

光学格子中の冷却Bose原子気体系に対する Markov型量子輸送方程式による緩和過程の解析

早稲田大学 基幹理工学部
桑原幸朗、中村祐介、今井良輔、對馬護人、山中由也

発表の流れ

- 研究背景・目的
- Markov型量子輸送方程式の導出
- 数値計算結果

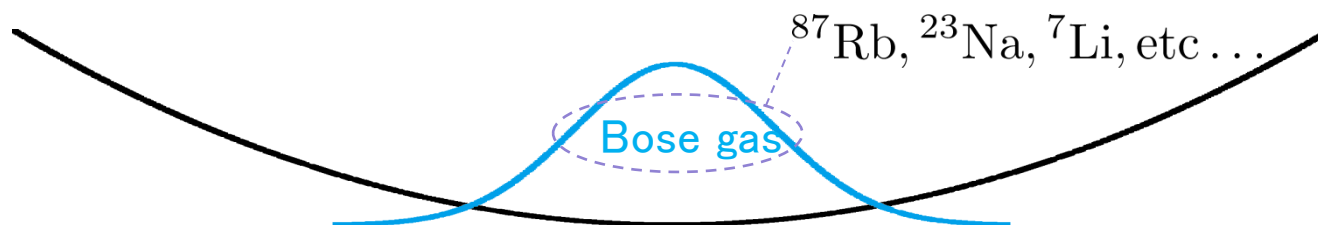
発表の流れ

- 研究背景・目的
 - 冷却中性Bose気体系
 - Thermo Field Dynamics
 - 量子輸送方程式
 - 時間依存完全系
 - 研究目的
- Markov型量子輸送方程式の導出
- 数値計算結果

冷却中性Bose気体系

冷却中性Bose気体系

磁気トラップでBose気体を捕捉 → 極低温($\text{nK} \sim \mu\text{K}$)まで冷却



特徴

希薄($10^{13} \sim 10^{15} \text{cm}^{-3}$)な気体系
相互作用が弱い

実験パラメータの高い制御性

→ { トラップの強さ・形状
粒子数・温度 etc...

熱緩和がゆっくり

非平衡系の理論に対する検証の場として優れている

Thermo Field Dynamics

Thermo Field Dynamics (TFD) $\longrightarrow$ 熱場の量子論に対する実時間正準形式の定式化

物理量の熱平均

$\longrightarrow$ 通常は混合状態期待値 $\langle A \rangle = \text{Tr}[A\rho]$ $[\rho : \text{密度行列}]$

TFDでは自由度を倍加

$a_\ell \longrightarrow a_\ell, \tilde{a}_\ell$

純粋状態期待値で表せる $\langle A \rangle = \langle 0|A|0\rangle$ $[\langle 0|, |0\rangle : \text{熱的真空}]$

熱的真空を消去する演算子 $\longrightarrow a, \tilde{a}$ ではなく $\xi, \tilde{\xi}$

熱的Bogoliubov変換 $\longrightarrow a_\ell^\mu = B_\ell^{-1, \mu\nu} \xi_\ell^\nu$

$$\bar{a}_\ell^\nu = \tilde{\xi}_\ell^\mu B_\ell^{\mu\nu}$$

$$\left[\begin{array}{l} a_\ell^\mu = \begin{pmatrix} a_\ell \\ \tilde{a}_\ell^\dagger \end{pmatrix}^\mu, \quad \bar{a}_\ell^\nu = \begin{pmatrix} a_\ell^\dagger & -\tilde{a}_\ell \end{pmatrix}^\nu \\ B_\ell^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + n_\ell & -n_\ell \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \end{array} \right]$$

非平衡TFD

非平衡系では

⇒ 時間依存する分布関数 $n_\ell(t) \equiv \langle 0 | a_\ell^\dagger(t) a_\ell(t) | 0 \rangle$ を未知パラメータとして導入

TFDのハミルトニアン

全ハミルトニアン ⇒ $\hat{H} = H - \tilde{H}$ (チルダ・非チルダ両方を時間発展)

