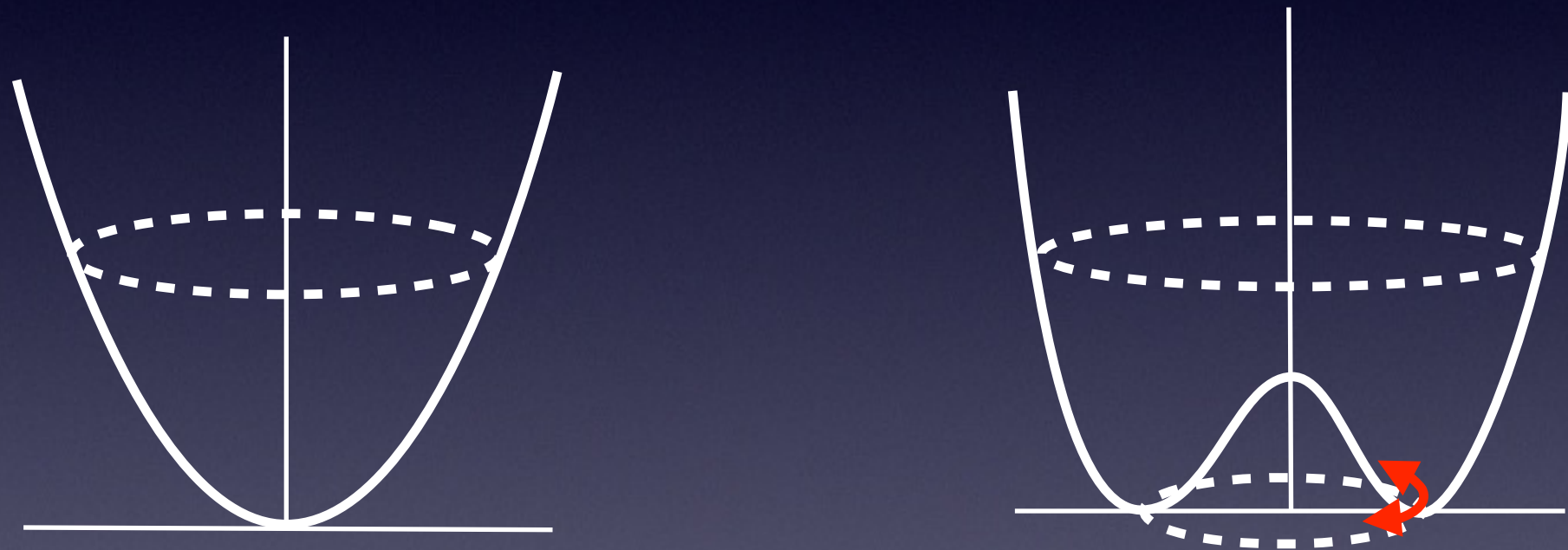


自発的対称性の破れと 南部-Goldstone モード



日高義将
(理研仁科センター)

様々な物理状態

自発的対称性の破れ

並進対称性



CC by-sa Didier Descouens

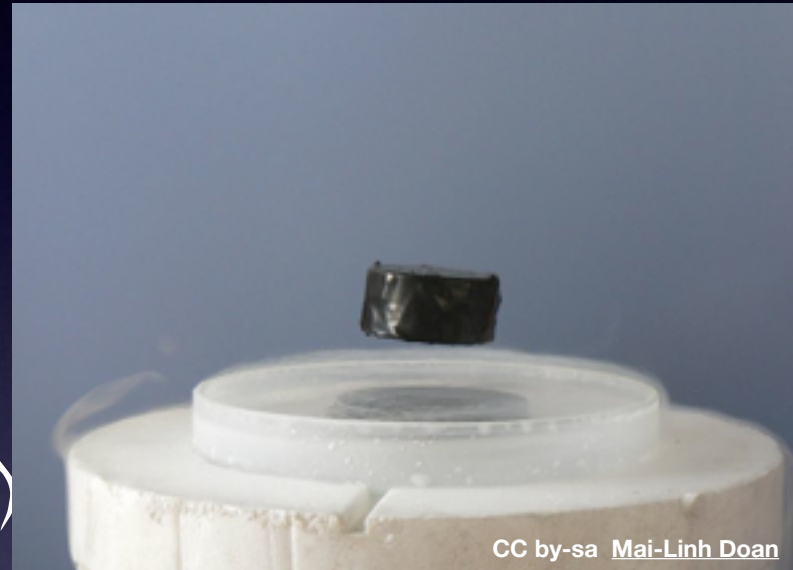
ガリレイ対称性



並進対称性

CC by-sa Elijah van der Giessen

U(1)ゲージ対称性



CC by-sa Mai-Linh Doan

並進対称性



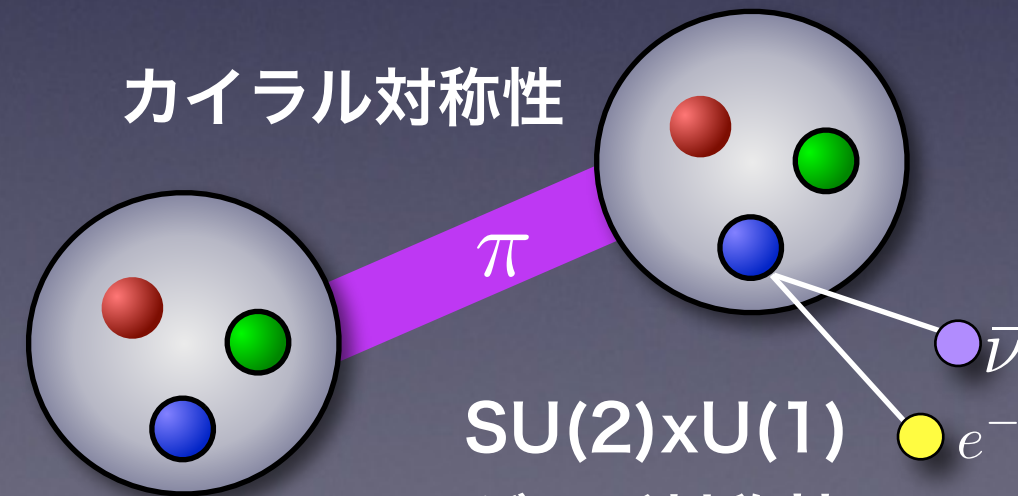
CC by-sa Roger McLassus

スピン対称性



CC by-sa Aney

カイラル対称性



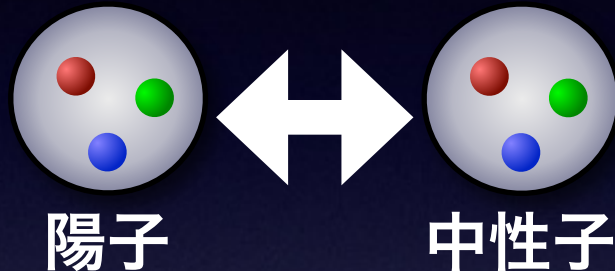
SU(2)xU(1)
ゲージ対称性

多くの場合波をともしなう

対称性の種類

内部対称性

アイソスピン



原子のスピン



時空対称性

時間並進, 空間並進, 回転, ブースト

ゲージ対称性

電磁気, 弱い力, 強い力 $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$

連続対称性と保存則

ネーターの定理 Noether 1915

対称性

時間並進

空間並進

回転

U(1)位相変換

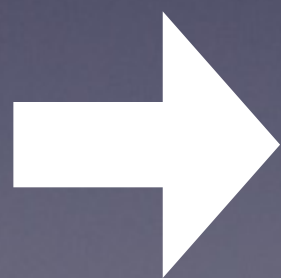
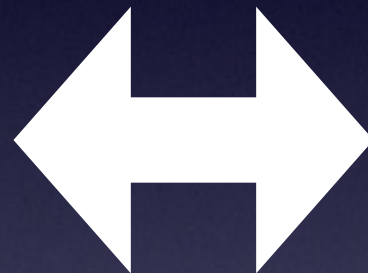
保存則

エネルギー

運動量

角運動量

電荷



保存則 $\partial_t n_a(t, \boldsymbol{x}) + \partial_i j_a^i(t, \boldsymbol{x}) = 0$

保存電荷 $Q_a = \int d^3x n_a(t, \boldsymbol{x}) \quad \frac{d}{dt} Q_a = 0$

対称性の破れのパターン

陽な破れ

パリティ対称性の破れ, CP対称性の破れ, ...

