

相対論的場の理論における 散逸モードの微視的同定

斎藤陽平 (KEK)

共同研究者: 藤井宏次、板倉数記、森松治

目標

1. 相対論的場の理論から、微視的に流体方程式を導出する。
2. 臨界点近傍のダイナミクスを、微視的に理解する。

1. 背景

流体領域と永年性

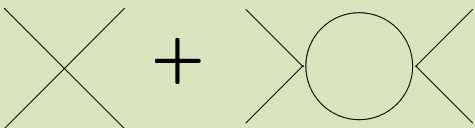
流体方程式

- ・保存量の時間発展方程式
- ・長時間・長距離 ($x \gg \xi, t \gg \tau$) の有効理論・・・低次の時間・空間微分

(ξ : 相関長、 τ : 緩和時間) (例) 熱拡散 $\partial_t Q = \kappa \nabla^2 Q$

微視的摂動論

- ・粒子の衝突を直接扱う
- ・摂動展開～衝突回数で展開

(例)  + ...

流体領域 ($t \gg \tau \gg$ 衝突時間) を記述するには、多重散乱の効果が重要になる。
単純な摂動論の破綻(永年性)

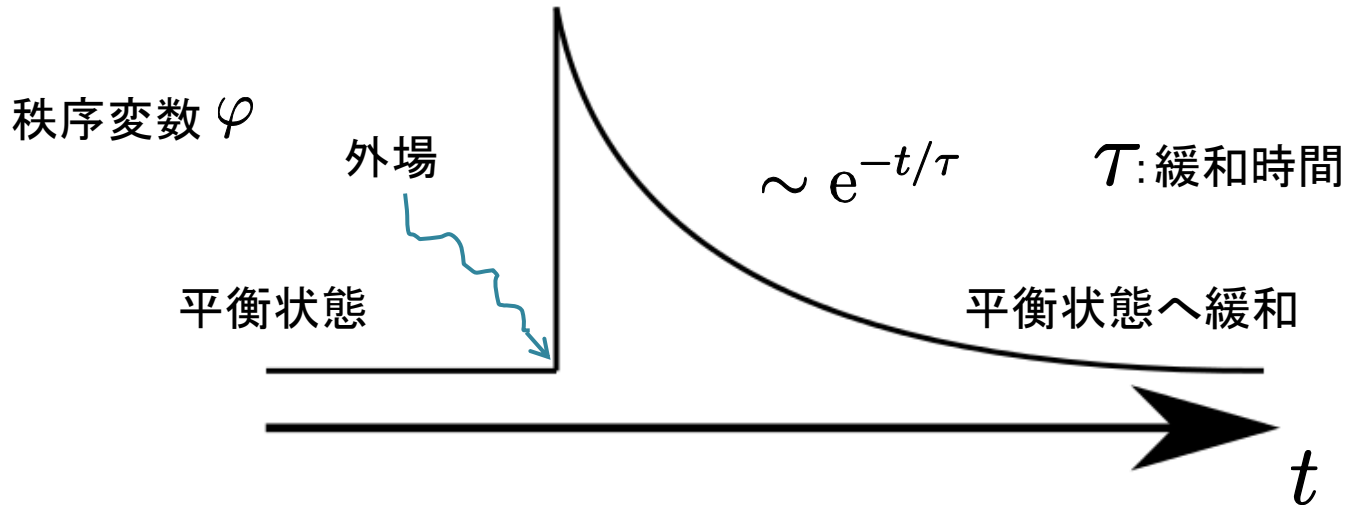


無限回の衝突をresummationで取りこむことで解消(2PI有効作用など)

流体領域を微視的に扱う上で有効な手法

臨界点近傍における緩和

・通常の緩和現象



・臨界領域（大きなゆらぎ、相関長 $\xi \rightarrow \infty$ ）

緩和時間の発散 $\tau \sim \xi^z$ **z: 動的臨界指数**

輸送係数の発散・・・拡散係数・熱伝導度・ずり粘性係数など



流体描像の破綻

動的臨界現象

臨界ダイナミクスの記述

相関長・緩和時間の発散

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$$
$$\tau \sim \xi^z$$



- ・系のミクロな詳細に依らなくなる (universality)
- ・ダイナミクスはマクロな流体モード (保存量) で記述される (mode coupling theory)
- ・秩序変数は保存量でない場合でも、流体モードと同じ緩和時間スケールを持つ