非摂動ハミルトニアン $\hat{H}_u(t)$ (相互作用描像の定義に必要)

$$\Rightarrow \sum_{\ell} \omega_{\ell}(t) (a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell} - \tilde{a}_{\ell}^{\dagger} \tilde{a}_{\ell})$$

要請: 各時刻において準粒子描像が存在する (自発的対称性の破れはないと仮定)

$$\Rightarrow \hat{H}_u(t) = \sum_{\ell} [\omega_{\ell}(t) - i\gamma_{\ell}(t)] \xi_{\ell}^{\dagger} \xi_{\ell} - [\omega_{\ell}(t) + i\gamma_{\ell}(t)] \tilde{\xi}_{\ell}^{\dagger} \tilde{\xi}_{\ell} - \hat{Q}(t)$$

$$\hat{Q}(t) = -i \sum_{\ell} \dot{n}_{\ell}(t) \xi_{\ell}^{\dagger} \tilde{\xi}_{\ell}^{\dagger}$$

$$\left[\begin{array}{l} \omega_{\ell} : \text{準粒子エネルギー} \\ \gamma_{\ell} : \text{準粒子の寿命の逆数} \end{array} \right]$$

3つのパラメータ $\dot{n}_{\ell}, \omega_{\ell}, \gamma_{\ell}$ 摂動論・Feynman図法で計算

⇒ 自己エネルギーに対する自己無撞着な繰り込み条件により決定

$\dot{n}_{\ell}$ ⇒ 量子輸送方程式

量子輸送方程式

Previous works

- 非平衡TFDを冷却中性Bose気体系に適用

$$\left[\begin{aligned} H &= \int d\mathbf{x} \left[\psi^\dagger(\mathbf{x}) h_0(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) + \frac{g}{2} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \right] \\ x &= (\mathbf{x}, t) \end{aligned} \right]$$

→ non-Markov型量子輸送方程式が導出される

Y. Nakamura *et al.*, Ann. Phys. (N.Y.) **325**, 426 (2010). *etc...*

(摂動2次)

$$\dot{n}_\ell(t) = 4g^2 \int_{-\infty}^t ds \sum_{\mathbf{m}} C_{\mathbf{m}\ell} N_{\mathbf{m}\ell}[n(s)] \cos \left\{ \int_s^t d\tau \bar{\omega}_{\mathbf{m}\ell}(\tau) \right\} \exp \left\{ - \int_s^t d\tau \bar{\gamma}_{\mathbf{m}\ell}(\tau) \right\}$$

場の量子論に基づく
自然とnon-Markov型

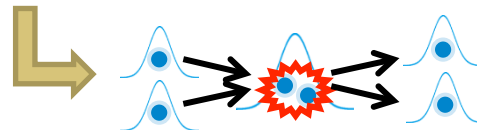
エネルギー保存

→ わずかな非保存を許す

(c.f. 量子Boltzmann方程式ならデルタ関数)

過去を忘れる効果

$$\left[\begin{aligned} \mathbf{m} &\equiv (m_1, m_2, m_3) \\ N_{\mathbf{m}\ell}[n] &= n_{m_1} n_{m_2} (1 + n_{m_3}) (1 + n_\ell) - (1 + n_{m_1}) (1 + n_{m_2}) n_{m_3} n_\ell \quad (\text{衝突項}) \\ \bar{\omega}_{\mathbf{m}\ell} &= \omega_{m_1} + \omega_{m_2} - \omega_{m_3} - \omega_\ell \\ \bar{\gamma}_{\mathbf{m}\ell} &= \gamma_{m_1} + \gamma_{m_2} + \gamma_{m_3} + \gamma_\ell \end{aligned} \right]$$



- 量子輸送方程式の拡張

➤ 外場が時間依存するモデルへの適用

(時間依存する正規直交完全系による場の演算子の展開)

桑原幸朗, 物性研究・電子版 Vol. 1 No. 1, 4994 (2012).