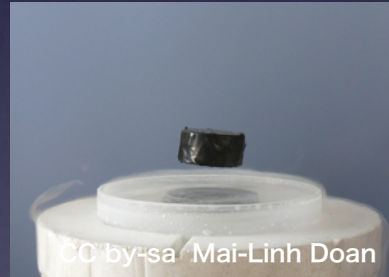
自発的

磁性体



CC by-sa Aney

超伝導



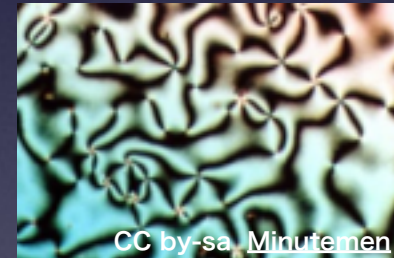
CC by-sa Mai-Linh Doan

結晶



CC by-sa Didier Descouens

液晶,



CC by-sa Minutemen

量子異常

カイラルアノマリー, ワイルアノマリー,
ゲージアノマリー, パリティアノマリー,

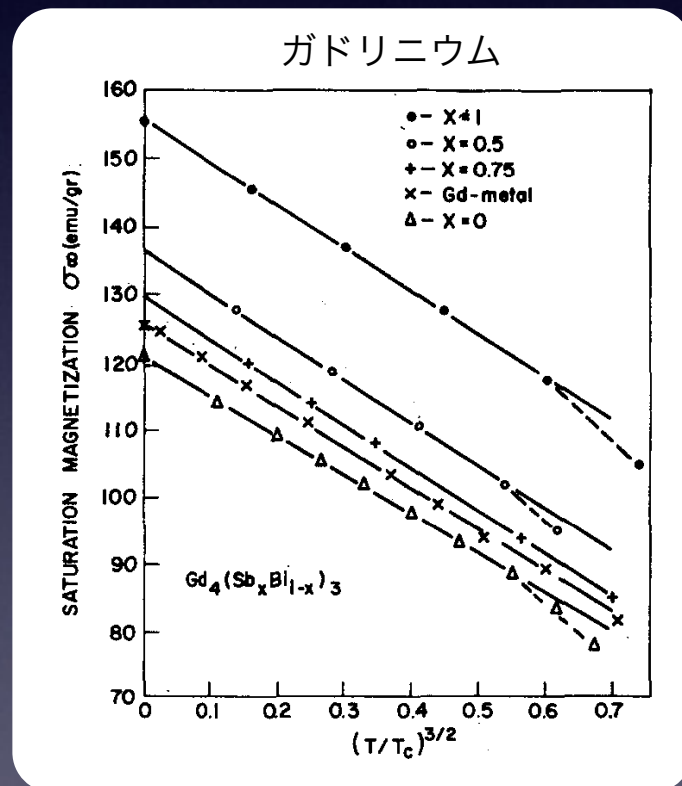
連続対称性の自発的破れ

何がうれしいか？

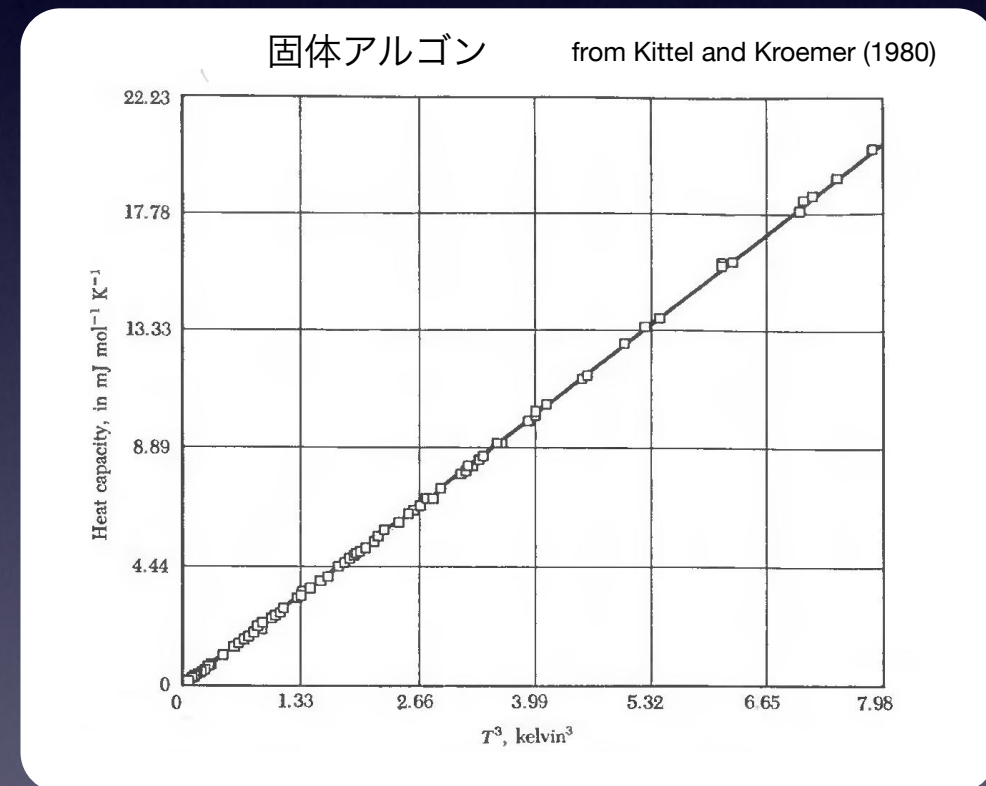
理論の詳細によらず様々な事が言える.

Bloch $T^{3/2}$ 則,

Debye T^3 則, ...



Holtzberg, McGuire, M'ethfessel, Suits, J. Appl. Phys. 35,1033 (1964)



QCD ($N_f=2$)

カイラル凝縮: $\frac{\langle \bar{q}q \rangle_T}{\langle \bar{q}q \rangle_0} = 1 - \frac{1}{8} \frac{T^2}{f_\pi^2} + \dots$ 比熱: $C_V = \frac{2}{5} \pi^2 T^3 + \dots$

連続対称性の自発的破れ

何がうれしいか？

理論の詳細によらず様々な事が言える.

低エネルギー定理

例) Goldberger-Treiman relation

$$g_{\pi NN} = 2m_N g_A / f_\pi$$



異なるvertexの結合定数の関係

連続対称性の自発的破れ

Nambu('60), Goldstone(61), Nambu, Jona-Lasinio('61),

Gapless励起

=南部-Goldstoneモード

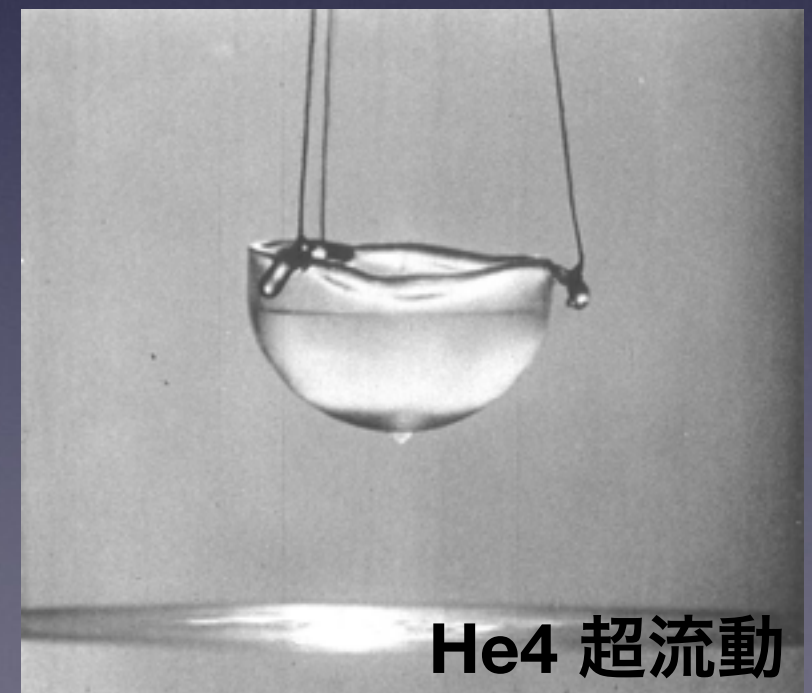
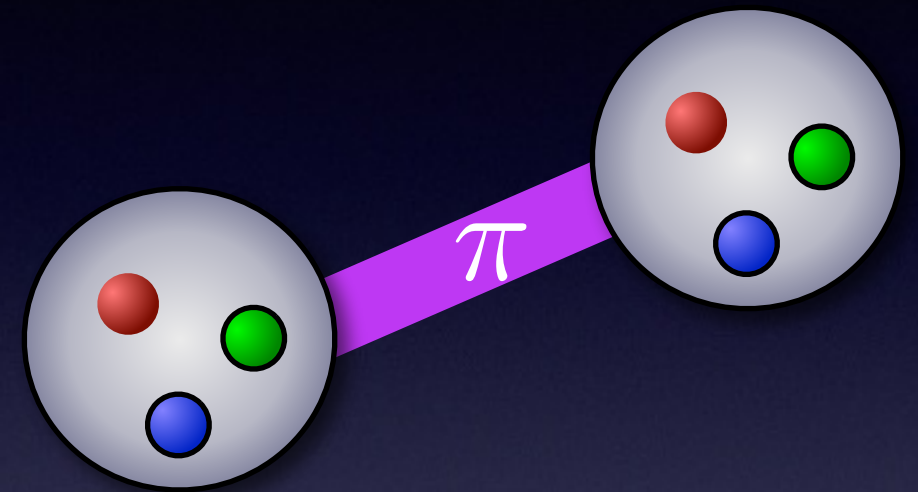
例) QCDにおけるパイ中間子
カイラル対称性の破れ

$$\omega = \pm \sqrt{k^2 + m^2}$$

超流動(フォノン)

粒子数の破れ

$$\omega = \pm v|k|$$

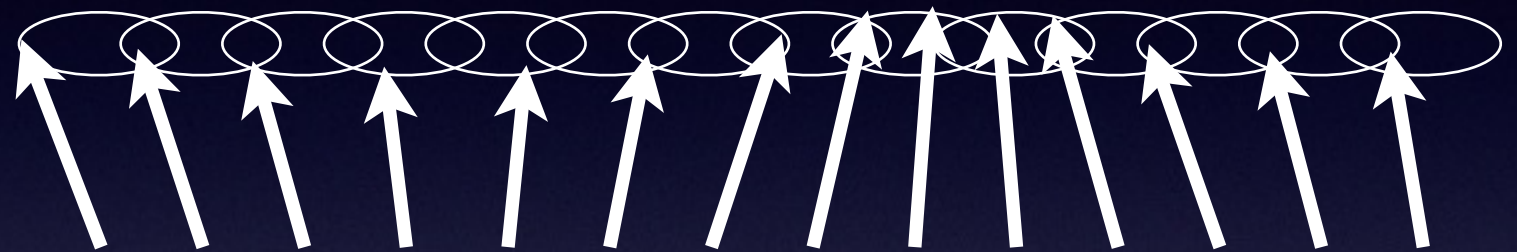


連続対称性の自発的破れ

スピン波(マグノン)

スピン対称性の破れ

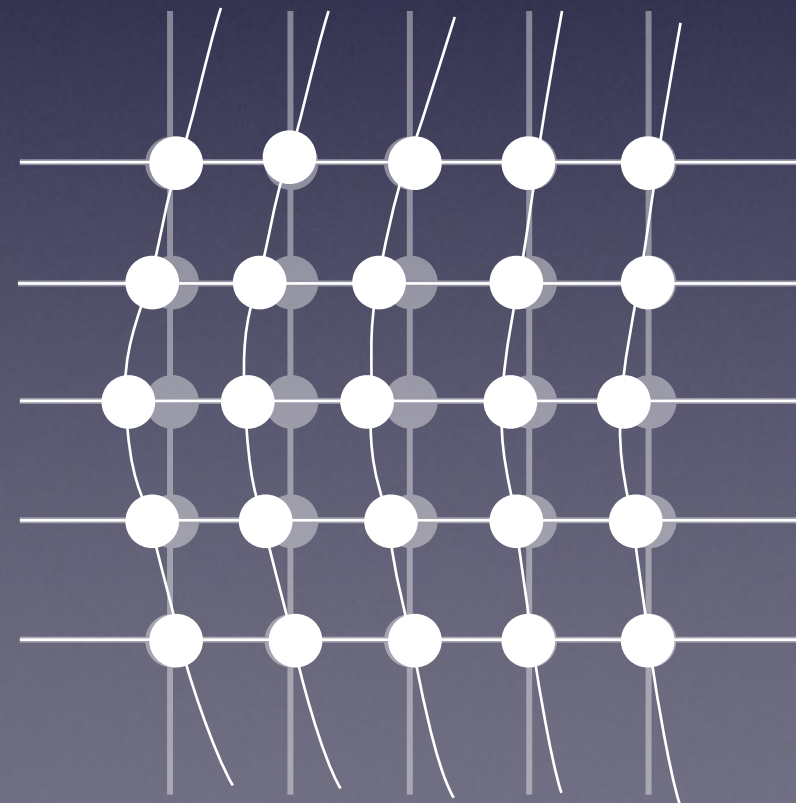
$$\omega = \pm v' k^2$$



格子振動(フォノン)

並進対称性の破れ

$$\omega = \pm v |k|$$



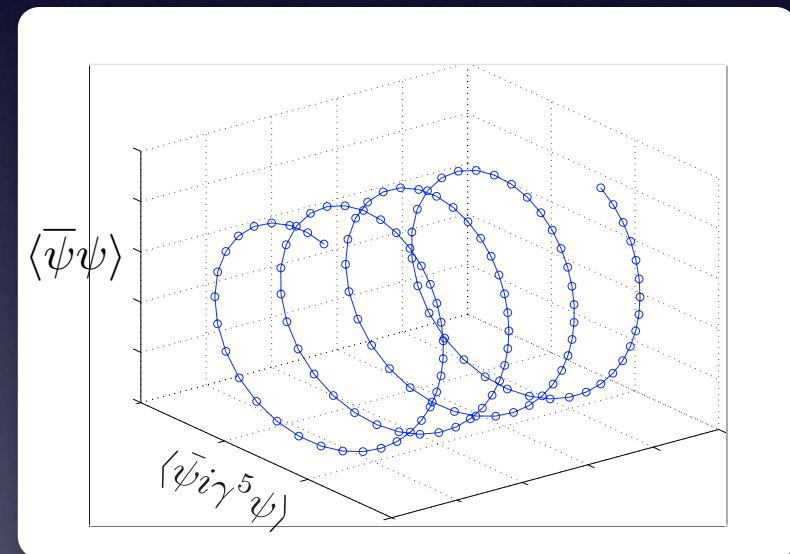
連続対称性の自発的破れ

表面波 $\omega = \pm v|k|^{3/2}$



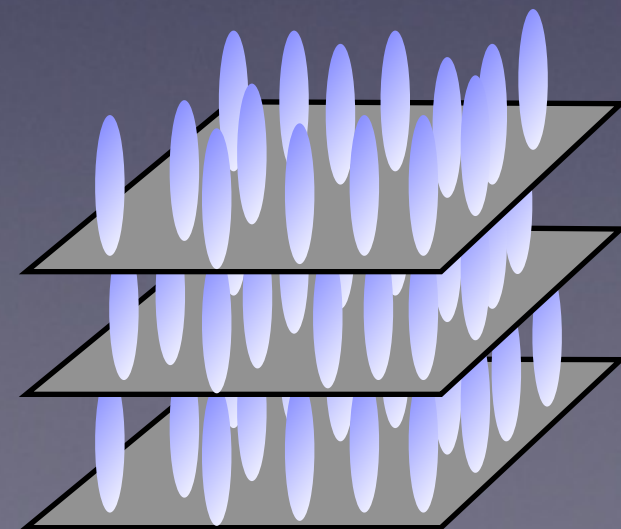
1次元的な秩序

$$\omega = \pm \sqrt{ak_z^2 + bk_\perp^4}$$



液晶(smectic-A相)