流体モードの種類	方程式	時間発展
伝播モード (音波など)	波動方程式	$\sim e^{\pm i c_s \mathbf{p} t}$ (振動)
散逸モード (熱拡散など)	拡散方程式	$\sim e^{-\Gamma \mathbf{p}^2 t}$ (減衰)

臨界ダイナミクスは散逸モードで記述される。

今回の内容

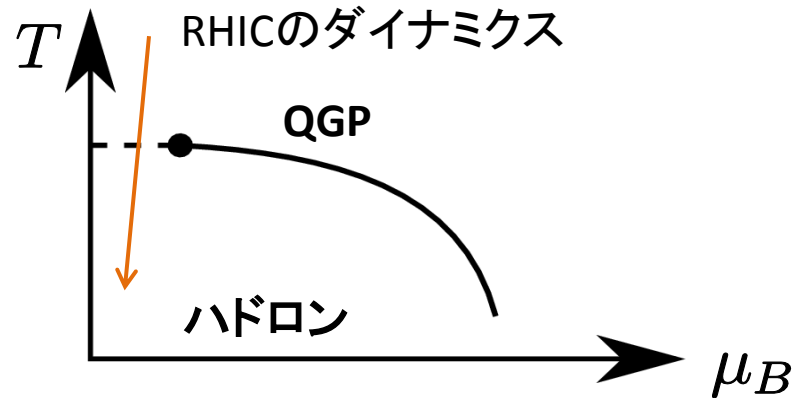
巨視的な時間スケールを、微視的な摂動論で記述することは非常に困難。
(流体方程式の導出、臨界ダイナミクスの記述など)

2PI有効作用  多重散乱を系統的に取り込む手法
長時間のダイナミクスに有効

2PI有効作用の $1/N$ 展開を用いて、対称相($\phi=0$)において

1. $O(N)$ φ^4 理論で微視的に散逸モードの同定を行う。
2. さらに動的臨界指数 z の評価を試みる。

臨界ダイナミクスの例



重イオン衝突におけるQGPの時間発展 → 流体シミュレーション

臨界点近傍
(大きなゆらぎ)



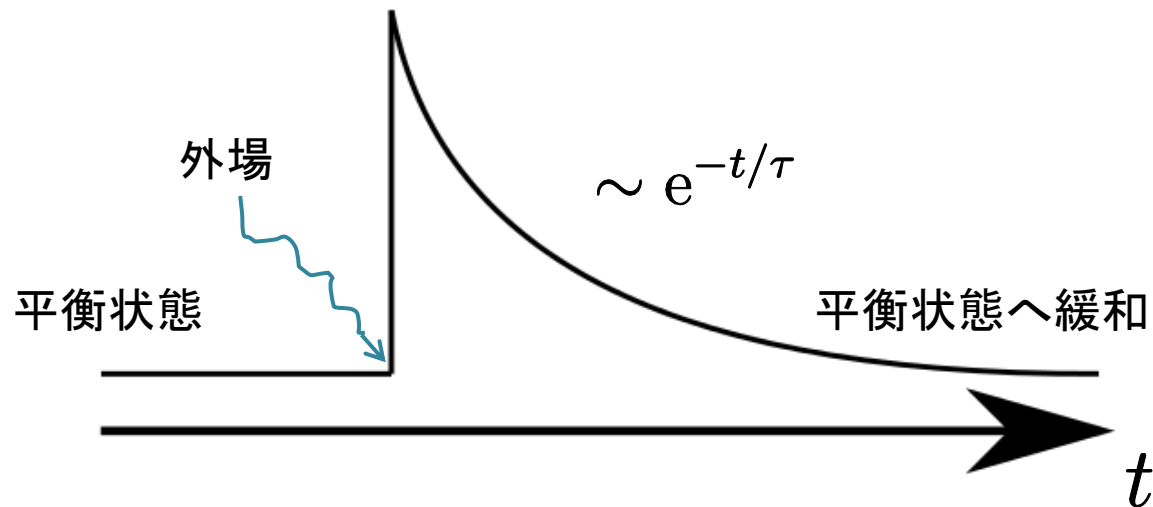
臨界領域のダイナミクス＝

動的臨界現象

2. 散逸モードの同定

緩和とゆらぎ

秩序変数 φ の緩和 $\longrightarrow$ 応答関数



平衡近傍では、応答関数を
平衡状態における揺らぎの相関 ($\langle \delta\varphi \delta\varphi \rangle_{eq}$) で評価可能 (線形応答)。

