冷却原子系を用いた
量子シミュレーション:
格子場の理論に対する
新奇シミュレーション技術の
現状と未来

名工大:一瀬　郁夫

2013年8月27日

「熱場の量子論とその応用」

1. Introduction

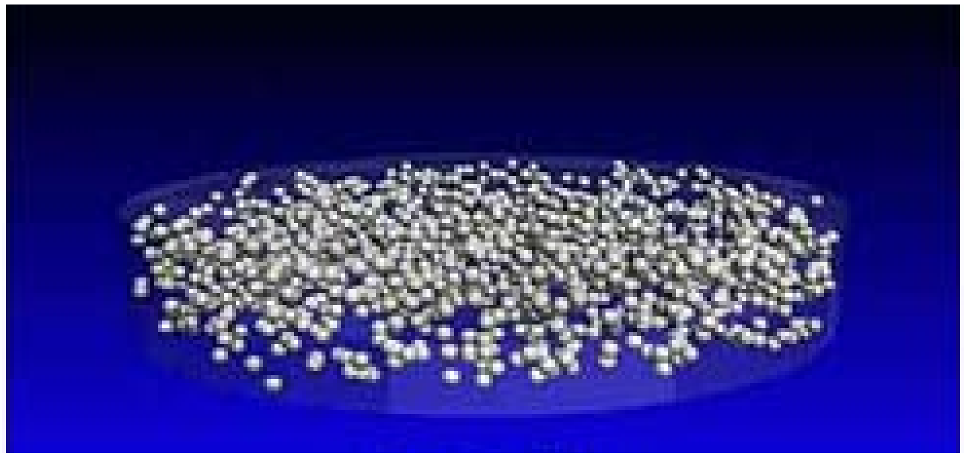
- 量子シミュレーションとは

★物理的に興味のある量子系に対して、疑似的かつ制御可能、汎用性のある量子系を実験的に作り、その動力学を調べること。

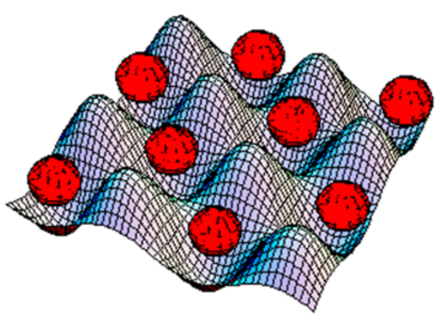
☆格子ゲージ理論、強相関電子系などに対して現在実行されている古典シミュレーションを補い、新たな知見を与えると期待される。

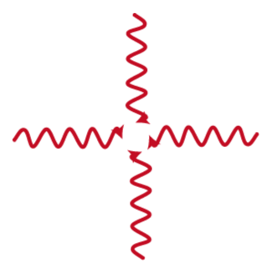
☆これまでacademic な興味で調べられて来た場の理論モデルを現実の実験系で実現できる。

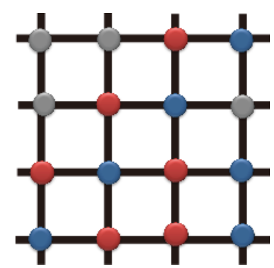
量子シミュレーションを実現する量子系はあるのか？



極低温原子系







レザーを使い、**光学格子に原子をトラップする**
格子の次元、形状を自在に変えられる

原子と``素粒子”

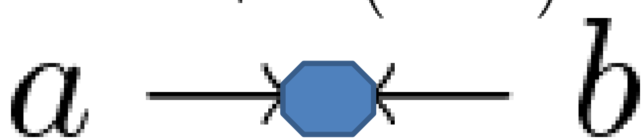
☆原子は内部構造を持つ

1) $a + b \longrightarrow a^* + b^*$: ``別な粒子”に変化

内部状態が異なると、別の光学ポテンシャルを感じる

➔ 質量が変化した

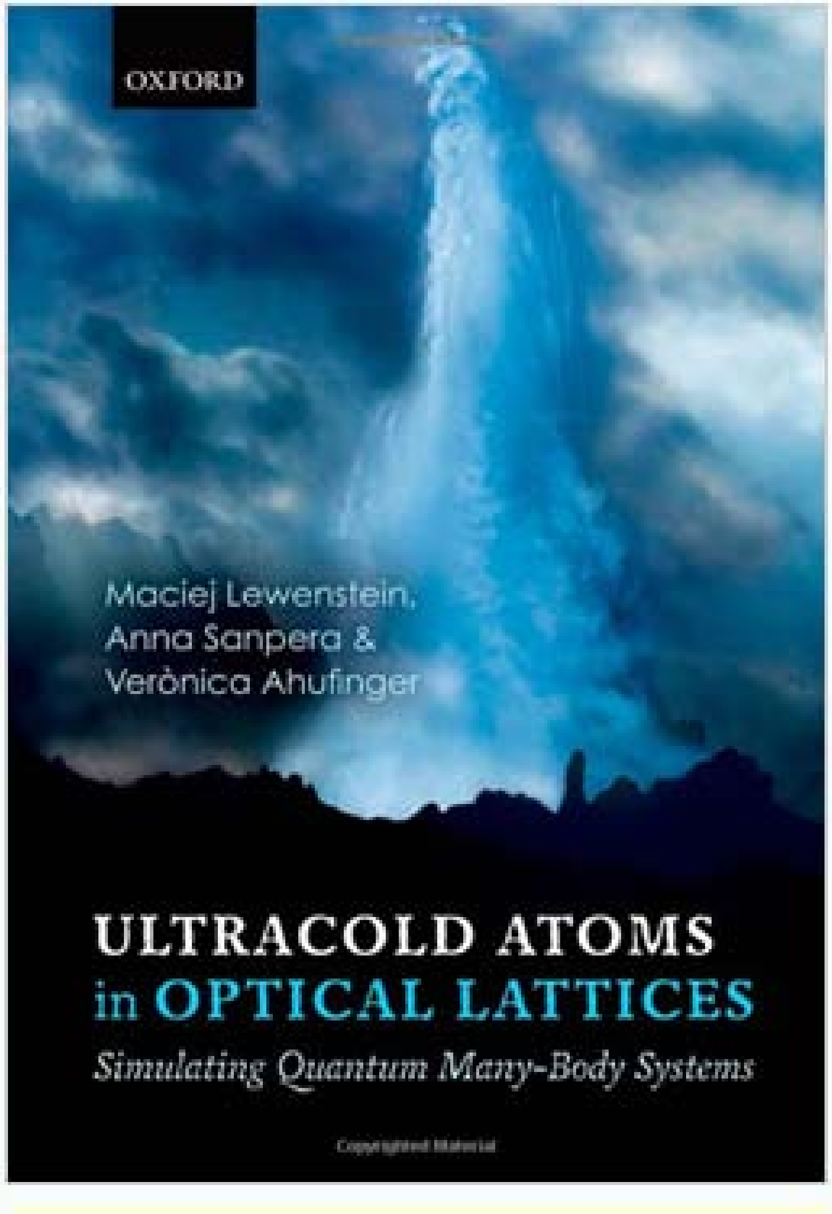
2) $a + b \rightarrow a^* + b^*(res.) \rightarrow a + b$