Y. Kuwahara, Y. Nakamura, and Y. Yamanaka, JPS Conf. Proc. **1**, 012101 (2014).

時間依存完全系

「エネルギーの繰り込みは考えない」
&
有限温度で考える

非摂動ハミルトニアン $H_0(t) = \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}) h_0(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x})$ $\left[\begin{array}{l} h_0(\mathbf{x}) = -\frac{\nabla^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} = (\mathbf{x}, t) \end{array} \right]$

$V(x) = V(\mathbf{x})$ の場合

場の演算子を $h_0(\mathbf{x})$ の固有関数で展開 $\Rightarrow \psi(\mathbf{x}) = \sum_{\ell} u_{\ell}(\mathbf{x}) e^{-i\omega_{\ell} t} a_{\ell}$
 $[h_0(\mathbf{x}) u_{\ell}(\mathbf{x}) = \omega_{\ell} u_{\ell}(\mathbf{x})]$

$V(x) \neq V(\mathbf{x})$ の場合

場の演算子を時間依存する正規直交完全系で展開 $\Rightarrow \psi(\mathbf{x}) = \sum_{\ell} v_{\ell}(\mathbf{x}) a_{\ell}(t)$

$v_{\ell}(\mathbf{x})$ の時間発展方程式 $\Rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} v_{\ell}(\mathbf{x}) = h_0(\mathbf{x}) v_{\ell}(\mathbf{x})$

$\Rightarrow$ 時間依存しない真空を定義できる

$\left[\Rightarrow V(x) = V(\mathbf{x}) \text{ の場合で } v_{\ell}(\mathbf{x}) = u_{\ell}(\mathbf{x}) e^{-i\omega_{\ell} t} \text{ に対応} \right]$

研究目的

時間依存完全系で展開した場合の量子輸送方程式

$$\dot{n}_\ell(t) = 4g^2 \text{Re} \int_{-\infty}^t ds \sum_m I_{m\ell}^*[v(t)] I_{m\ell}[v(s)] N_{m\ell}[n(s)] \exp \left\{ - \int_s^t d\tau \bar{\gamma}_{m\ell}(\tau) \right\}$$

時間依存完全系によって...

$$\left[I_{m\ell}[v(t)] = \int d\mathbf{x} v_{m_1}^*(x) v_{m_2}^*(x) v_{m_3}(x) v_\ell(x) \right]$$

エネルギー保存はこの中に含まれる

- 場の量子論の処方に従えば、量子輸送方程式は自然とnon-Markov型になる
- 時間依存する外場を考える場合、時間依存完全系で場の演算子を展開



複雑な連立微積分方程式で数値計算コストが非常に高い

〔 今までは粒子数の少ない系を考えることで対処していた
→ 実験との比較は難しい... 〕

研究目的:

- non-Markov型量子輸送方程式の特徴をなるべく残し
- 時間依存完全系を使う形式で



数値計算しやすい式へ近似



得られた量子輸送方程式を光学格子系へ適用

発表の流れ

- 研究背景・目的
- Markov型量子輸送方程式の導出
 - Markov化
 - Markov型量子輸送方程式
- 数値計算結果

Markov化

方針: non-Markov型量子輸送方程式の時間積分を解析的に処理する

固有関数 $\{u_\ell(\mathbf{x})\}$ & $\gamma_\ell = 0$ の場合

$$\dot{n}_\ell(t) = 4g^2 \int_{-\infty}^t ds \sum_m |I_{m\ell}[u]|^2 N_{m\ell}[n(s)] \cos \left\{ \int_s^t d\tau \bar{\omega}_{m\ell}(\tau) \right\}$$



n_ℓ や ω_ℓ の時間変化はゆっくりとする
 $n_\ell(s) \rightarrow n_\ell(t)$ $\omega_\ell(\tau) \rightarrow \omega_\ell(t)$

$$\dot{n}_\ell(t) = 4\pi g^2 \sum_m |I_{m\ell}[u]|^2 N_{m\ell}[n(t)] \delta(\bar{\omega}_{m\ell}(t)) \quad (\text{量子Boltzmann方程式})$$

時間依存完全系 $\{v_\ell(x)\}$ & $\gamma_\ell \neq 0$ の場合

$$\dot{n}_\ell(t) = 4g^2 \text{Re} \int_{-\infty}^t ds \sum_m I_{m\ell}^*[v(t)] I_{m\ell}[v(s)] N_{m\ell}[n(s)] \exp \left\{ - \int_s^t d\tau \bar{\gamma}_{m\ell}(\tau) \right\}$$