以下では、平衡状態における遅延相関関数 $G_R(p)$ を用いる。

赤外領域の相関関数

相対論的 $O(N)$ φ^4 模型 φ : 秩序変数 ($a = 1, \dots, N$)

$$S[\varphi] = \int dt d^3x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_a(x) \partial^\mu \varphi_a(x) - \frac{m_0^2}{2} \varphi_a(x) \varphi_a(x) - \frac{\lambda_0}{4!N} (\varphi_a(x) \varphi_a(x))^2 \right]$$

$$\text{遅延相関関数 : } G_R(p) = \frac{1}{-p_0^2 + \mathbf{p}^2 + m_0^2 - \text{Re}\Sigma_R(p) - i\text{Im}\Sigma_R(p)}$$

特に赤外領域 ($p_0 \ll \mathbf{p} \ll T, m$) で自己エネルギーを展開すると、

$$\begin{cases} \text{Re } \Sigma_R(p_0, \mathbf{p}) = (c_0 + d_0 \mathbf{p}^2 + \mathcal{O}(\mathbf{p}^4)) + \mathcal{O}(p_0^2) \\ \text{Im } \Sigma_R(p_0, \mathbf{p}) = (\Gamma^{-1} + \mathcal{O}(\mathbf{p}^2)) p_0 + \mathcal{O}(p_0^3) \end{cases}$$

$$G_R(p) \sim \frac{1}{-i\Gamma^{-1}p_0 + \mathbf{p}^2 + m^2}$$

(散逸的な伝播関数)

散逸モードが存在する条件

$$G_R(p) \sim \frac{1}{-i\Gamma^{-1}p_0 + \mathbf{p}^2 + m^2}$$

この項が赤外領域で存在すれば、緩和が散逸的になる。

自己エネルギーの虚部

$$\text{Im}\Sigma_R(p_0, \mathbf{p}) = (\Gamma^{-1} + \mathcal{O}(\mathbf{p}^2)) p_0 + \mathcal{O}(p_0^3)$$

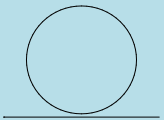
散逸モードを持つ条件

$$\Gamma^{-1} = \lim_{\mathbf{p} \rightarrow 0} \lim_{p_0 \rightarrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial p_0} \text{Im} \Sigma_R(p_0, \mathbf{p}) \right) \neq 0, \infty$$

散逸と散乱過程

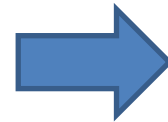
具体的に自己エネルギーの評価を行う。

1/N展開LO

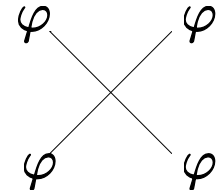
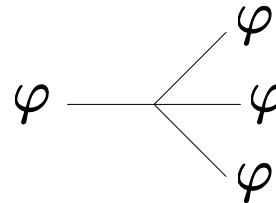
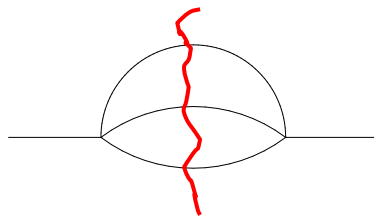


mass shift のみ。

1/N展開NLO



生成(崩壊)・散乱効果が現れる。



散逸現象は熱浴中の粒子との散乱に起因



まずNLOで評価を行う

自己エネルギー

相関関数

$$G_R(p) = \langle \varphi \varphi \rangle, \quad D_R(p) = \langle \varphi^2 \varphi^2 \rangle = \text{diagram} = \text{diagram}$$

$$\rho(p) = 2\text{Im} \langle \varphi \varphi \rangle, \quad \rho_D(p) = 2\text{Im} \langle \varphi^2 \varphi^2 \rangle \quad (\text{スペクトル関数})$$

