}
斥力高さ	斥力幅	引力高さ	引力幅

S.Ali and A.R.Bodmer, Nucl. Phys. **80**, 99 (1966).

$$U(r) = V_r e^{-\mu_r^2 r^2} + V_a e^{-\mu_a^2 r^2}$$

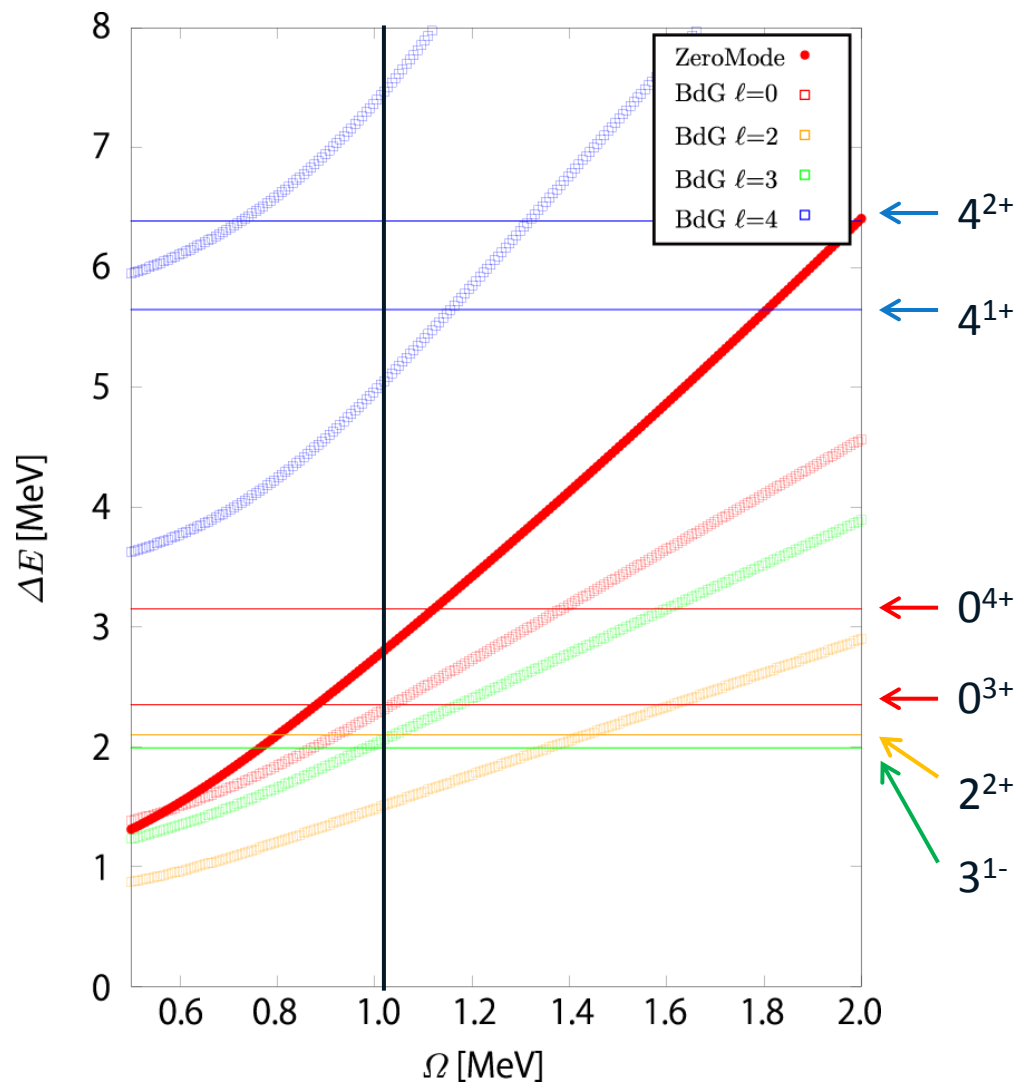


- Coulombポテンシャルは無視できるほど小さい
- パラメータは後でフィッティング

Cf. 冷却原子気体系では...

$$U(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = g\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

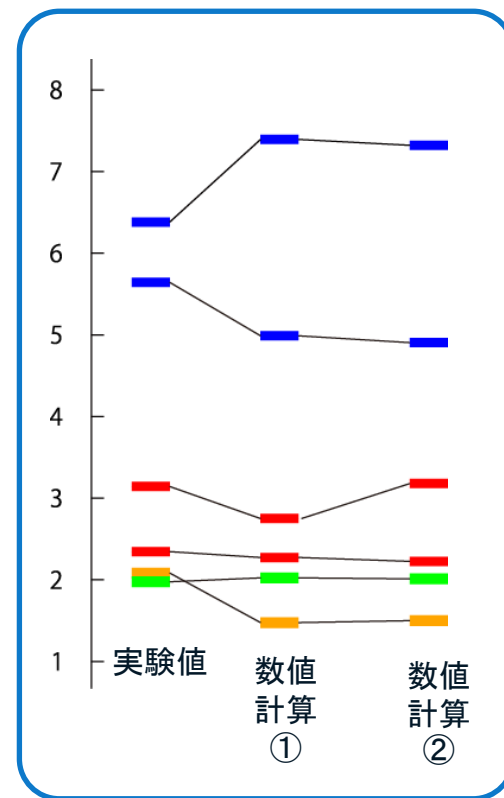
^{12}C 原子核の励起準位



	V_r	μ_r	V_a	μ_a
①	500 MeV	0.700 fm^{-1}	-130MeV	0.475 fm^{-1}
②	525 MeV	0.797 fm^{-1}	-131MeV	0.481 fm^{-1}

①: Ali-Bodmerポテンシャルの標準的な値

②: Preliminaryなフィッティング



まとめ と 今後の展望

- Bose-Einstein凝縮に対するゼロモードの扱い方
 - ゼロモードに対する量子状態
 - 非摂動ハミルトニアンを取り方
- Hoyle状態からの励起準位を説明できる可能性

- パラメータのフィッティング
- その他の応用
 - 冷却原子気体系BECの干渉縞のVisibility
 - 温度効果・非平衡系