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{k_\perp^2 (ak_z^2 + bk_\perp^4)}{k_\perp^2 + k_z^2}}$$



自発的対称性の破れ: 簡単な歴史(1900~)

自発磁化

Magnetic domain理論

Weiss (1907)

Ising模型

Lenz (1920)

Ising (1925)

Heisenberg模型

Heisenberg (1928)

スピン波の導入

Bloch (1930)

Bloch則 $M(T) = M(0)(1 - cT^{3/2})$

超伝導と南部-Goldstoneモード

超伝導発見

Onnes (1911)

BCS理論

Bardeen, Cooper, Schrieffer ('57)

南部, Goldstone理論
(自発的対称性の破れ)

Nambu('60), Goldstone (61),
Nambu, Jona-Lasinio ('61),
Goldstone, Salam, Weinberg ('62).

Brout-Englert-Higgs 機構

Anderson('62), Brout, Englert ('64), Higgs ('64),
Guralnik, Hagen, Kibble ('64), Migdal, Polyakov ('65)

自発的対称性の破れの理論

内部対称性の自発的破れ

連続対称性の自発的破れの定義

自発的対称性の破れは, ある電荷 Q_a について

$$\langle [iQ_a, \phi_i(\boldsymbol{x})] \rangle \equiv \text{tr} \rho [iQ_a, \phi_i(\boldsymbol{x})] \neq 0$$

となる局所場 ϕ_i が少なくとも一つは存在することで定義

真空: $\rho = |\Omega\rangle\langle\Omega|$

媒質中: $\rho = \frac{\exp(-\beta(H - \mu N))}{\text{tr} \exp(-\beta(H - \mu N))}$

もし電荷がwell-definedならば, $[iQ_a, \rho] = 0$

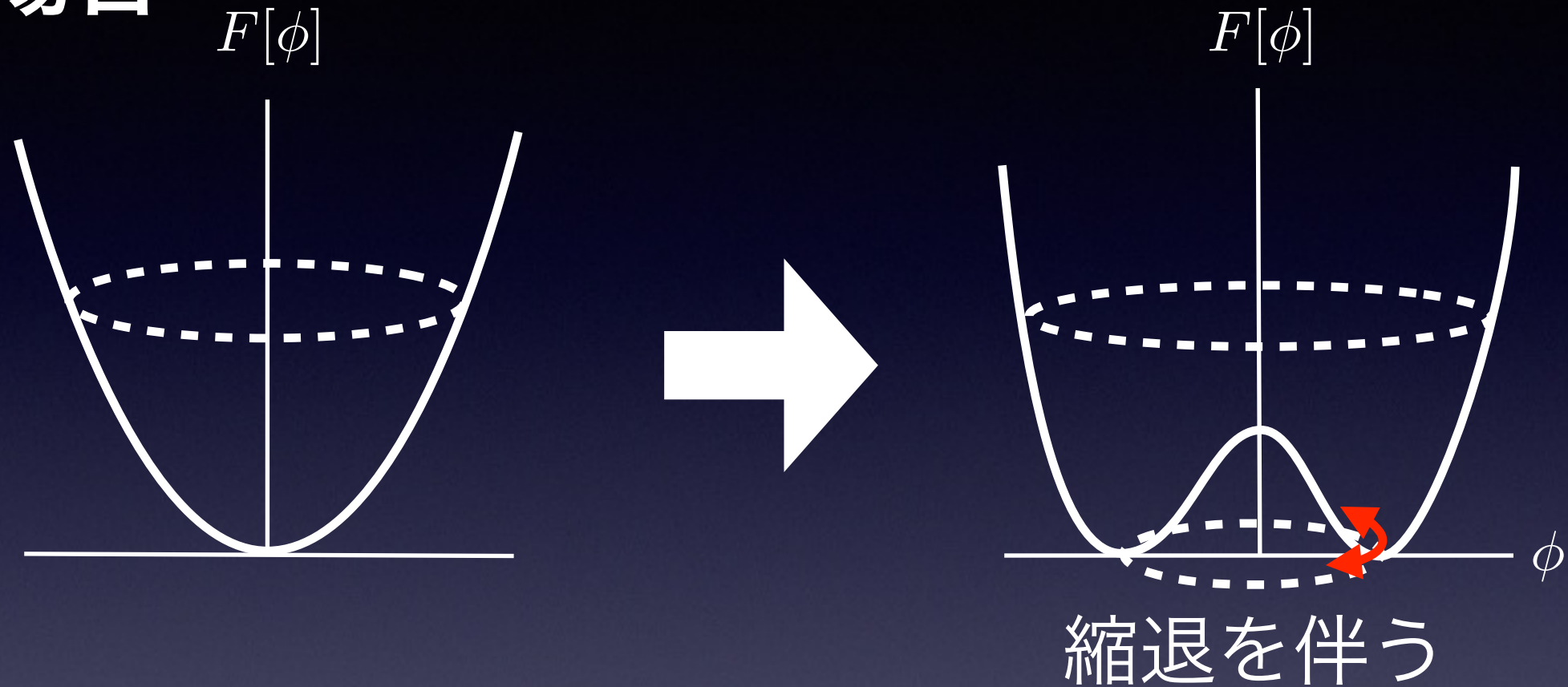
$$\begin{aligned} \langle [iQ_a, \phi_i(\boldsymbol{x})] \rangle &= \text{tr} \rho [iQ_a, \phi_i(\boldsymbol{x})] \\ &= \text{tr} [\rho, iQ_a] \phi_i(\boldsymbol{x}) = 0 \end{aligned}$$

cyclic property

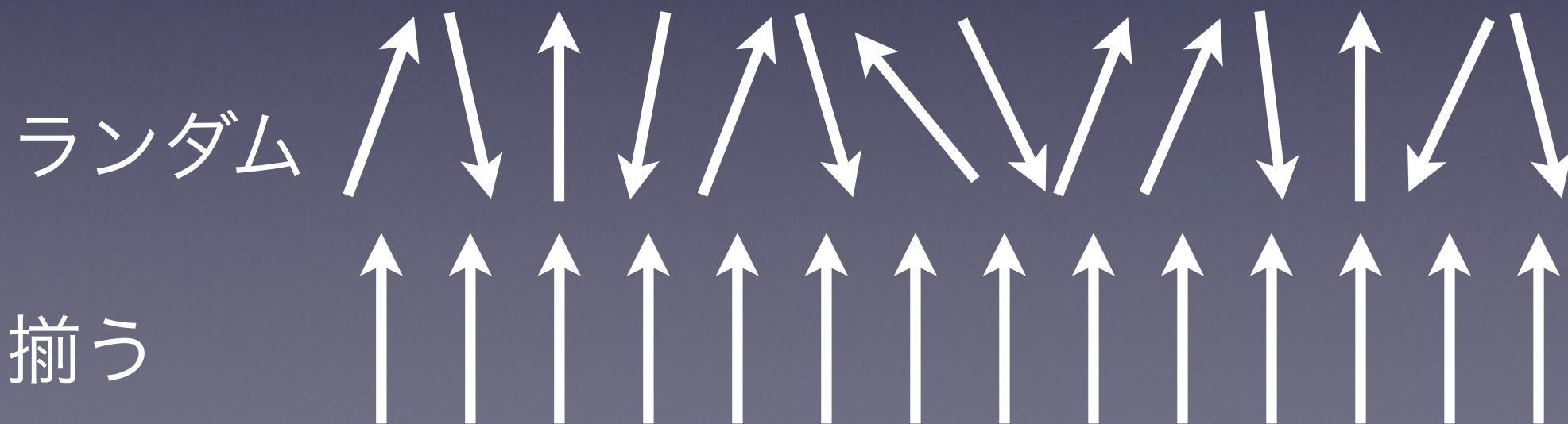
自発的対称性の破れ $\Rightarrow$ 電荷がill-defined

連続対称性の自発的破れ

場の場合

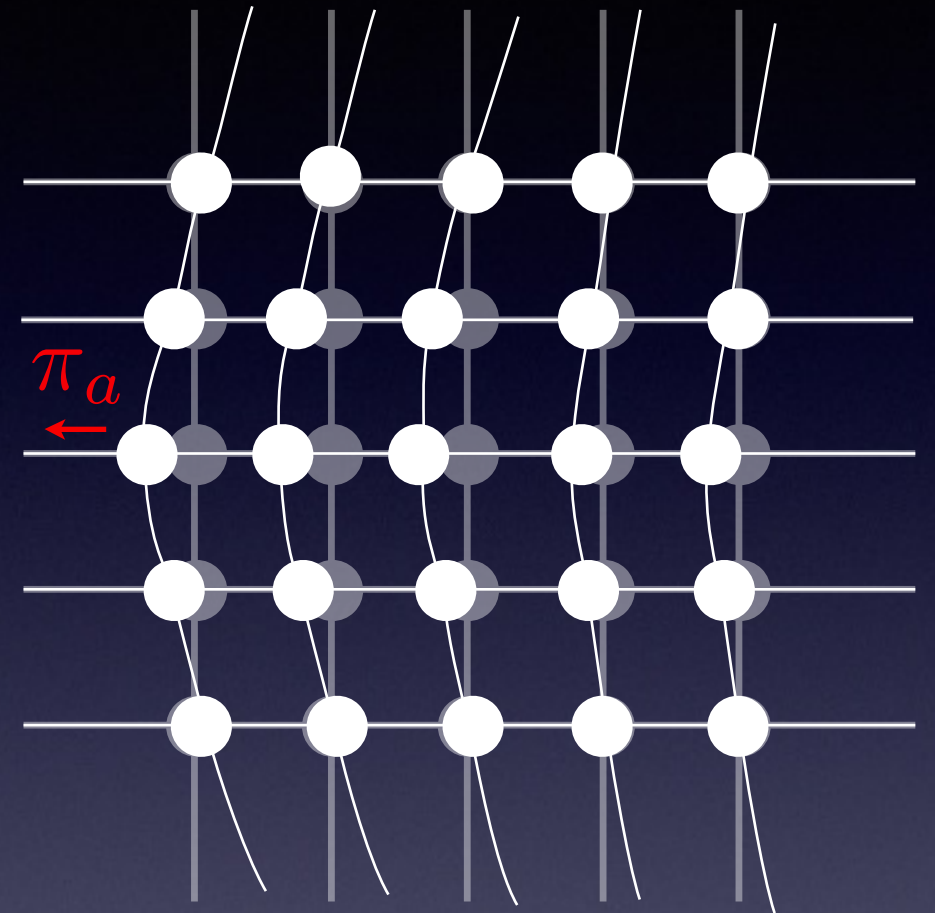
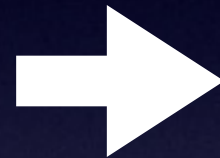
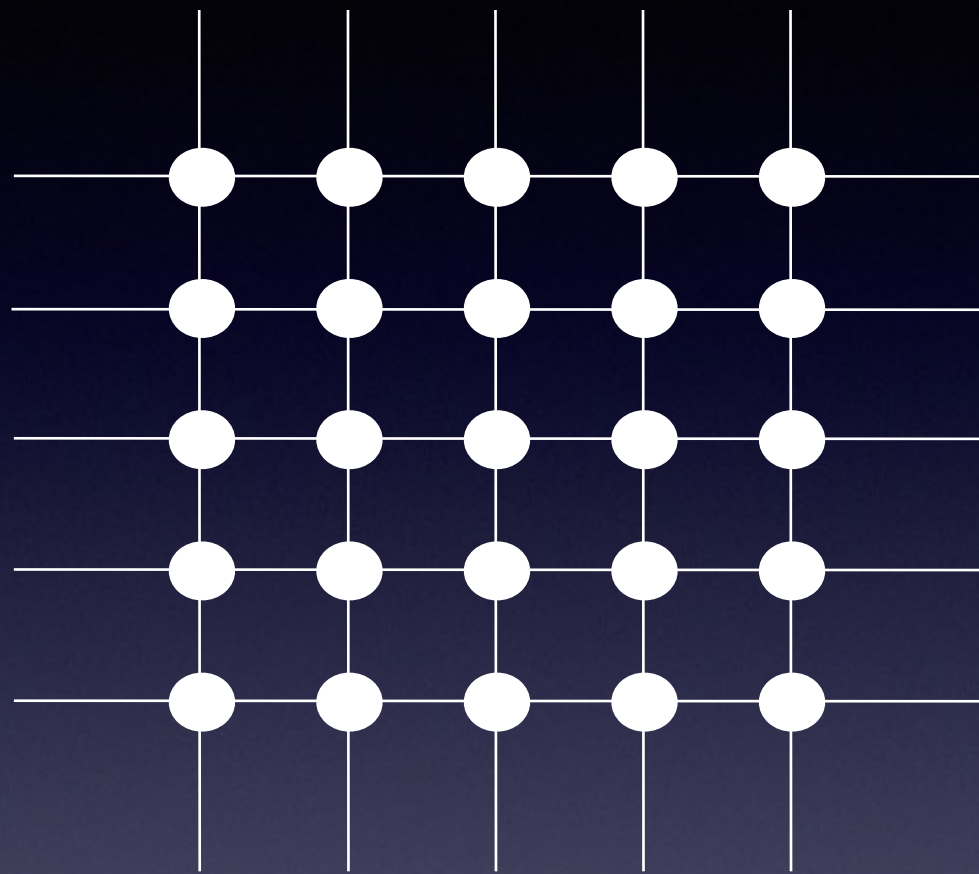