相互作用を自在にコントロール (Feshbach 共鳴）

3) $a_\alpha \longrightarrow a^* \longrightarrow a_\beta$ laser-assisted tunneling

サイト リンク サイト $\alpha,\ \beta = \mathrm{spin}\ \ z\text{-comp.}$


OXFORD
Maciej Lewenstein,
Anna Sanpera &
Verònica Ahufinger
ULTRACOLD ATOMS
in OPTICAL LATTICES
Simulating Quantum Many-Body Systems
Copyrighted Material

2012 年

今日の講演のプラン

1. Introduction

2. SU(N) AF spin モデルと CP^{N-1} シグマモデル

   大きなスピンをもつfermion 系

   1/N -展開の正当性の実験的検証

3. Schwinger model(QED_2) と quantum link model

   Local gauge inv. , Composite gauge field

4. 格子ゲージ理論 : Gauge-Higgs モデル

   BEC モデル、Local gauge inv. の破れとHiggs 場

5. まとめと将来の展望

SU(N)スピンモデルの有効場理論とその相構造

Y.Qi and C.Xu, Phys. Rev. B **78,** 014410 (2008)

K. Kataoka, S.Hattori & I.I. , Phys.Rev.B**83**, 17449 (2011)

SU(N) Heisenberg model
S=3/2 fermionを光学格子にトラップ、各格子点に1個ずつ配置
極低温原子系で実現 $^{132}\mathrm{Cs},{}^{9}\,\mathrm{Be},{}^{135}\,\mathrm{Ba},{}^{137}\,\mathrm{Ba},{}^{201}\,\mathrm{Hg},\cdots$

T=0の(2+1)次元量子系を記述する
有効場理論の導出(連続理論)

1/N-展開法による
相構造の決定

SU(4) Heisenberg model
格子化

Monte Carloシミュレーション
による相構造の決定

場の量子論の手法である1/N展開法の正当性を
実験によって確かめることができる

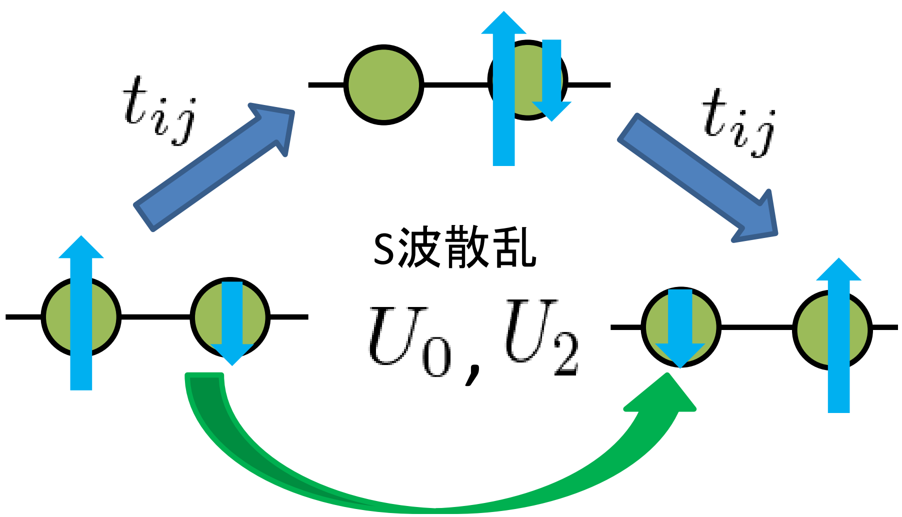
$$\mathcal{H} = -\sum_{\langle i,j\rangle}\sum_{\sigma=\pm 3/2,\pm 1/2} t_{i,j}(\psi_i^\dagger \psi_j + \mathrm{h.c.}) + \sum_i \sum_{S=0}^{4} \underline{U_S} \sum_{m=-S}^{S} P_{S,m,i}^\dagger \underline{P_{S,m,i}}$$