γ_ℓ は ω_ℓ と同様の処方 $\Rightarrow \gamma_\ell(\tau) \rightarrow \gamma_\ell(t)$

一方 $v_\ell(x)$ は一般に速い時間変化 $\Rightarrow v_\ell(\mathbf{x}, s) \rightarrow v_\ell(\mathbf{x}, t)$
 [c.f. $V(x) = V(\mathbf{x})$ に対し $v_\ell(x) = u_\ell(\mathbf{x}) e^{-i \int^t d\tau \omega_\ell(\tau)}$]

$V(x) \neq V(\mathbf{x})$ では $v_\ell(x) = \underbrace{\tilde{v}_\ell(x)}_{\text{ゆっくり}} \underbrace{e^{-i \int^t d\tau \tilde{\omega}_\ell(\tau)}}_{\text{速い}} \Rightarrow \tilde{v}_\ell(\mathbf{x}, s) \rightarrow \tilde{v}_\ell(\mathbf{x}, t)$
 $\tilde{\omega}_\ell(\tau) \rightarrow \tilde{\omega}_\ell(t)$

Markov型量子輸送方程式

non-Markov型量子輸送方程式

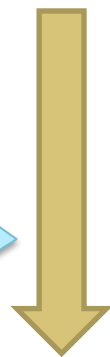
$$\dot{n}_\ell(t) = 4g^2 \text{Re} \int_{-\infty}^t ds \sum_m I_{m\ell}^*[v(t)] I_{m\ell}[v(s)] N_{m\ell}[n(s)] \exp \left\{ - \int_s^t d\tau \bar{\gamma}_{m\ell}(\tau) \right\}$$

Markov化

$$v_\ell(x) = \tilde{v}_\ell(x) e^{-i \int^t d\tau \tilde{\omega}_\ell(\tau)}$$

$$n_\ell(s) \rightarrow n_\ell(t) \quad \tilde{\omega}_\ell(\tau) \rightarrow \tilde{\omega}_\ell(t)$$

$$\tilde{v}_\ell(\mathbf{x}, s) \rightarrow \tilde{v}_\ell(\mathbf{x}, t) \quad \gamma_\ell(\tau) \rightarrow \gamma_\ell(t)$$



Markov型量子輸送方程式

$$\dot{n}_\ell(t) = 4g^2 \sum_m |I_{m\ell}[\tilde{v}(t)]|^2 N_{m\ell}[n(t)] \frac{\bar{\gamma}_{m\ell}(t)}{\bar{\omega}_{m\ell}(t)^2 + \bar{\gamma}_{m\ell}(t)^2}$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{v}_\ell(x) = \int d\mathbf{x}' h(x, \mathbf{x}') \tilde{v}_\ell(\mathbf{x}') - \tilde{\omega}_\ell(t) \tilde{v}_\ell(x)$$

$$\tilde{\omega}_\ell(t) = \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \tilde{v}_\ell^*(x) h(x, \mathbf{x}') \tilde{v}_\ell(\mathbf{x}')$$

- エネルギーの非保存性を取り入れた形式
- 時間依存完全系を使った形式

$$\left[h(x, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') h_0(x) + \delta\varepsilon(x, \mathbf{x}') \right]$$

(エネルギーの繰り込みによる補正)

$$\left[\gamma_\ell \rightarrow 0 \quad \& \quad \tilde{v}_\ell(x) \rightarrow u_\ell(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad \text{量子Boltzmann方程式} \right]$$