スピンの場合

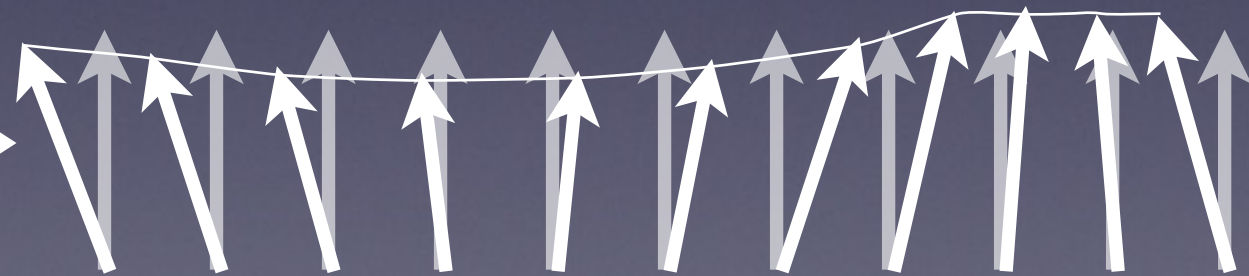
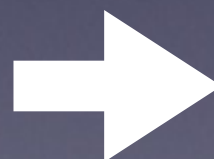
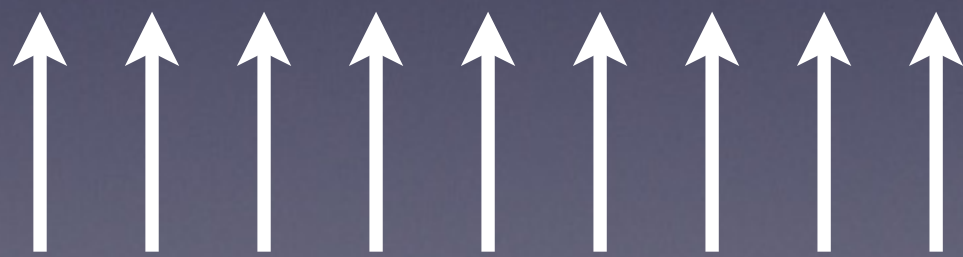


並進対称性が残っている場合弾性を伴う

格子の場合



スピンの場合

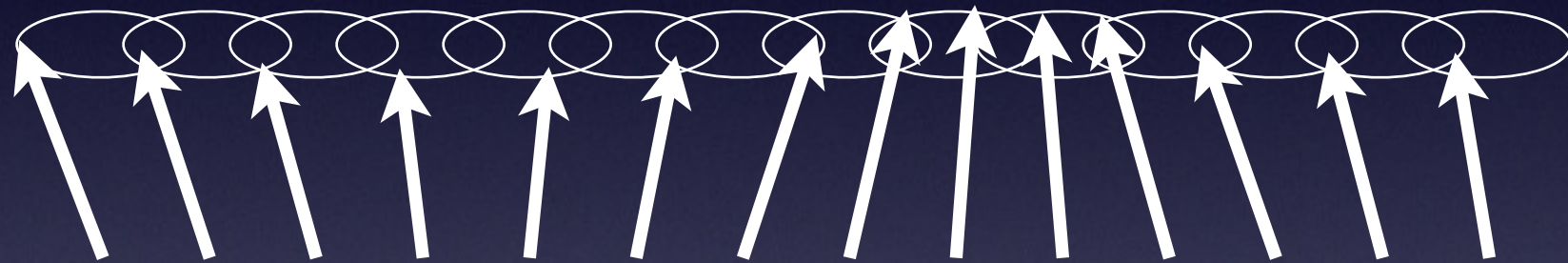


自由エネルギー $F = \frac{1}{2} (\partial_i \pi^a)^2 + \dots$

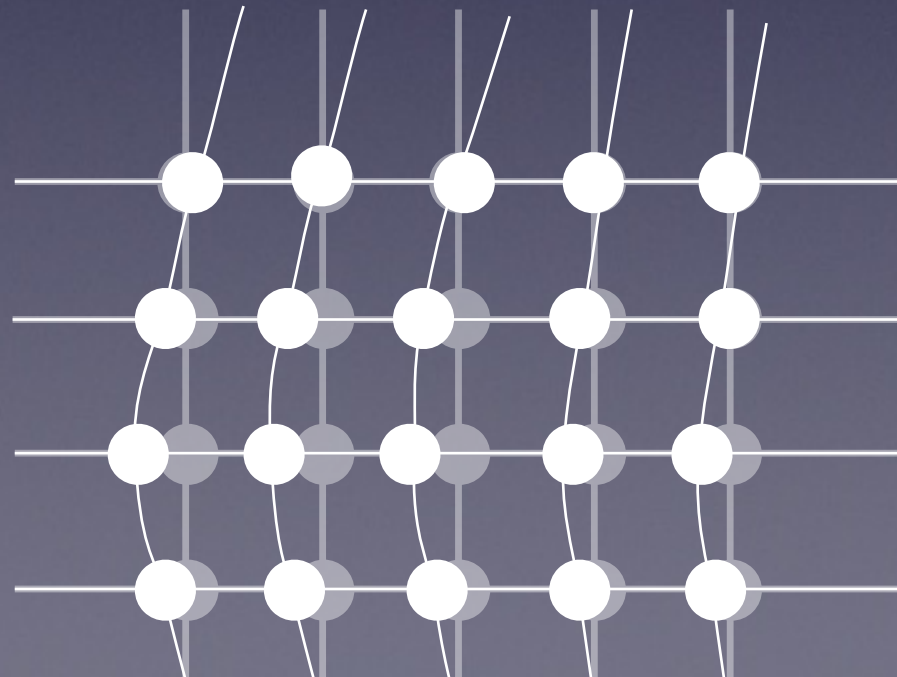
ギャップレスな励起が現れる = 南部-Goldstone(NG)モード

Nambu('60), Goldstone(61), Nambu, Jona-Lasinio('61),

スピン波(マグノン)



格子振動(フォノン)



南部-Goldstoneの定理

Goldstone, Salam, Weinberg('62)

Lorentz対称性を持った真空
大域的対称性の自発的破れ



破れた対称性の数=NGモード

$$\text{分散関係 } \omega = c|k|$$

南部-Goldstoneの定理の仮定

真空のLorentz対称性は破れていない.

$$k = 0 \rightarrow k^2 = 0$$

非相対論的:時間と空間は対等でない.

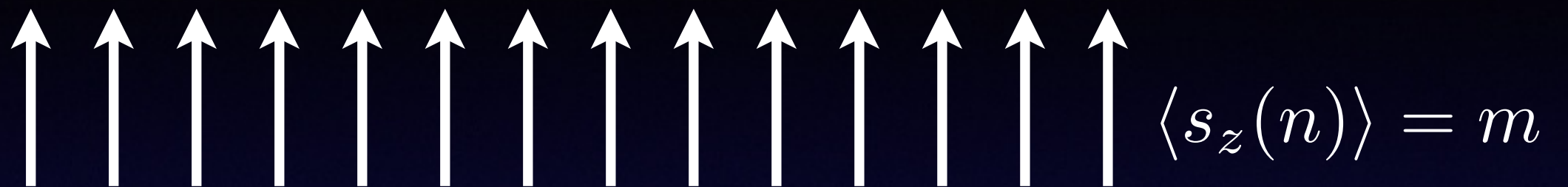
通常スカラー場が凝縮

→ NGモードはスカラー

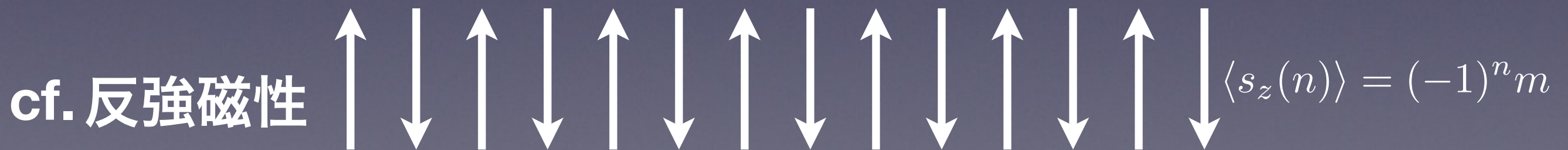
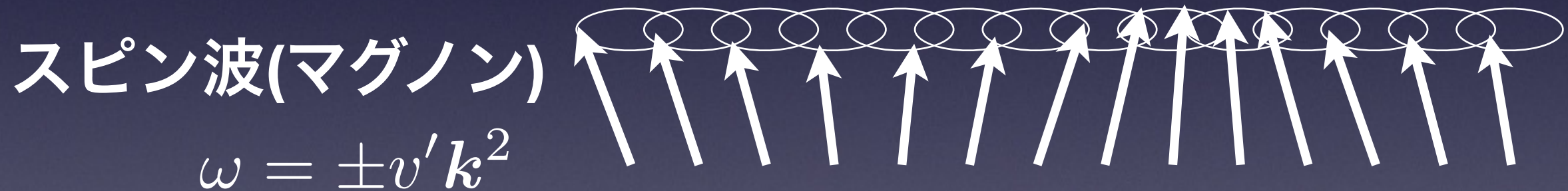
非相対論的:ベクトルの凝縮もあり.