1/N展開NLO自己エネルギー

$$\Sigma_R(p) = \text{diagram} = \text{diagram}$$

$D = \langle \varphi^2 \varphi^2 \rangle$

緩和係数の表式

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{R}}^{NLO}(p) &= \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} \\ &= \frac{\lambda}{3N} \frac{\lambda}{6} \int \frac{dq_0 d\mathbf{q}}{(2\pi)^{d+1}} \\ &\times \{n(q_0) \rho(q_0, \mathbf{q}) D_{\text{R}}(p + q) + n(p_0 + q_0) G_{\text{A}}(q) \rho_D(p + q)\}\end{aligned}$$



$$n(q_0) = (e^{\beta q_0} - 1)^{-1} \sim \text{分布関数}$$

緩和係数

$$\Gamma^{-1} = \frac{\partial}{\partial p_0} \text{Im} \Sigma_{\text{R}}(p_0, \mathbf{0}) \Big|_{p_0=0} \propto \int \frac{dq_0 d\mathbf{q}}{(2\pi)^{d+1}} \rho(q_0, \mathbf{q}) \rho_D(q_0, \mathbf{q}) n'(q_0) \neq 0, \infty$$

NLOで散逸モードが存在するための条件

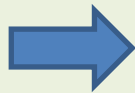
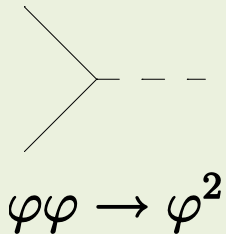
1PI有効作用による評価

評価する式： $\Gamma^{-1} \propto \int \frac{dq_0 d\mathbf{q}}{(2\pi)^{d+1}} \rho(q_0, \mathbf{q}) \rho_D(q_0, \mathbf{q}) n'(q_0)$

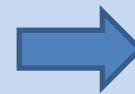
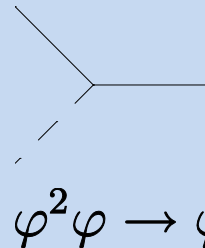
$\rho(p) = 2\text{Im} \langle \varphi \varphi \rangle \propto \text{sign}(p_0) \delta(s - m^2) \leftarrow \text{on shellの}\phi$

(m: ϕ の質量)