発表の流れ

- 研究背景・目的
- Markov型量子輸送方程式の導出
- 数値計算結果
 - 光学格子ポテンシャル中のBose気体
 - 気体の重心の非平衡過程

光学格子ポテンシャル

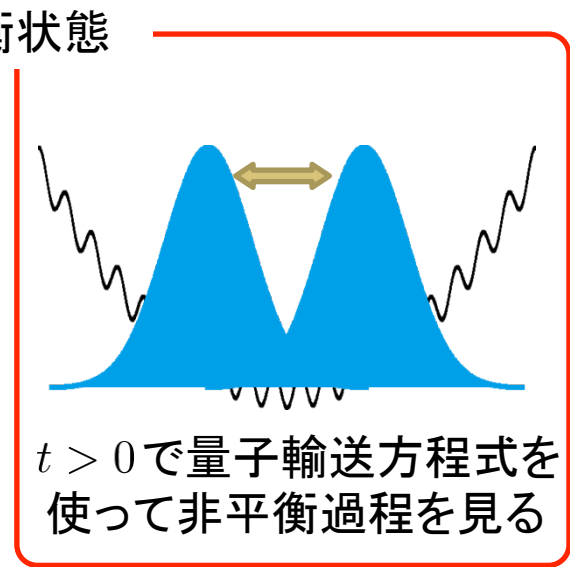
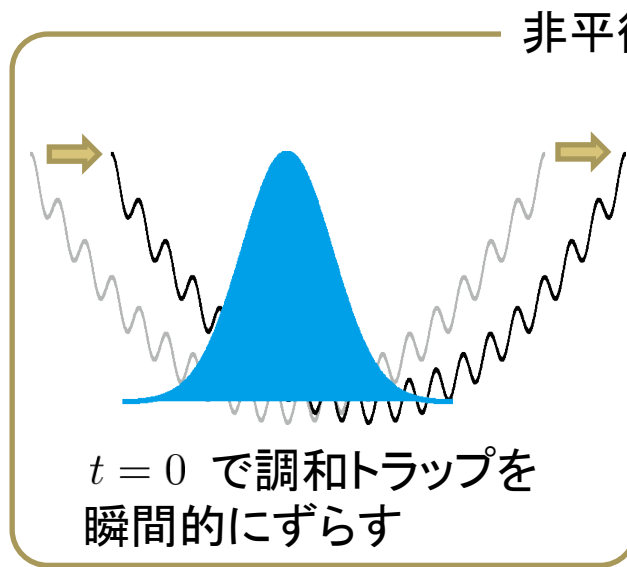
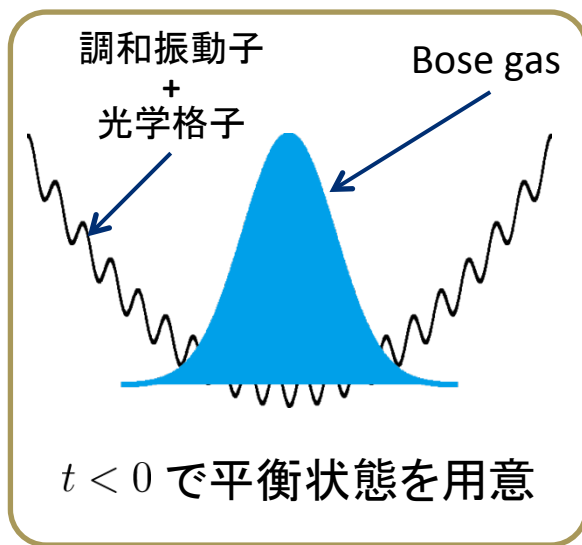
原子気体に対向するようにレーザーを照射

➡ 対向レーザーによる定在波を周期ポテンシャルとして感じる



(格子の谷 ➡ サイト)