U_S: 合計スピンがSの状態のfermion間相互作用

$P_{S,m,i}$: 合計スピンがSの状態の生成消滅演算子

spin – 3/2 fermion atom operator

$$\hat{\psi} = (\hat{\psi}_{3/2}, \hat{\psi}_{1/2}, \hat{\psi}_{-1/2}, \hat{\psi}_{-3/2})$$



各 site に 1 particle

U_0 ← spin=0 の斥力

U_2 ← spin=2 の斥力

$$\mathcal{H} = \sum_{\langle i,j\rangle}[a\vec{S}_i\cdot\vec{S}_j + b(\vec{S}_i\cdot\vec{S}_j)^2 + c(\vec{S}_i\cdot\vec{S}_j)^3]$$ ← 有効 モデル

s=1/2 case

$$\mathcal{H} = J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j$$

SU(2) 群は3個の生成子からなる

$$S^a = \frac{1}{2}\sigma^a$$

σ^a : Pauli matrices (a=1,2,3)

fermion表示

$$\hat{\psi}_i = (\hat{\psi}_{i\uparrow}, \hat{\psi}_{i\downarrow})$$

$$\sum_\alpha \hat{\psi}^\dagger_{i\alpha}\hat{\psi}_{i\alpha} = 1$$

$$\hat{S}^a_i = \frac{1}{2}\hat{\psi}^\dagger_{i\alpha}\sigma^a_{\alpha\beta}\hat{\psi}_{i\beta}$$

boson表示 (Schwinger boson)

$$\hat{b}_i = (\hat{b}_{i\uparrow}, \hat{b}_{i\downarrow})$$

$$\sum_\alpha \hat{b}^\dagger_{i\alpha}\hat{b}_{i\alpha} = 1$$

$$\hat{S}^a_i = \frac{1}{2}\hat{b}^\dagger_{i\alpha}\sigma^a_{\alpha\beta}\hat{b}_{i\beta}$$

SU(2)対称性を持つS=1/2系 ⇨ SU(4) 対称性を持つS=3/2系

Effective field theory for SU(4) AF spin model

コヒーレント状態の経路積分
反強磁性状態からのゆらぎを積分、 $(N=4)$

$$Z=\int \mathcal{D}\bar{z}\mathcal{D}z\mathcal{D}\sigma\exp\left(-\frac{N}{g}\int d^3x[|\partial_\mu z|^2-|\bar{z}\partial_\mu z|^2+\sigma(|z|^2-1)]\right)$$

CP^3 変数

$$z=(z_1,z_2,z_3,z_4) \qquad \sum_{i=1,\cdots,4}|z_i|^2=1$$

$$\leftarrow$$

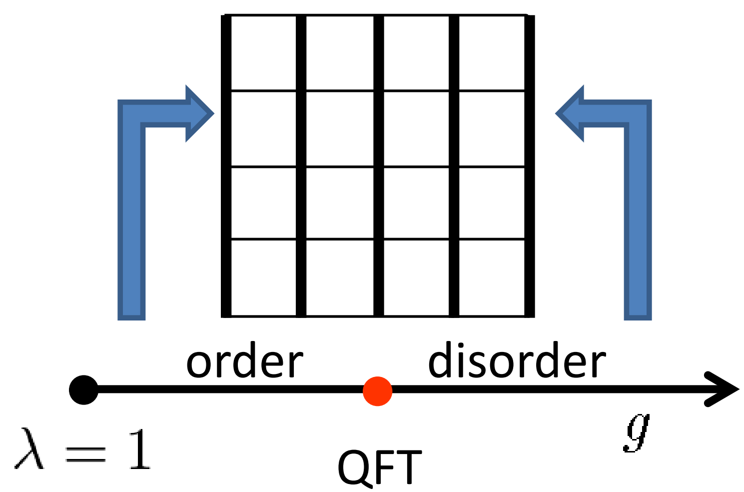
$$\hat{b}_i=(\hat{b}_1,\hat{b}_2,\hat{b}_3,\hat{b}_4) \qquad \sum_{\alpha}\hat{b}^\dagger_{i\alpha}\hat{b}_{i\alpha}=1$$

異方的
(擬1次元的)
等方的

SU(4) Heisenberg model の有効場理論
としてCP^3 model を導出した

$$g=\frac{1+\lambda}{\sqrt{2\lambda}} \quad \longrightarrow$$

J の異方性に依存する



1/N展開法 ・・・ 1/Nを摂動パラメータとして展開する非摂動的手法

CP ^{3} 変数 ⇨ CP $^{N-1}$ 変数 :4成分からN成分にする

1/N 展開法では2次相転移が予想される

I.Ya. Are'eva and S.I. Azakov, Nucl.Phys.B162, 298(1980)