$$\rho_D(p) = 2\text{Im} \langle \varphi^2 \varphi^2 \rangle$$

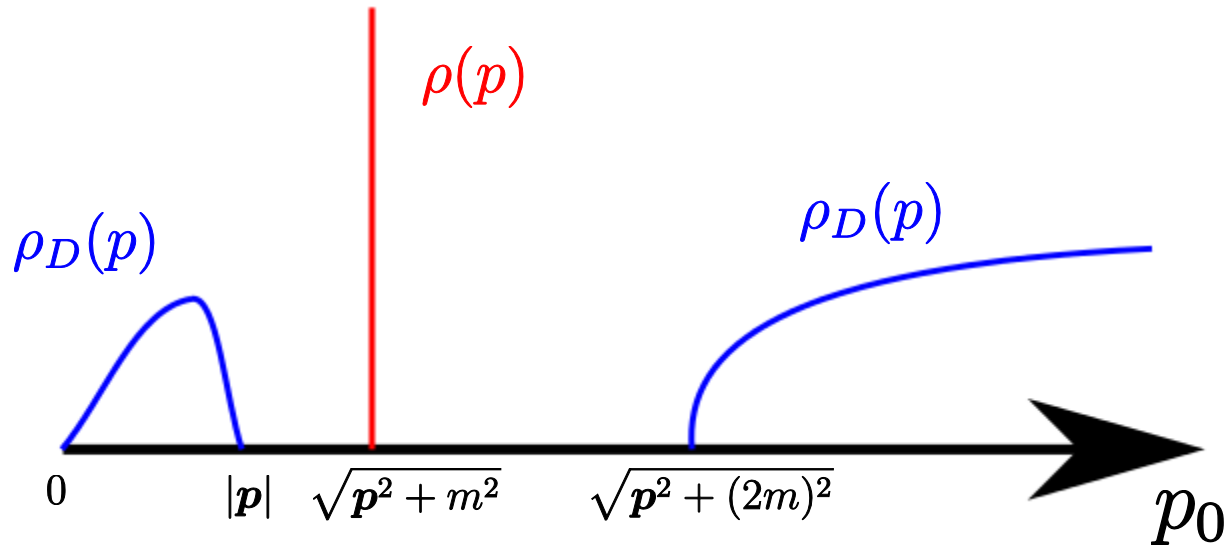


$$s > (2m)^2$$



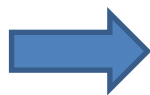
$$s < 0$$

1PI有効作用の結果



$\rho(p)$, $\rho_D(p)$ のオーバーラップは存在しない。

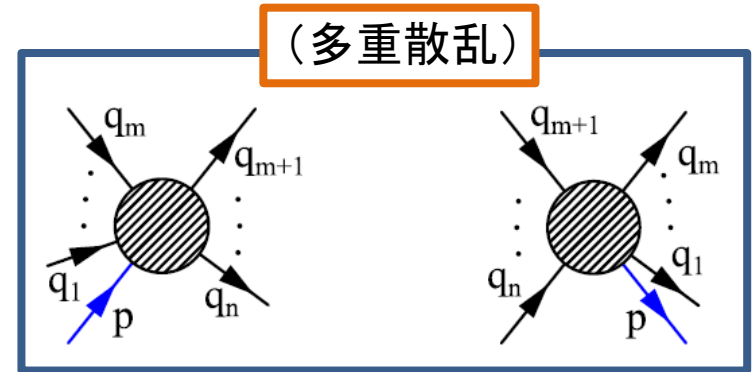
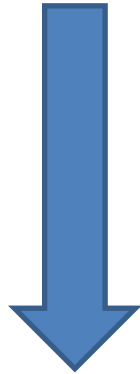
$$\Gamma^{-1} \propto \int \frac{dq_0 d\mathbf{q}}{(2\pi)^{d+1}} \rho(q_0, \mathbf{q}) \rho_D(q_0, \mathbf{q}) n'(q_0) = 0$$



自己エネルギーに散乱効果が含まれているが、
1PI有効作用のNLOでは、散逸モードなし

2PI有効作用

2PI有効作用 : resummationによって多重散乱効果を取り込む



スペクトル $\rho(p)$, $\rho_D(p)$ に有限の幅が現れる。

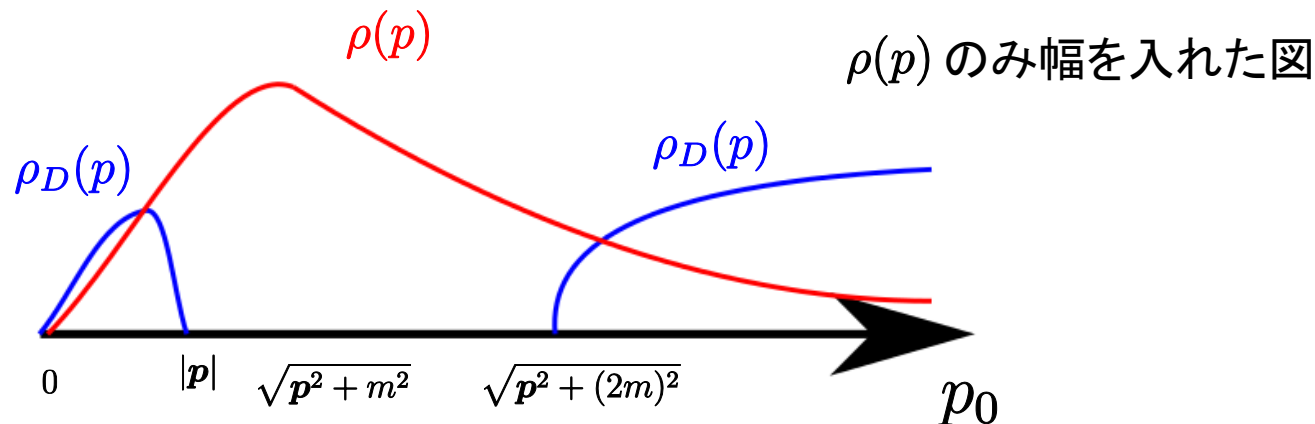
$$\Gamma_{2PI}^{-1} \propto \int \frac{dq_0 d\mathbf{q}}{(2\pi)^{d+1}} \rho^{2PI}(q_0, \mathbf{q}) \rho_D^{2PI}(q_0, \mathbf{q}) n'(q_0)$$

この幅は $(p_0, \mathbf{p})$ 平面の
ほぼ全領域に広がることが知られている。

Jeon, PRD 52, 3591 (1995)
Blaizot and Iancu, PR 359, 355 (2002)
Nishikawa et al., PRD 68, 076002 (2003)