光学格子系



Bose-Hubbard Hamiltonian

D. Jaksh et al., Phys. Rev. Lett. **81**, 3108 (1998).

$$H(t) = H_0(t) + H_{\text{int}}$$

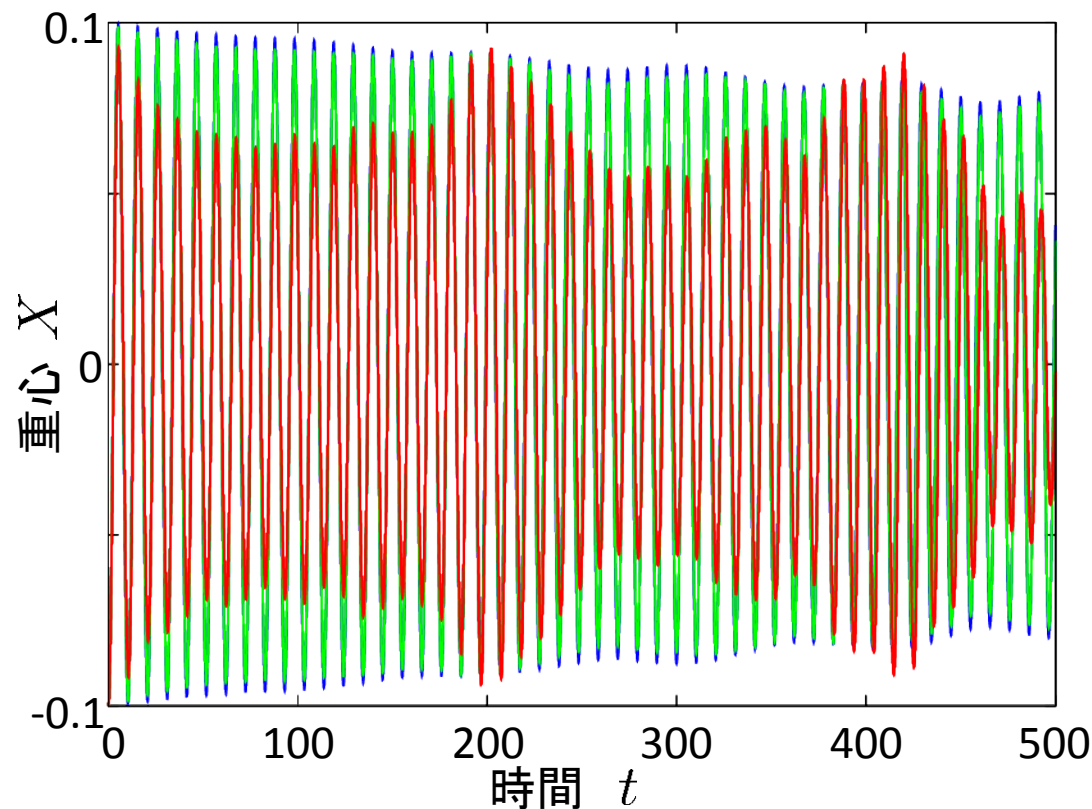
$$H_0(t) = \sum_i \left[-J \psi_i^\dagger(t) (\psi_{i+1}(t) + \psi_{i-1}(t)) + \{ (i + \theta(-t)d)^2 V - \mu \} \psi_i^\dagger(t) \psi_i(t) \right]$$

$$H_{\text{int}} = \frac{U}{2} \sum_i \psi_i^\dagger(t) \psi_i^\dagger(t) \psi_i(t) \psi_i(t)$$

場の展開 $\psi_i(t) = \sum_\ell v_{i\ell}(t) a_\ell(t)$

J : ホッピング項	V : 調和トラップの曲率
μ : 化学ポテンシャル	U : 相互作用定数
i : サイト番号	I_S : 全サイト数
d : 調和トラップのずらし幅	

数値計算結果



重心

$$X(t) = \sum_{i,\ell} i |v_{i\ell}(t)|^2 n_{\ell}(t) / N$$

NU は一定で N を変えて計算

パラメータ

$k_B T = 1.0 J$ (初期平衡温度)

$V = 0.1 J$ $NU = 0.1 J$

$I_S = 51$ $d = 0.1$

$N = 10$ — (red line)

$N = 100$ — (green line)

$N = 1000$ — (blue line)



non-Markov型では数値計算
できなかったパラメータ領域
(今までは粒子数1桁)

重心はうなりながら減衰する

うなり ➡ 光学格子による単なる量子的効果

減衰 ➡ 量子輸送方程式を解くことで現れる熱的效果

粒子数 → 大 ➡ うなり → 小 、 減衰 → 大

まとめ

- non-Markov型量子輸送方程式をMarkov型量子輸送方程式へ近似
 - エネルギー非保存性を取り入れた形式
 - 時間依存完全系で場の演算子を展開した形式
- Markov型量子輸送方程式を光学格子系へ適用
 - 重心の非平衡過程を数値計算 ➡ 減衰
 - non-Markov型ではこれまで計算できなかった粒子数で数値計算
➡ 展望: 実験と数値計算の比較