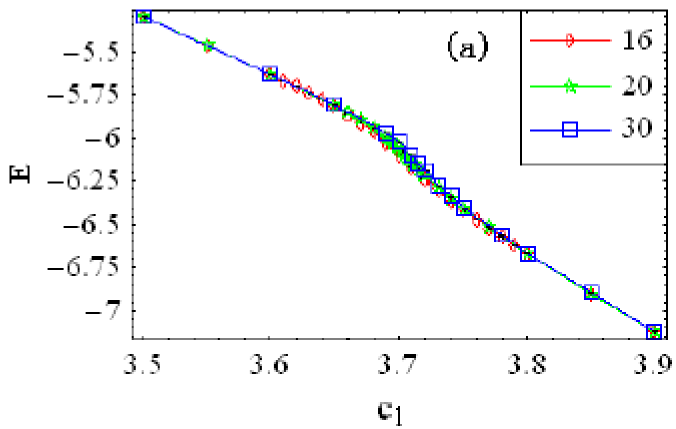
MC 計算

N=2, N=3 は2次転移である

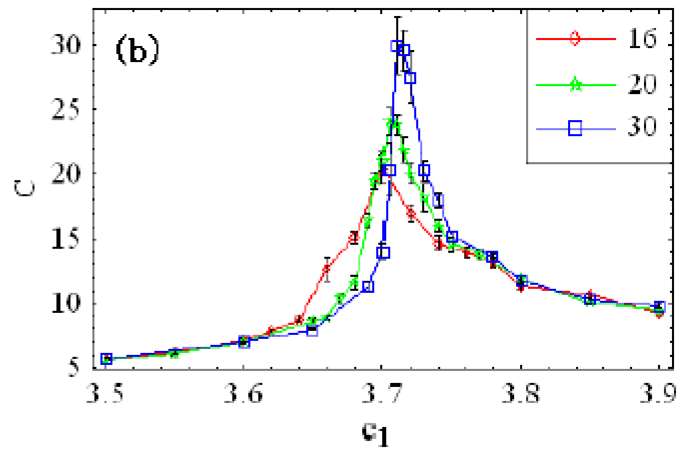
$$C_1 \equiv N/g$$

N=3 の結果

エネルギー

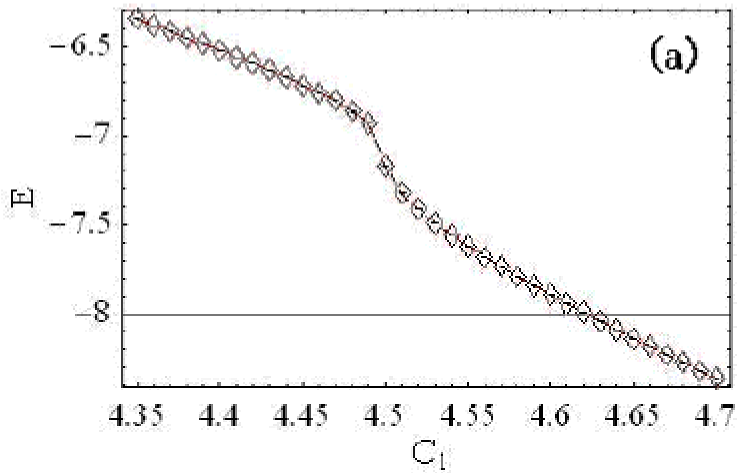


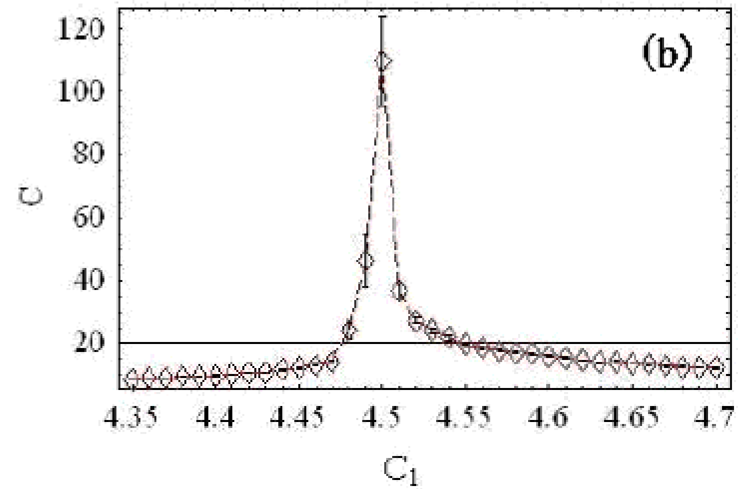
比熱

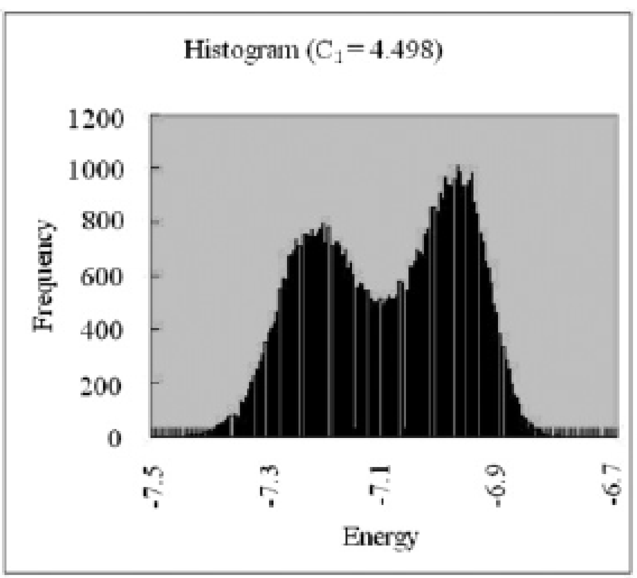


ところが、N=4 では

kataoka, Hattori & I.I, PRB 2011
Adam, Chalker, et.al. , PRL 2011
arXiv.1308.0144







エネルギー分布関数

1次転移である!!

→1/N 展開は正しい答えを
出さない!(?)