2PI有効作用による評価

$$\Gamma^{-1} \neq 0$$



➡ $\rho(p)$, $\rho_D(p)$ にオーバーラップが生じる。

$$\Gamma^{-1} \neq \infty$$

➡ 次元解析等を用いて示すことができる。

$\Gamma^{-1} \neq 0, \infty$ ➡ 2PI有効作用のNLOでは、
散逸モードが存在することを確認できた。

3.動的臨界指数 z の評価

動的スケール不変性

大きな揺らぎのため、
臨界点では相関長・緩和時間が発散する



ダイナミクスは系のミクロな詳細に依らなくなる
(動的スケール不変性)

秩序変数の相関関数のスケーリング形

$$G_R(p_0, \mathbf{p}) = b^{2-\eta} G_R(b^z p_0, b\mathbf{p}) \sim \frac{1}{p^{2-\eta}} F\left(\frac{p_0}{p^z}\right)$$

η : 静的臨界指数

臨界指数 z : 時間と空間の異方性

相対論的 $O(N)$ φ^4 模型

$$S[\varphi] = \int dt d^3x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_a(x) \partial^\mu \varphi_a(x) - \frac{m_0^2}{2} \varphi_a(x) \varphi_a(x) - \frac{\lambda_0}{4!N} (\varphi_a(x) \varphi_a(x))^2 \right]$$

作用をみると、素朴には $z = 1 + \mathcal{O}(1/N)$

臨界指数 z の評価

$$T \neq T_c$$

秩序変数の相関関数は、
赤外領域で散逸的に振る舞う。

$$\longrightarrow G_R(p) \sim \frac{1}{-i\Gamma^{-1}p_0 + \mathbf{p}^2 + m^2 - \text{Re}\Sigma_R(p)}$$

$$T = T_c$$

・静的臨界現象の効果

$$\mathbf{p}^2 + m^2 - \text{Re}\Sigma(p) \rightarrow \mathbf{p}^{2-\eta}$$

・緩和係数 Γ^{-1} は定数と仮定する。

$$G_R(p) \sim \frac{1}{-i\Gamma^{-1}p_0 + \mathbf{p}^{2-\eta}} = \frac{1}{\mathbf{p}^{2-\eta}} \frac{1}{1 - i\Gamma^{-1} \left(\frac{p_0}{\mathbf{p}^{2-\eta}} \right)}$$

$$z = 2 - \eta$$

$$\eta = \mathcal{O}(1/N)$$

相関関数のスケーリング形

実際には緩和係数は運動量依存性を持つ

$$\Gamma^{-1}(\mathbf{p}, m) = \lim_{p_0 \rightarrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial p_0} \text{Im } \Sigma_R(p_0, \mathbf{p}) \right) \Rightarrow \Gamma^{-1}(\mathbf{p}, m = 0) \sim \Gamma_0^{-1} \mathbf{p}^{-c}$$

スケーリング形の変更

$$G_R(p) \sim \frac{1}{-i\Gamma^{-1}p_0 + \mathbf{p}^{2-\eta}}$$

$$G_R(p) \sim \frac{1}{-i\Gamma_0^{-1}\mathbf{p}^{-c}p_0 + \mathbf{p}^{2-\eta}} = \frac{1}{\mathbf{p}^{2-\eta}} \frac{1}{1 - i\Gamma_0^{-1} \left(\frac{p_0}{\mathbf{p}^{2-\eta+c}} \right)}$$

$$z = 2 - \eta + c$$

相関関数のスケーリング形

Schwinger-Dyson方程式 $G_R^{-1}(p) = G_{R,0}^{-1}(p) - \Sigma_R(p)$ から自己無撞着に η, c を決定