非自明なNGモードの例

強磁性体中のスピン波



スピン対称性の破れ $SO(3) \rightarrow SO(2)$



2つのNGモード $\omega = \pm v |k|$

NG定理の一般化

Nielsen - Chadha ('76)

$$N_{\text{type-I}} + 2N_{\text{type-II}} \geq N_{\text{BS}}$$

Type-I: $\omega \propto k^{2n+1}$ **Type-II:** $\omega \propto k^{2n}$

Schafer, Son, Stephanov, Toublan, and Verbaarschot ('01)

$$\langle [iQ_a, Q_b] \rangle = 0 \Rightarrow N_{\text{NG}} = N_{\text{BS}}$$

Nambu ('04)

$$\langle [iQ_a, Q_b] \rangle \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} Q_a, Q_b \end{pmatrix}_{\text{正準関係}}$$

Watanabe - Brauner ('11)

$$N_{\text{BS}} - N_{\text{NG}} \leq \frac{1}{2} \text{rank} \langle [iQ_a, Q_b] \rangle$$

最近の進展

有効ラグランジアンの方法 Watanabe, Murayama ('12)

森の射影演算子法

YH ('12)

- $N_{\text{BS}} - N_{\text{NG}} = \frac{1}{2} \text{rank} \langle [iQ_a, Q_b] \rangle$

- $N_{\text{type-I}} + 2N_{\text{type-II}} = N_{\text{BS}}$

- $N_{\text{type-II}} = \frac{1}{2} \text{rank} \langle [iQ_a, Q_b] \rangle$

最近の進展

有効ラグランジアンの方法 Watanabe, Murayama ('12)

森の射影演算子法

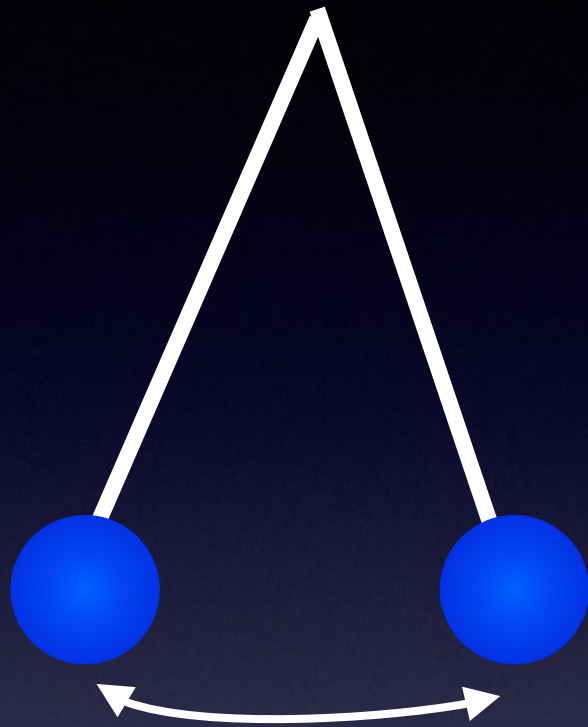
YH ('12)

- $N_{\text{BS}} - N_{\text{NG}} = \frac{1}{2} \text{rank} \langle [iQ_a, Q_b] \rangle$

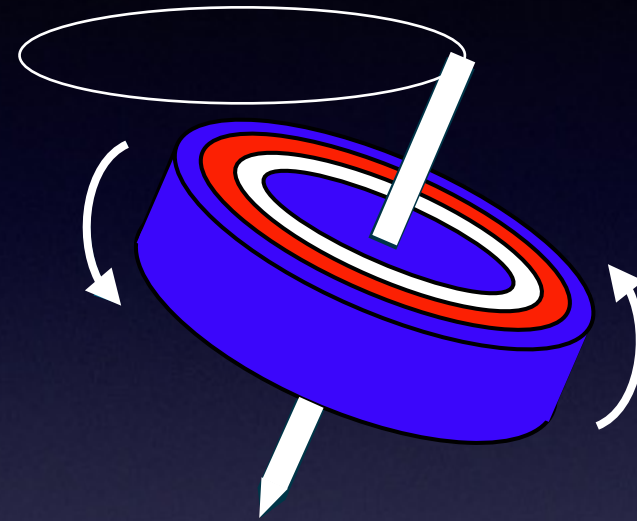
- $N_{\text{type-A}} + 2N_{\text{type-B}} = N_{\text{BS}}$