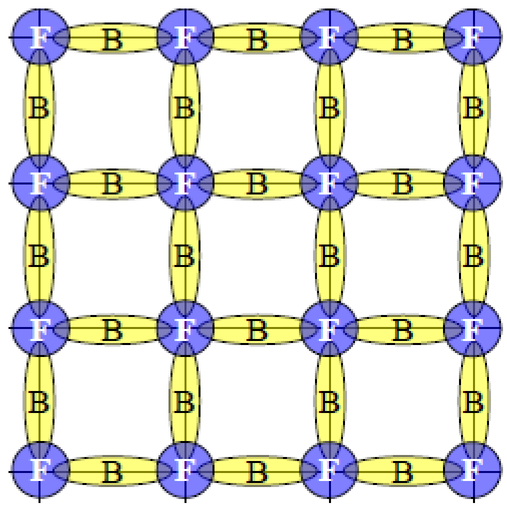
→ 実験による検証!!

compact

3. Schwinger model ($c\,QED_2$)

格子ゲージ理論 の量子シミュレーション（論文多数）

QCD, QED のセットアップ



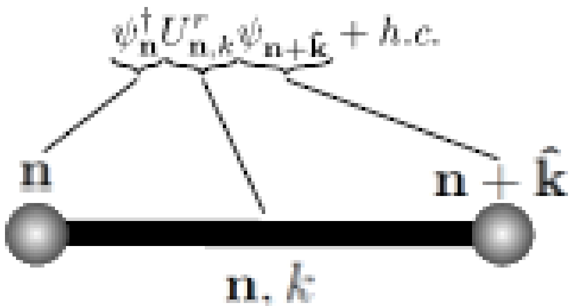
空間格子
連続時間

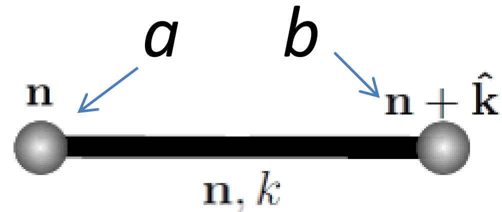
↓

Hamiltonian 形式

ボソン、フェルミオンの配置、光学格子で実現可能

☆ゲージ場の 量子シミュレーション





$$\psi_{\mathbf{n}} \to V_{\mathbf{n}}^{r} \psi_{\mathbf{n}}, \quad U_{\mathbf{n},k}^{r} \to V_{\mathbf{n}}^{r} U_{\mathbf{n},k}^{r} V_{\mathbf{n}+\hat{\mathbf{k}}}^{r\dagger}$$

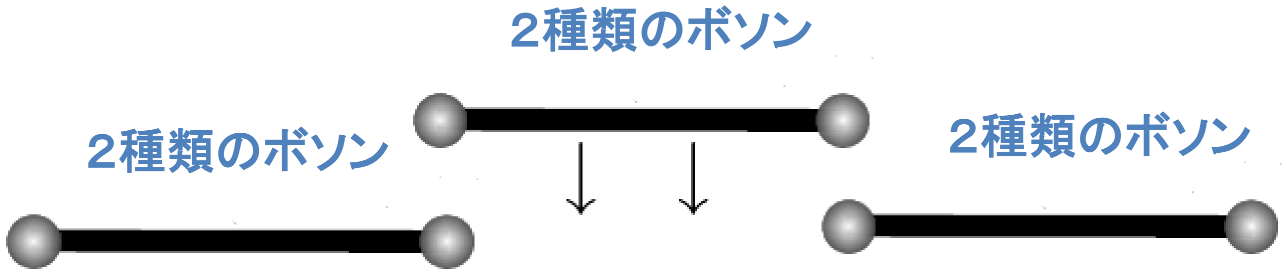
電場 $E_{\mathbf{n},k}, \quad [E_{\mathbf{n},k}, U_{\mathbf{m},\ell}] = \delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}} \delta_{k,\ell} U_{\mathbf{m},\ell}$

複合ゲージボソン・・・1つの link に``2種類”のボソン

$$L_{+} = a^{\dagger} b \leftrightarrow U, \quad L_{-} = b^{\dagger} a \leftrightarrow U^{\dagger},$$

$$Lz = \frac{1}{2}(a^{\dagger} a - b^{\dagger} b) \leftrightarrow E$$

粒子数の和一定
角運動量の大きさ一定



Quantum link model

☆Staggered fermion の量子シミュレーション

even site *c* –atom c_n , odd site *d* –atom d_n

mass term $$H_M = M \sum_n (-1)^n \psi_n^\dagger \psi_n,$$

$$\psi_n = c_n (n \in \mathrm{even}), \psi_n = d_n (n \in \mathrm{odd}),$$

hopping term $$H_P = \lambda \sum_n (\psi_n^\dagger L_{+,n} \psi_{n+1} + \mathrm{h.c.})$$

各原子の角運動量のz-成分を電荷と見なす･･･gauge symmetry

Zohar, Cirac, & Reznik , arXiv: 1303.5040

問題点

1. 角運動量のHilbert 空間は有限である
   v.s. U（1）ゲージ場のHilbert 空間は無限次元

2. $L_\pm$ は unitary 演算子ではない

$$\frac{L_\pm}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}|\ell m\rangle = \sqrt{1-\frac{m(m+1)}{\ell(\ell+1)}}|\ell, m\pm 1\rangle$$

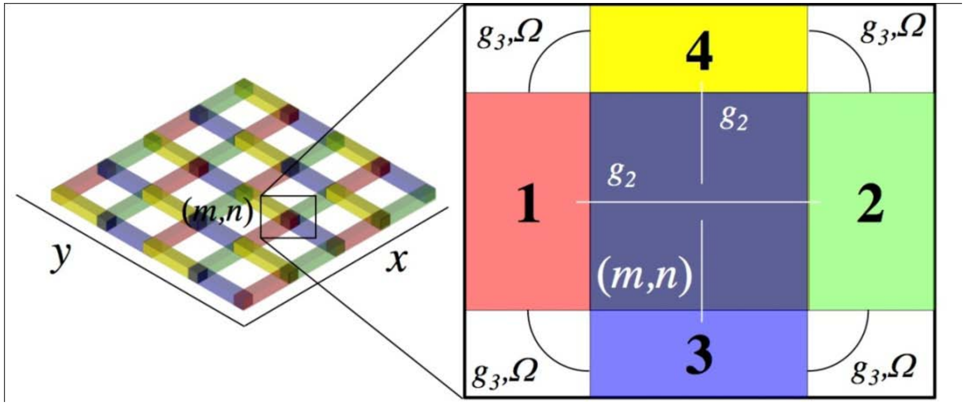
$$\to |\ell, m\pm 1\rangle \;\; \text{for} \;\; \ell \to \infty, \;\; (\ell = \text{total number}/2)$$