Schwinger-Dyson方程式の解

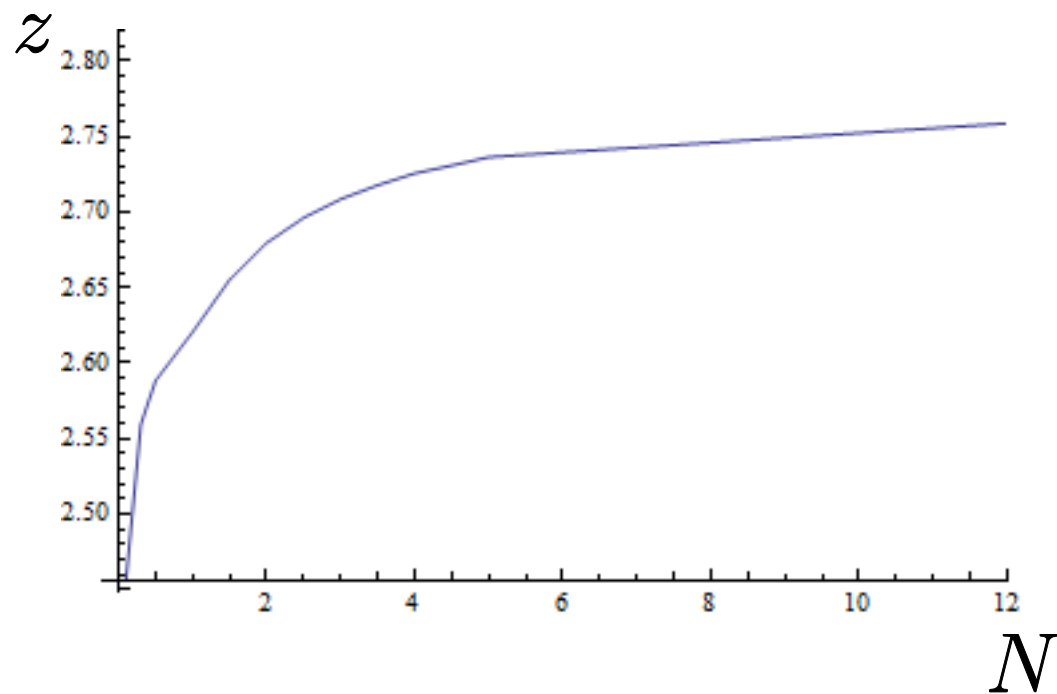
$$1 = \frac{4\eta(1-2\eta) \cos(\eta\pi)}{N(3-\eta)(2-\eta) \sin^2(\eta\pi/2)} \quad \Rightarrow \quad \eta \text{ が決まる。}$$

$$1 = \frac{1}{\pi^2 a^2 N} \frac{1}{1-c-\eta} \int_0^\infty d\hat{q} \hat{q}^{-1+\eta} \\ \times \left[(1+\hat{q})^{1-c-\eta} {}_2F_1 \left(1, \frac{-1+c+\eta}{2+c-\eta}, \frac{1+2c}{2+c-\eta}, -\frac{b}{a} \left(\frac{\hat{q}}{1+\hat{q}} \right)^{2+c-\eta} \right) \right. \\ \left. - |1-\hat{q}|^{1-c-\eta} {}_2F_1 \left(1, \frac{-1+c+\eta}{2+c-\eta}, \frac{1+2c}{2+c-\eta}, -\frac{b}{a} \left(\frac{\hat{q}}{|1-\hat{q}|} \right)^{2+c-\eta} \right) \right] \quad \Rightarrow \quad C \text{ が決まる。}$$

$$a(\eta) = \frac{1}{8\pi^{3/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\eta\right) \left[\Gamma\left(\frac{1+\eta}{2}\right)\right]^2}{\left[\Gamma\left(1-\frac{\eta}{2}\right)\right]^2 \Gamma(1+\eta)}$$

$$b(c, \eta) = \frac{-1}{4\pi^2 (2+c-2\eta)} \int_0^\infty d\hat{q} \hat{q}^{-1+\eta} \\ \times \left[(1+\hat{q})^{-2+2\eta-c} {}_2F_1 \left(1, \frac{2+c-2\eta}{2+c-\eta}, \frac{4+2c-3\eta}{2+c-\eta}, -\left(\frac{\hat{q}}{1+\hat{q}} \right)^{2+c-\eta} \right) \right. \\ \left. - |1-\hat{q}|^{-2+2\eta-c} {}_2F_1 \left(1, \frac{2+c-2\eta}{2+c-\eta}, \frac{4+2c-3\eta}{2+c-\eta}, -\left(\frac{\hat{q}}{|1-\hat{q}|} \right)^{2+c-\eta} \right) \right]$$

臨界指数 z (preliminary)



$$z = 2 - \eta + c$$

$$N \rightarrow \infty \text{ のとき } z \rightarrow 3$$

まとめ

散逸モードの同定

- ・相対論的場の理論の相関関数に散逸モードが存在

散逸は散乱によって生じるが、
散乱が初めて現れる、 $1/N$ 展開のNLOから取り出すことはできない。



高次項が必要(2PI resummationなど)

臨界指数 z の評価

- ・散逸的な相関関数から臨界指数 z を評価

$$z = 2 - \eta + c$$

- ・結果の妥当性および有効理論(モード結合理論)との対応は、今後の課題