- $N_{\text{type-B}} = \frac{1}{2} \text{rank} \langle [iQ_a, Q_b] \rangle$

2種類の励起



Type-A
単振動

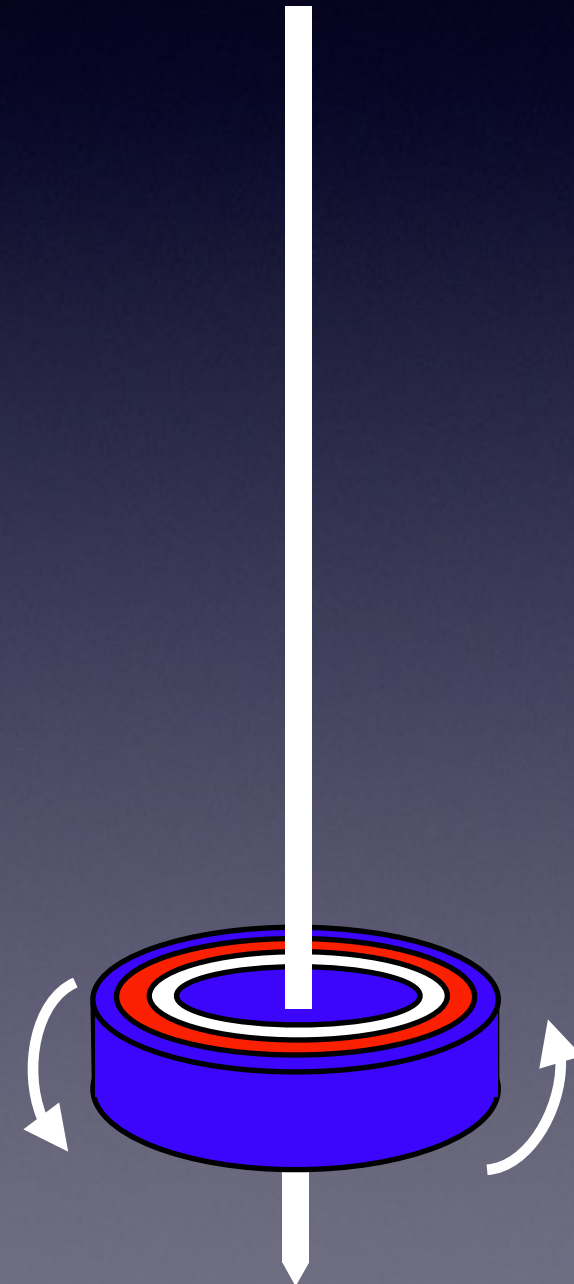


Type-B
歳差運動

Type-A, Type-Bの古典模型

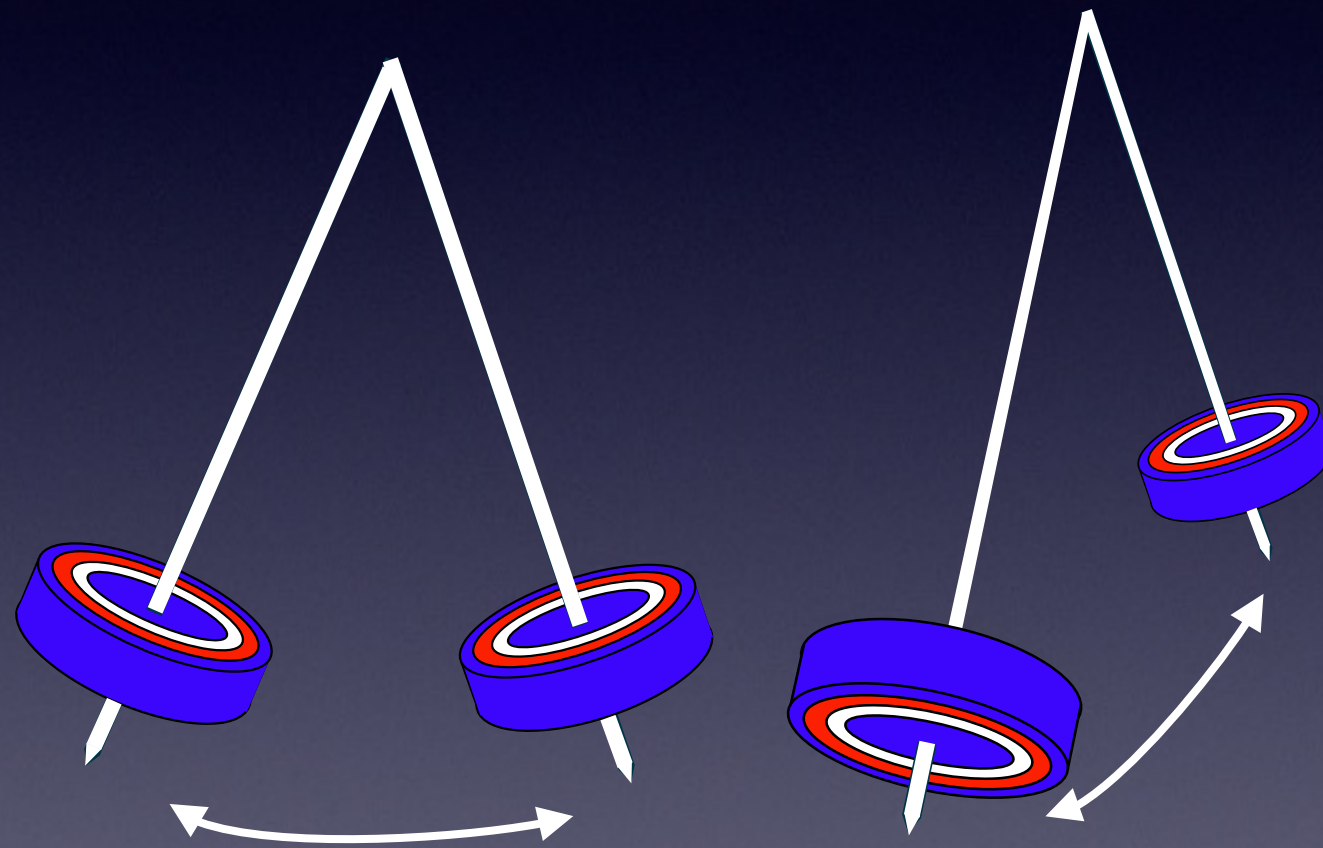
コマが付いた振り子

- 回転対称性は重力による陽な破れ
- z 軸の周りの回転は対称性がある
- x, y 軸に沿った対称性は破れている
- 破れた対称性の数は2つ



Type-A, Type-Bの古典模型

コマが回っていない時

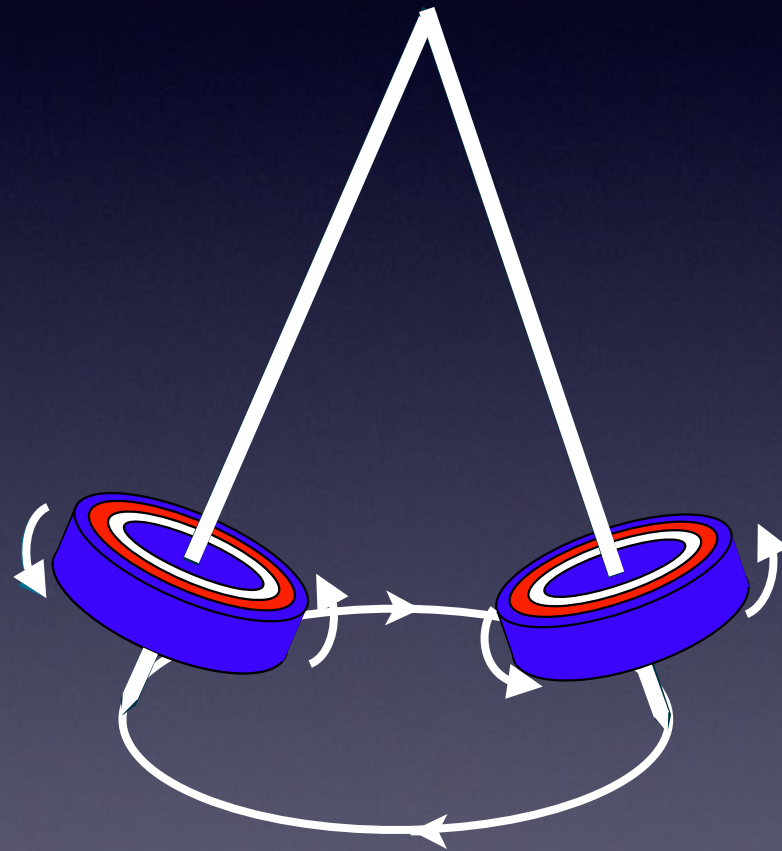


独立な2つの振り子の運動

$$\omega \sim \sqrt{g}$$

Type-A, Type-Bの古典模型

もしコマが回っていると

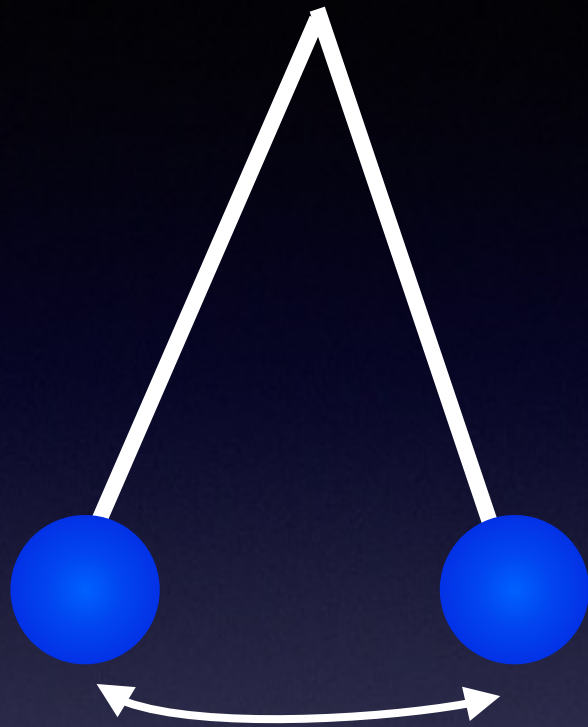


1方向の歳差運動 $\omega \sim g$

この時, $\{L_x, L_y\}_P = L_z \neq 0$

2種類の励起

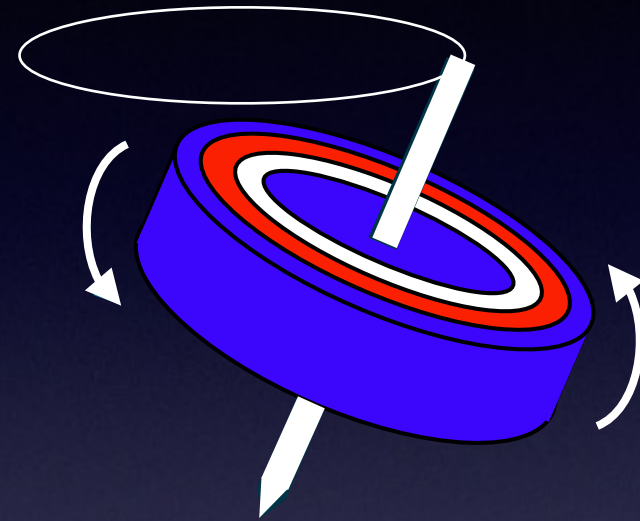
重力 g



Type-A

単振動

$$\omega \sim \sqrt{g}$$



Type-B

歳差運動

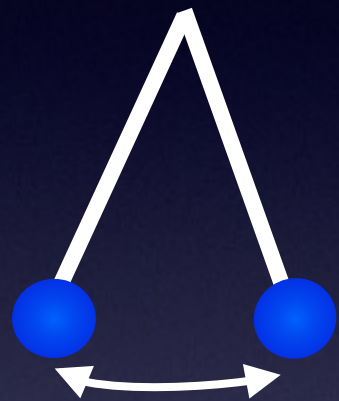
$$\omega \sim g$$

最近の発展

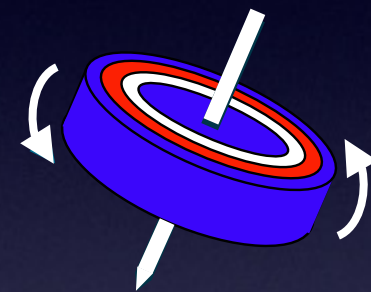
Watanabe, Murayama ('12), YH ('12)

内部対称性の自発的破れに伴うNGモードは

2つの振動のタイプに分類できる:



Type-A
単振動



Type-B
歳差運動

$$N_{\text{type-A}} = N_{\text{BS}} - 2N_{\text{type-B}} \quad N_{\text{type-B}} = \frac{1}{2} \text{rank} \langle [Q_a, Q_b] \rangle$$

$$\bullet N_{\text{BS}} - N_{\text{NG}} = \frac{1}{2} \text{rank} \langle [Q_a, Q_b] \rangle$$

NGモードとは？

電荷密度は保存則により必ず遅い

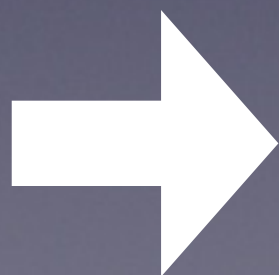
$$\partial_t n_a(t, \boldsymbol{x}) = -\partial_i j_a^i(t, \boldsymbol{x})$$

例) 媒質中 $j_a^i = \Gamma \partial_i n_a$

拡散方程式 $\partial_t n_a(t, \boldsymbol{x}) = -\Gamma \partial_i^2 n_a(t, \boldsymbol{x})$

対称性が自発的に破れると
電荷密度と弾性変数が正準共役

$$\langle [iQ_a, \pi_b(\boldsymbol{x})] \rangle \neq 0 \quad \text{cf. Nambu ('04)}$$



$$\partial_t \pi_a = c n_a$$

$$\partial_t n_a = b \partial_i^2 \pi_a$$

Type-A (B)は Type-I (II) NG モードか？

Type-A NG モード

電荷密度と弾性変数が正準共役

$$\langle [iQ_a, \pi_b(x)] \rangle \neq 0$$

$$\partial_t \pi_a = c n_a \quad \partial_t n_a = d \partial_i^2 \pi_a$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{cd} |k| - i\Gamma k^2 \quad \text{Type-A} = \text{Type-I}$$

Hayata, YH (14)

Type-B NG モード

電荷密度と電荷密度が正準共役

$$\langle [iQ_a, n_b(x)] \rangle \neq 0$$

$$\partial_t n_a = c' \partial_i^2 n_b \quad \partial_t n_b = d' \partial_i^2 n_a$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{c'd'} k^2 - i\Gamma |k|^4 \quad \text{Type-B} = \text{Type-II}$$

Hayata, YH(14)

Watanabe-Murayamaの方法

Watanabe, Murayama ('12)

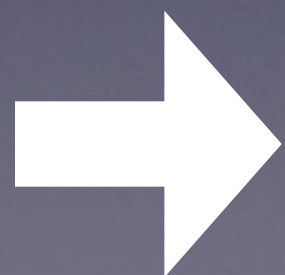
可能な有効Lagrangianを書き下す. Leutwyler('94)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho_{ab} \pi^a \dot{\pi}^b + \frac{\bar{g}_{ab}}{2} \dot{\pi}^a \dot{\pi}^b - \frac{g_{ab}}{2} \partial_i \pi^a \partial_i \pi^b + \text{higher}$$

Lorentz対称性がない場合

時間の1階微分の項も可能

作用が対称性の変換の元で不変.



$$\rho_{ab} \propto -i \langle [Q_a, j_b^0(x)] \rangle$$

Watanabe, Murayama ('12)

自発的対称対称性の破れ + 小さな陽な破れ

$$H = H_0 + hV$$

対称性を持った項

小さな破れの項

擬NGモード

YH ('12), Hayata, YH(14)

Type-A: $\omega \sim \sqrt{h}$

例) パイ中間子

Type-B: $\omega \sim h$

例) 外部磁場中のスピン波

保存量と結合した陽な破れの場合には、陽な破れの高次補正はない。

Nicolis, Piazza ('12), ('13)

Watanabe, Brauner, Murayama ('13)

Type-B NGモードの例

	N_{BS}	$N_{\text{type-A}}$	$N_{\text{type-B}}$	$\frac{1}{2}\text{rank}\langle [iQ_a, Q_b] \rangle$	$N_{\text{type-A}} + 2N_{\text{type-B}}$
Spin wave in ferromagnet $O(3) \rightarrow O(2)$	2	0	1	1	2
NG modes in Kaon condensed CFL $SU(2) \times SU(1)$	3	1	1	1	3
Kelvin waves in vortex translation	2	0	1	1	2
nonrelativistic massive C $U(1) \times$	2	0	1	1	2

$$N_{\text{type-A}} + 2N_{\text{type-B}} = N_{\text{BS}} \quad N_{\text{BS}} - N_{\text{NG}} = \frac{1}{2}\text{rank}\langle [iQ_a, Q_b] \rangle$$

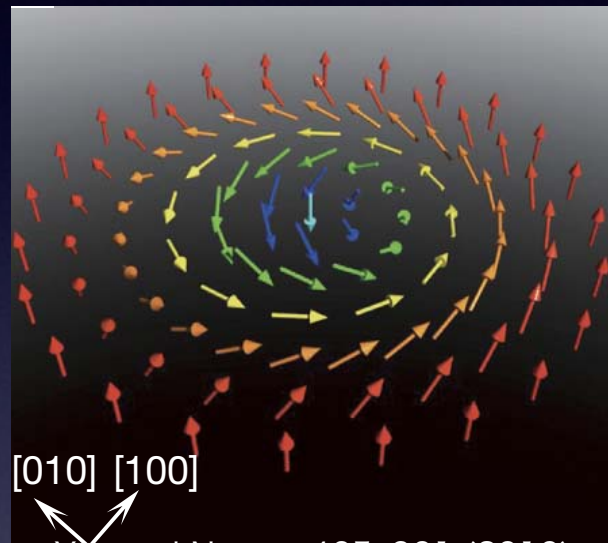
トポロジカルソリトンと中心拡大

並進と並進

例) 2+1D skyrmion, Kelvin wave

Watanabe, Murayama ('14)

Kobayashi, Nitta ('12)