3. mass, density の変化で相転移の可能性あり
   実験でどのように見えるのか？

4.格子ゲージ理論：Gauge-Higgs model

◇BEC on link = compact U(1) gauge boson

E. Zohar and B. Reznik, Phys. Rev. Lett. 107, 275301 (2011).（他多数）
K. Kasamatsu, I. Ichinose, and T. Matsui, arXiv:1212.4952, P.R.L. (in press)



4種類の BEC Ψ_k

Ω = Rabi effect

$$g_k = \text{interactions}\ (k = 1, \cdots, 4)$$

$$H_{kl}(\mathbf{x}) = \Psi_k^\dagger(\mathbf{x})\left[\delta_{kl}\left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V_k(\mathbf{x})\right) + \Omega_{kl}\right]\Psi_l(\mathbf{x}) + \frac{g_{lkl}}{2}\Psi_k^\dagger(\mathbf{x})\Psi_l^\dagger(\mathbf{x})\Psi_l(\mathbf{x})\Psi_k(\mathbf{x})$$

振幅と位相の分離 $\hat{\Psi}_{ri} = \sqrt{\hat{\rho}_{ri}}\; e^{i\hat{\theta}_{ri}}, \quad \hat{\rho}_{ri} = \rho_0 + \hat{\eta}_{ri}$

平均値　揺らぎ

$\{\hat{\eta}_{ri}, \quad \hat{\theta}_{ri}\}, \quad \text{conjugate variables}$

$\uparrow$

Electric field

potential = 電場の項

$$\hat{H}_a = \frac{1}{2\gamma^2}\sum_r\left(\sum_i \nabla_i \hat{\eta}_{ri}\right)^2 + V_0 \sum_{r,\,i} \hat{\eta}_{ri}^2 + \hat{H}_L\left(\left\{\hat{\theta}_{ri}\right\}\right)$$

$g_k - \text{terms}$　　Rabi terms

$$\hat{H}_L\left(\left\{\hat{\theta}_{ri}\right\}\right) = 2g'\rho_0 \sum_{r,\, i<j}\left[\cos\left(\hat{\theta}_{ri} - \hat{\theta}_{rj}\right) + \cos\left(\hat{\theta}_{ri} + \hat{\theta}_{r+i,j}\right) + \cos\left(\hat{\theta}_{r+i,j} - \hat{\theta}_{r+j,\, i}\right) + \cos\left(\hat{\theta}_{rj} + \hat{\theta}_{r+j,\, i}\right)\right]$$

ここで　$\gamma^2 \to 0 \quad \Rightarrow$　Gauss law (gauge inv.) の出現

fine tunning！

◇経路積分による Gauss law

$$\tilde{G} = \prod_x \exp\left[\left(-\frac{\Delta\tau}{2\gamma^2}\right) Q_x^2\right] \qquad Q_x \equiv \sum_i \nabla_i \eta_{xi}$$

$$\cong \int_0^{2\pi} \prod_x \frac{d\theta_{x4}}{2\pi} \exp\left(\frac{\gamma^2}{\Delta\tau}\cos\theta_{x4} - i\theta_{x4}\sum_i \nabla_i \eta_{xi}\right)$$

compact U(1)

☆一般化されたAction （ η_{xi} 積分の実行）

$$Z_a = \int [dU] \exp\left(A_\mathrm{I} + A_\mathrm{P} + A_\mathrm{L}\right)$$

$$A_\mathrm{I} = \sum_{x,\ \mu} c_{1\mu} \cos\theta_{x\mu},$$

$$A_P = \sum_{x,\ \mu<\nu} c_{2\mu\nu} \cos\left(\nabla_\mu \theta_{x\nu} - \nabla_\nu \theta_{x\mu}\right),$$

← plaquette 項

$$A_\mathrm{L} = \sum_{x,\ \mu<\nu} c_{3\mu\nu}\Big[\cos\left(\theta_{x\mu} - \theta_{x\nu}\right) + \cos\left(\theta_{x\mu} + \theta_{x+\mu,\nu}\right)$$

$$+ \cos\left(\theta_{x+\mu,\nu} - \theta_{x+\nu,\mu}\right) + \cos\left(\theta_{x\nu} + \theta_{x+\nu,\mu}\right)\Big]$$

$\gamma^2 \to 0$ limit ⟶ gauge-inv. subspace

γ^2 が finite ⟹ **Gauge symmetry breaking**
→ Higgs coupling と解釈出来る

☆ Higgs field $\phi_x = e^{i\varphi_x}$

$$Z_{\mathrm{GH}} = \int [d\phi][dU] \exp\left(A_{\mathrm{I}}' + A_{\mathrm{P}} + A_{\mathrm{L}}'\right)$$

$$A_{\mathrm{I}}' = \sum_{x,\ \mu} c_{1\mu} \cos\left(\varphi_x + \theta_{x\mu} - \varphi_{x+\mu}\right),$$

$$A_L' = \sum_{x,\ \mu<\nu} c_{3\mu\nu}\Big[\cos\left(\varphi_{x+\nu} + \theta_{x\mu} - \theta_{x\nu} - \varphi_{x+\mu}\right) + \cos\left(\varphi_x + \theta_{x\mu} + \theta_{x+\mu,\nu} - \varphi_{x+\mu+\nu}\right)$$
$$\cos\left(\varphi_{x+\mu} + \theta_{x+\mu,\nu} - \theta_{x+\nu,\mu} + \varphi_{x+\nu}\right) + \cos\left(\varphi_x + \theta_{x\nu} + \theta_{x+\nu,\mu} - \varphi_{x+\nu+\mu}\right)\Big],$$

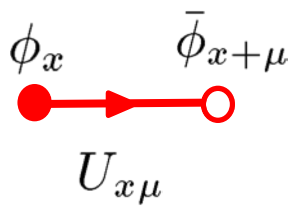
Higgs field の導入により厳密なゲージ不変性が現れる
Gauge fixing により元の系に戻る

一般のU(1)ゲージ・ヒッグスモデル

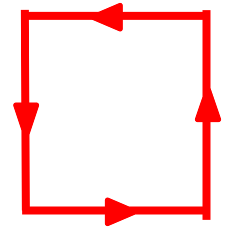
$$Z_{\rm IL} = \int [d\phi][dU] \exp A_{\rm IL}(\{U_{x\mu}\},\{\phi_x\}), \quad A_{\rm IL} = A_{\rm I} + A_{\rm L},$$

$$A_{\rm L} = \sum_{x,\mu<\nu} c_{3\mu\nu}\Big[\cos(\varphi_{x+\nu} + \theta_{x\mu} - \theta_{x\nu} - \varphi_{x+\mu}) + 3 \text{ terms}\Big].$$

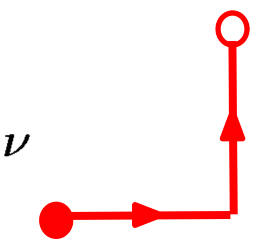
$A_{\rm IL} = c_{1\mu}$



$+\ c_{2\mu\nu}$



$+\ c_{3\mu\nu}$



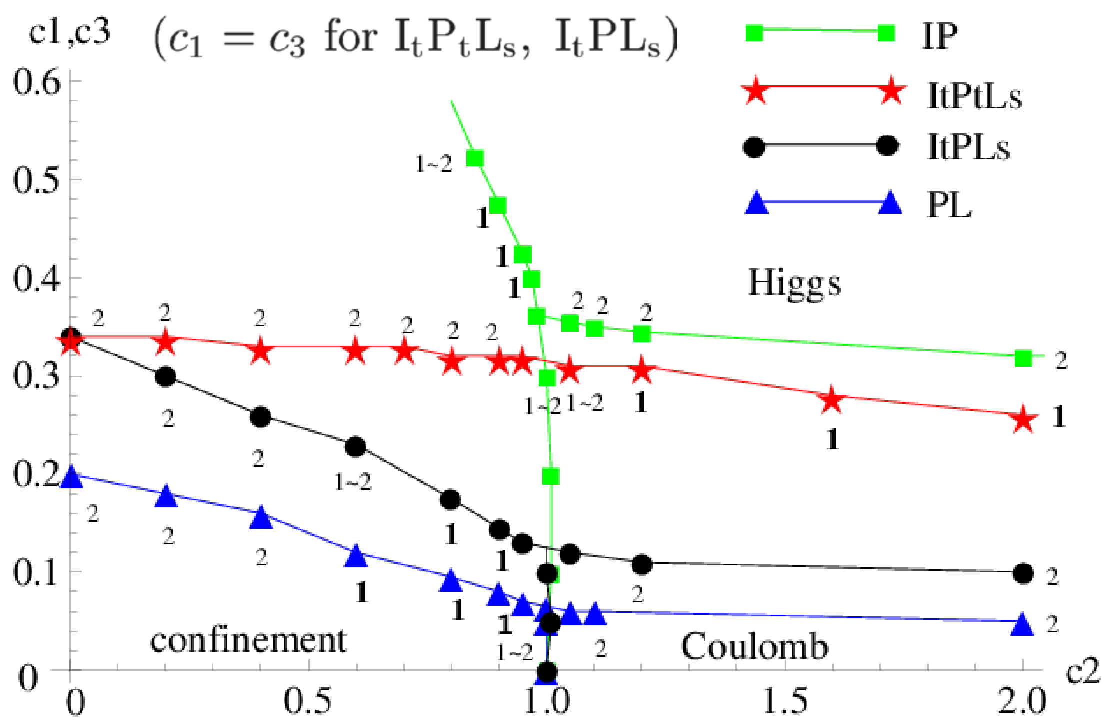
c_{1i} 項の生成： スピン多重項 (a_{ri}, ψ_{ri}) をもつ原子による結合
$\hat{H}_{a\psi} = \kappa \sum_{ri} \hat{a}^{\dagger}_{ri}\hat{\psi}_{ri} + {\rm H.c.}$ もし $\hat{a}_{ri}$ が十分高温で BEC すると $\hat{a}_{ri}$ は ψ_{ri} に対する BEC reservoir: $\hat{H}_{a\psi} \to \sum_{r,i} c_{1i}\cos\theta_{ri}$ ($c_{1i} = 2\kappa|\langle a_{ri}\rangle|\sqrt{\rho_o}$).