Yu, et al Nature 465, 901 (2010)

$$[P_x, P_y] \propto N$$

x並進

y並進

topological number

並進と内部対称性

例) domain wall in nonrelativistic massive CP^1 model

Kobayashi, Nitta ('14)

$$[P_z, Q] \propto N$$

z並進

U(1)電荷

topological number

並進と内部対称性の破れ

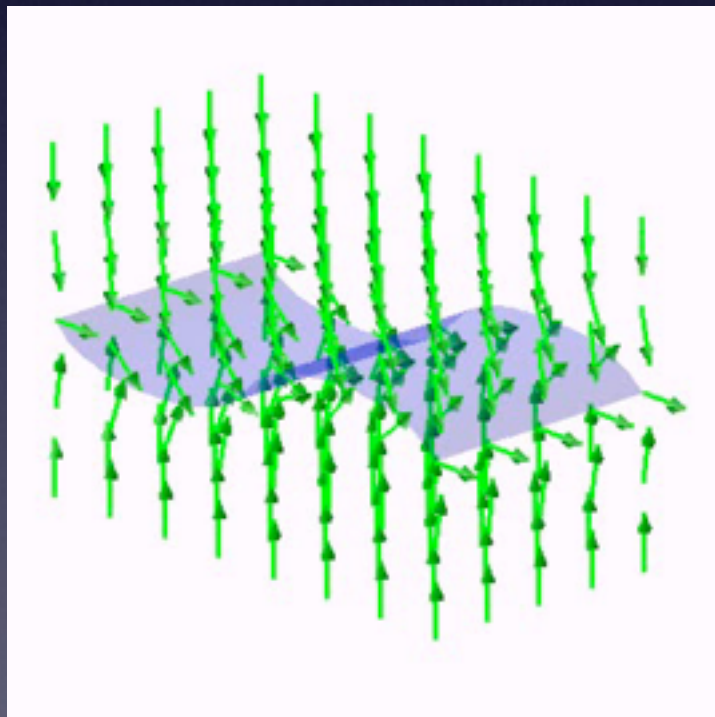
Kobayashi, Nitta 1402.6826

CP1模型

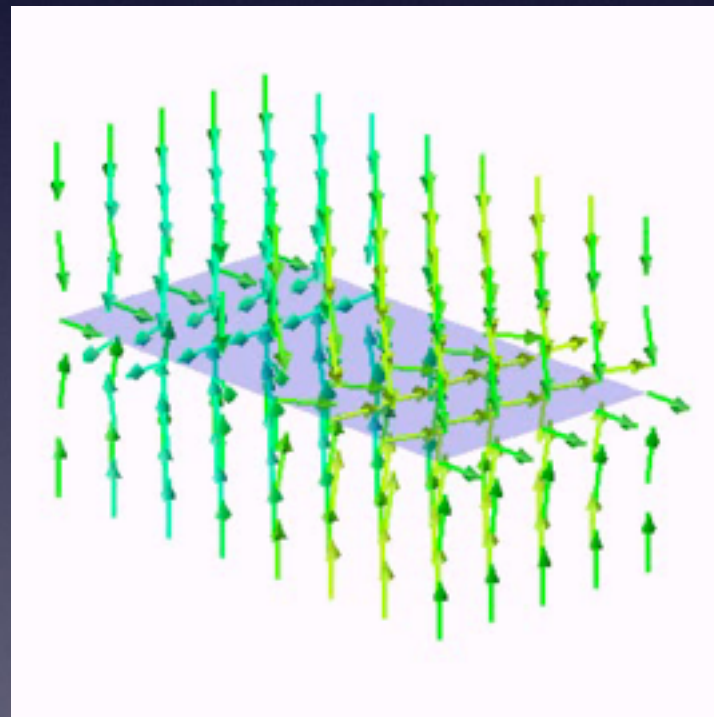
domain wall解の周りのNGモード

$$[Q, P_z] = 0$$

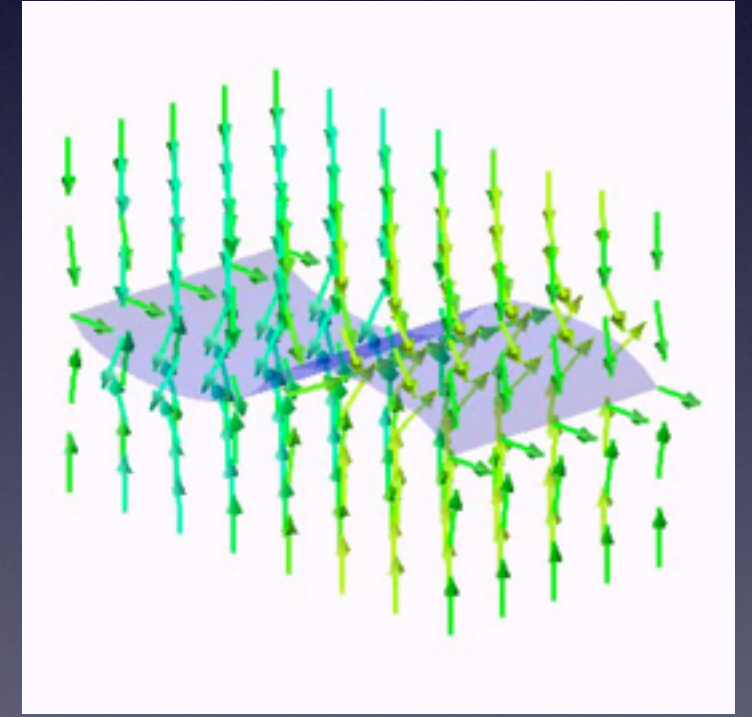
$$[Q, P_z] \neq 0$$



Magnon
Type-A



Ripplon
Type-A



Ripplon-Magnon
Type-B

自発的対称性の破れの理論

時空対称性の自発的破れ

統一的な理解はまだ？

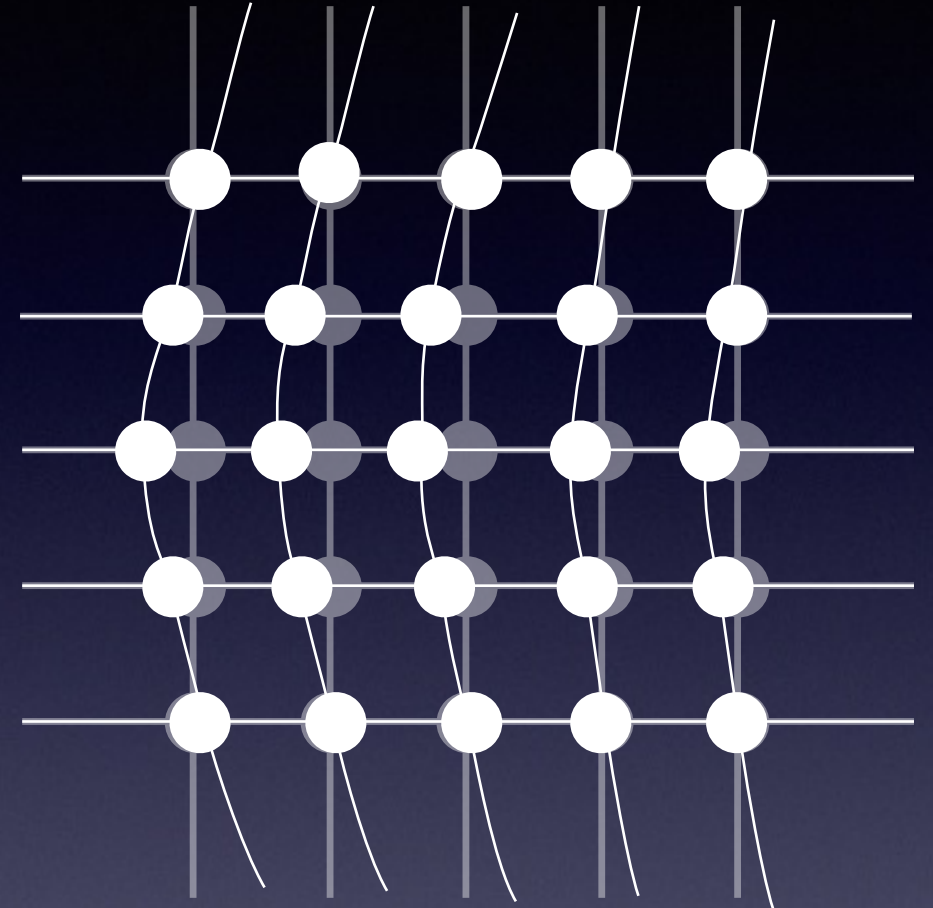
時空対称性の破れの例1

格子振動

並進(3つ), 回転(3つ), ガリレイ(3つ)

9個破れている.

しかし, NGモードは並進の3つ.



回転とガリレイ変換に対応した
ギャップレスモードは？

ない

時空対称性の破れの例2

例: 弦

秩序変数 $\langle \phi(x) \rangle$

並進: $\langle [P_x, \phi] \rangle = i\partial_x \langle \phi \rangle \neq 0$

回転: $\langle [L_z, \phi] \rangle = -iy\partial_x \langle \phi \rangle \neq 0$

2つの破れ

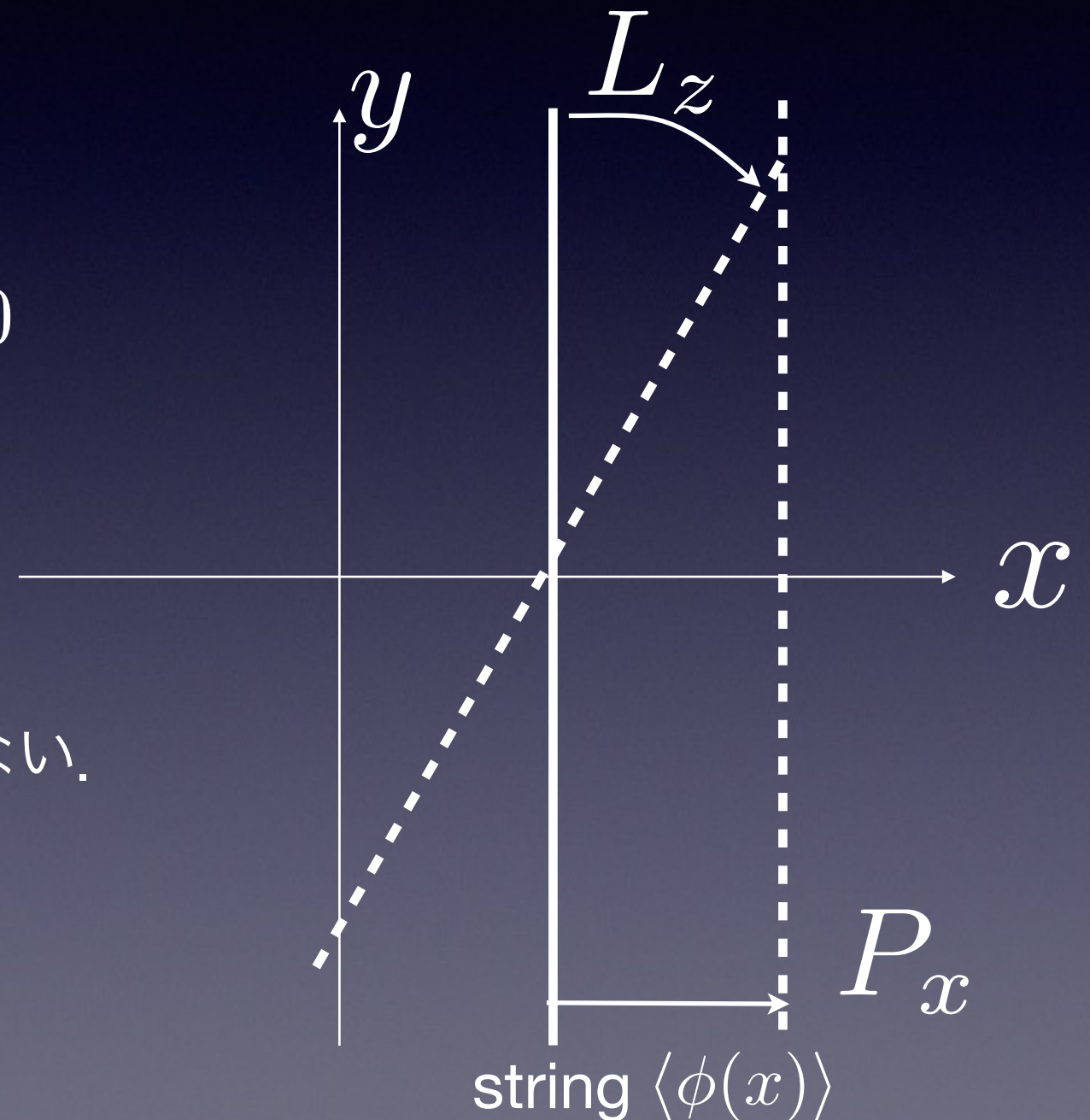
NGモードは一つ

回転は並進を使って書けるので独立でない.