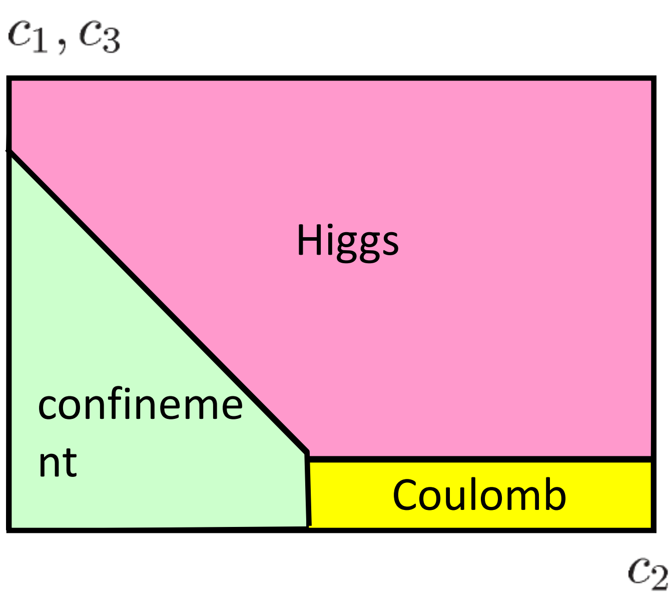
A. Recati, et al. Phys. Rev. Lett. 94, 040404 (2005)

U(1)ゲージ･ヒッグスモデルの相構造

1

Model		c_{14}	c_{1i}	c_{2i4}	c_{2ij}	c_{3i4}	c_{3ij}
IP	■	c_1	c_1	c_2	c_2	0	0
ItPtLs	★	c_1	0	c_2	0	0	c_3
ItPLs	●	c_1	0	c_2	c_2	0	c_3
PL	▲	0	0	c_2	c_2	c_3	c_3





U(1)LGT$(c_1, c_3 = 0)$ では
confinement, Coulomb 相が実現。
ゲージ対称性を破る項（c_1, c_3 項）
があっても Higgs 相にならない限り
破れの効果は本質的でない

U(1)ゲージ・ヒッグスモデルの相と密度分布

相	$\langle\phi_x\rangle$	$\langle U_{x\mu}\rangle$	$V(r)$
Higgs	$\neq 0$	$\neq 0$	$\frac{e^{-mr}}{r}$
Coulomb	~ 0	$\neq 0$	$\frac{1}{r}$
confinement	~ 0	~ 0	r

Higgs 相，Coulomb 相 $\leftrightarrow$BEC

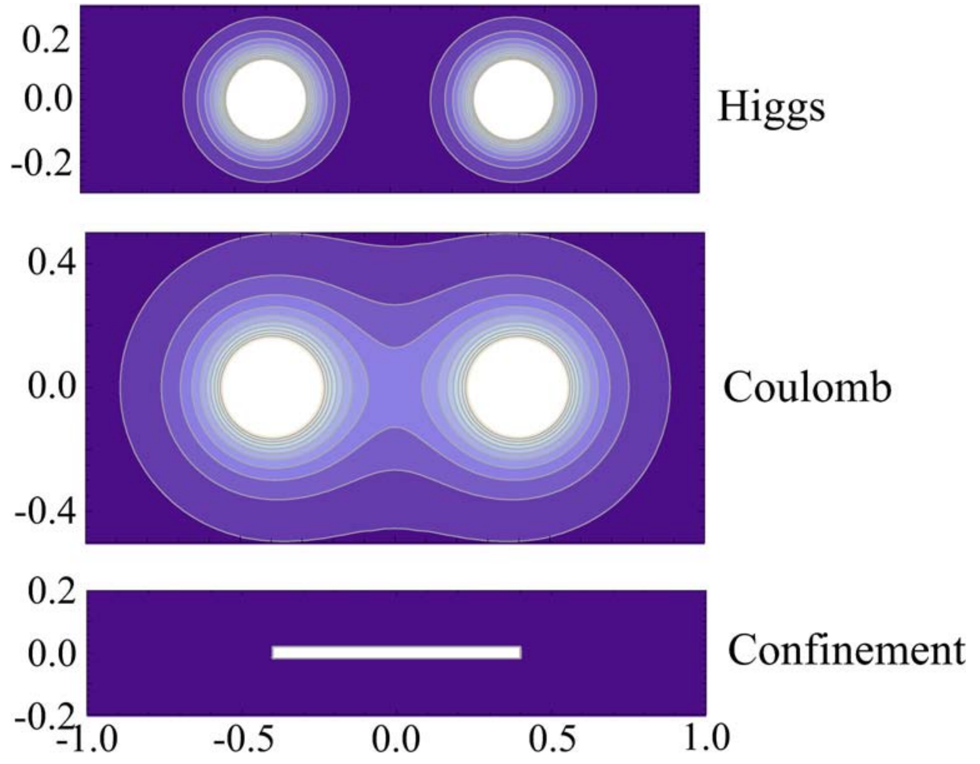
static source = 光学格子potential の変形

位相の測定も可能か？

・・・ <u>磁場の測定</u>

<u>電場の測定</u>

原子密度 $\hat{\psi}^{\dagger}_{ri}\hat{\psi}_{ri} = \rho_0 + \hat{\eta}_{ri}$, $\hat{\eta}_{ri} = -\hat{E}_{ri}$



各相での原子の典型的な密度分布

$\Delta\rho_r = (\sum_i \eta^2_{ri}/3)^{1/2}$ (白：$\Delta\rho_r \to$ 大)

５. まとめと将来の展望

１. 実験技術の向上により、提案された種々の
格子モデルは実現可能となるであろう。

２. ゲージ理論としてはgauge-Higgs model が最初か？

３. Local gauge symmetry 実現への良いidea 募集

４. 実験的には温度のコントロールが望まれる

５. 時間とともに起る量子相転移の観測の期待

６. 有限密度 gauge- fermion系の実現