$$L = x \times P$$

Low - Manoharの議論

Low, and Manohar ('02)



非自明な例: 液晶

ネマティック相

空間回転 $O(3) \rightarrow O(2)$

2つの破れた生成子

2つの弾性変数

スメクティック-A 相

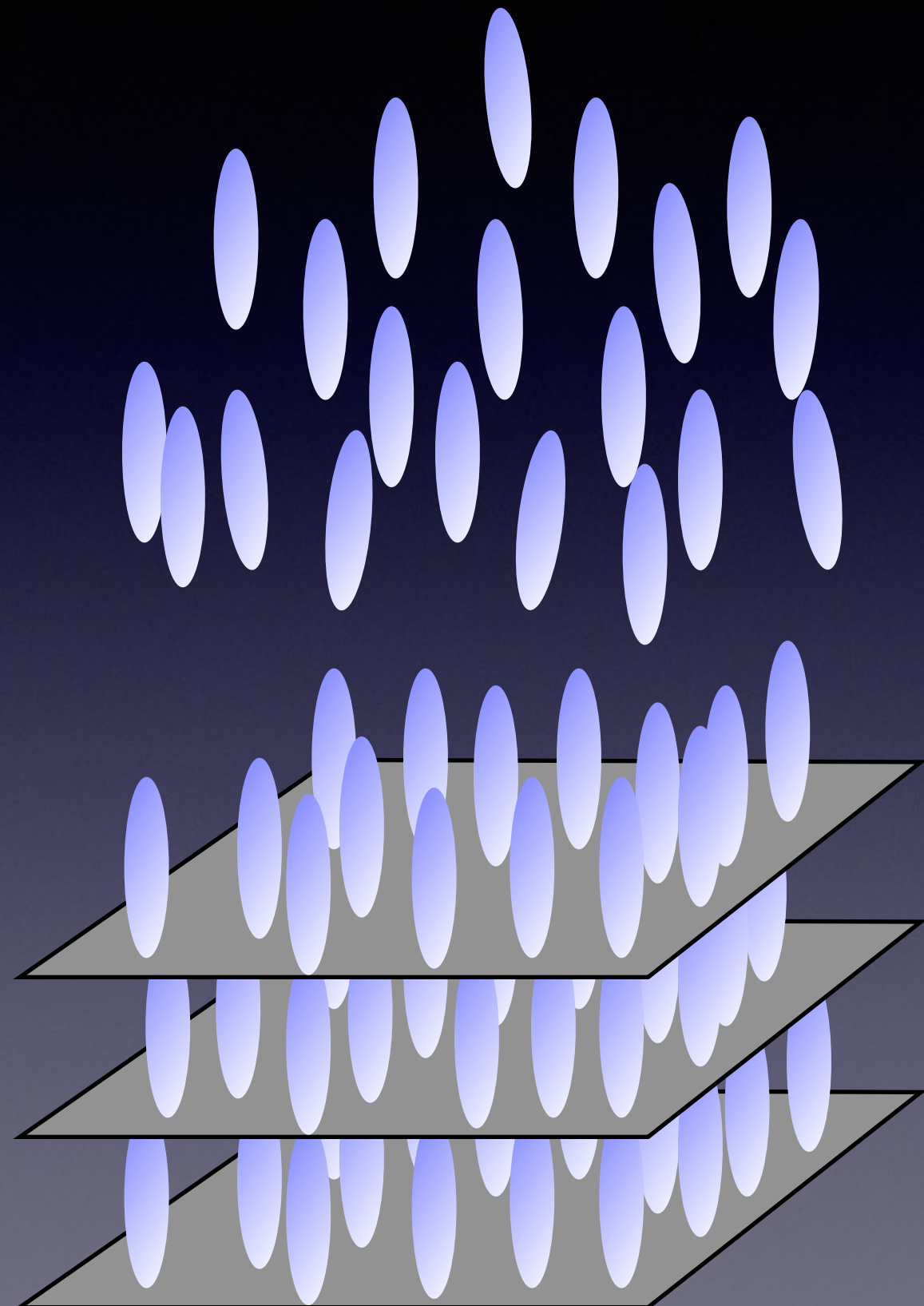
回転の破れ $O(3) \rightarrow O(2)$

並進の破れ

3つの破れた生成子

1つの弾性変数

残り回転は重たいモードに



Inverse Higgs 機構

Ivanov, Ogievetsky ('75), Low, Manohar ('02) Nicolis et al ('13)
Endlich, Nicolis, Penco ('13) Watanabe, Brauner ('14)

$$\xi = e^{ix^\mu P_\mu} e^{iT^a \pi^a}(x)$$

Volkov ('73), Ogievetsky ('74)

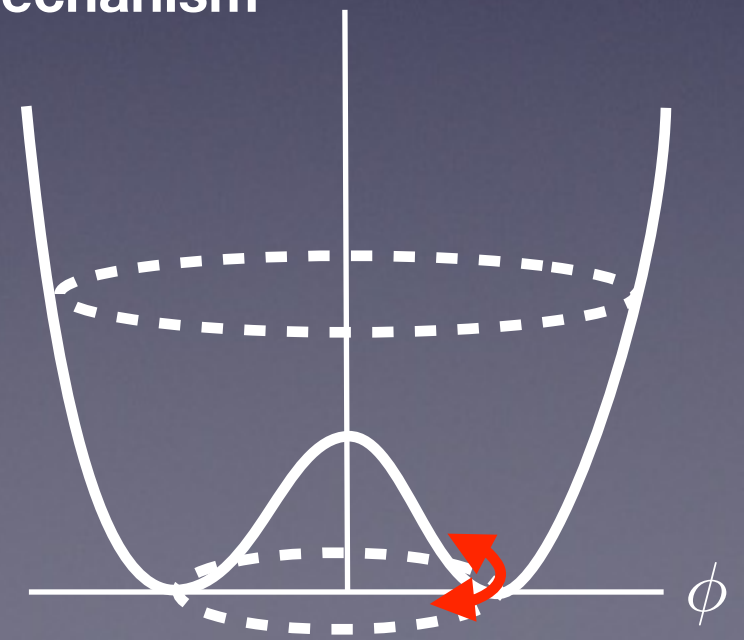
Maurer-Cartan 1形式

$$\begin{aligned}\alpha &= -i\xi^{-1}d\xi = -ie^{-iT^a \pi^a}(d + iP_\mu dx^\mu)e^{iT^a \pi^a} \\ &= P_\mu dx^\mu + [T^a \pi, iP_\mu dx^\mu + d] + \dots \\ &= P_\mu dx^\mu + T^a (\partial_\mu \pi^a + f_\mu^{ba} \pi^b) dx^\mu + \dots\end{aligned}$$

Inverse Higgs mechanism

平らな方向が破れた対称性の
数に等しくない

Hayata, YH ('14)



分散関係

例) 液晶 (Type-A)

ネマティック相: 回転 $O(3) \rightarrow O(2)$

$$N_{\text{BS}} = N_{\text{EV}} = 2 \quad L_i(x) = \epsilon_{ijk} x^j T^{0k}(x) \quad i = 1, 2$$

分散関係: $\omega = ak^2 + ibk^2$ Hosino, Nakano('82)

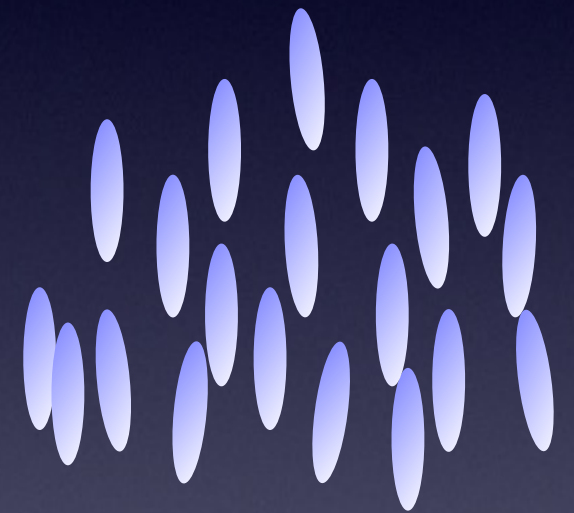
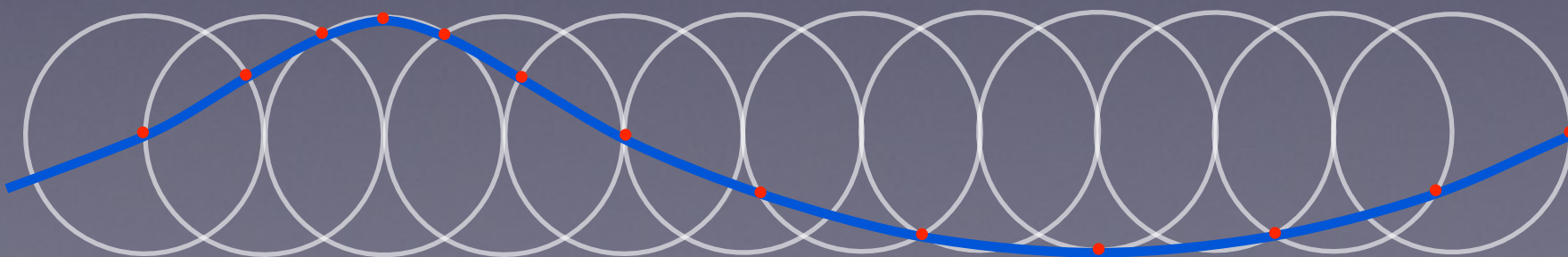
実部と虚部が同じオーダー(減衰振動)

$a = 0$ の時, 過減衰

例) 表面張力波 (Type-B)

cf. Takeuchi, Kasamatsu ('13) Effective Lagrangian: Watanabe, Murayama ('14)

$$\frac{1}{V} \langle [P_z, N] \rangle \neq 0 \quad \omega \sim k^{3/2}$$



まとめ:内部対称性

● N_{BS} =自由エネルギーの平な方向の数

● $N_{\text{type-B}} = \frac{1}{2} \text{rank} \langle [iQ_a, Q_b] \rangle$

● $N_{\text{type-A}} = N_{BS} - N_{\text{type-B}}$

● $N_{\text{gapped}} = \frac{1}{2} (\text{rank} \langle [iQ_a, \phi_i] \rangle - N_{\text{type-A}})$

Hayata, YH ('14) 有効ラグランジアンの方法の時間2階微分に対応 Karasawa, Gongyo('14)

Type-A (Type-I): $\omega = ak - ibk^2$

Type-B (Type-II): $\omega = a'k^2 - ib'k^4$

まとめ: 時空対称性の破れに関して

- 独立な弾性変数の数は破れた対称性に等しくない
(Inverse Higgs機構)
- 分散関係は系, 理論のパラメータに依存.
温度によって分散が変わる場合も.
- 分散に関して一般的なルールはあるか?
cf. Takahashi, Nitta ('14)

自発的破れは必要か？

自発的

弾性が生じる.

NGモードが現れる.

自発的でない

保存則があればゼロモードが電荷に結合

(伝播するかどうかはわからない)

有限温度系: カノニカル分布: Boost対称性を破る.

並進演算子がNG場

弾性は伴わないが並進演算子に音波モードが結合.

SUSYがある系の有限温度

温度によってSUSYが破れるがNG fermionが現れる(phonino)

⇒ 佐藤's talk