ウィルソン繰り込み群におけるカイラルアノマリーについて

佐藤雅尚 (新潟大学)

五十嵐尤二 (新潟大学)
伊藤克美 (新潟大学)
園田英徳 (神戸大学)

熱場の量子論とその応用 2010

Introduction & Summary

- 強結合理論など, 非摂動的な効果が本質的な現象や理論において, Wilson 繰り込み群 (ERG) が良い理解をもたらすと考えられている.
- 一方, cutoff 正則化はナイーブにはゲージ対称性と競合する. どのようにゲージ対称性を実現するかという問題は, Wilsonian RG のもっとも重要な問題のひとつ.

ひとつのアプローチとして, ERG 上でスケールごとに変形された対称性 (“Modified symmetry”) を議論するという方向性がある.
ここでは,

- Ward-Takahashi operator を導入し, ERG 上で対称性 (Modified symmetry) を議論することができる

ことを紹介する.
また

- Wilson-Polchinski RG の枠組みにおいて, non-Abelian chiral gauge anomaly が Ward-Takahashi oprator に含まれる形で現れる

のを見る.

Wilsonian RG (1): 基本的なアイデア

高運動量モード (ϕ_{high}) で伝搬される相関を “integrate out” して
低運動量モード (ϕ_{low}) の effective theory を定義する.

$$
\begin{aligned}
Z &= \int \overbrace{\prod_p d\phi_p}^{\mathcal{D}\phi} \; e^{-S[\phi]} \\
&= \int \overbrace{\prod_{p<\Lambda} d\phi_p}^{\mathcal{D}\phi_{\text{low}}} \left(\int \overbrace{\prod_{p>\Lambda} d\phi_p}^{\mathcal{D}\phi_{\text{high}}} \; e^{-S[\phi_{\text{low}}+\phi_{\text{high}}]} \right) \\
&\equiv \int \mathcal{D}\phi_{\text{low}} \; e^{-S_{\text{eff}}[\phi_{\text{low}}]}
\end{aligned}
$$

$S_{\text{eff}}[\phi_{\text{low}}]$: Wilsonian effective action
(generating functional of amp. conn. cutoff Green functions)

Wilsonian RG (2): いくつかの formulation

- Wegner-Houghton equation — Sharp cutoff, Wilson effective action
- Polchinski equation — Smooth cutoff, Wilson effective action
- Wetterich equation — 1PI effective action

ここでは local symmetry を考えたいので, Polchinski による formulation を用いる.

Wilson-Polchinski RG (1): UV theory の定義

一般的な分配関数:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \, \exp\Big[-S[\phi] + J \cdot \phi\Big] ,$$
$$S[\phi] = \frac{1}{2}\phi \cdot D \cdot \phi + S_I[\phi]$$

ただし以下の compact notation を用いる:

$$J \cdot \phi = J_A \phi^A = \int_x J_A(x) \, \phi^A(x) ,$$
$$\phi \cdot D \cdot \phi = \phi^A D_{AB} \phi^B = \int_x \phi^A(x) \, D_{AB}(x,y) \, \phi^B(y) , \qquad \text{etc.}$$

Wilson-Polchinski RG (1): UV theory の定義

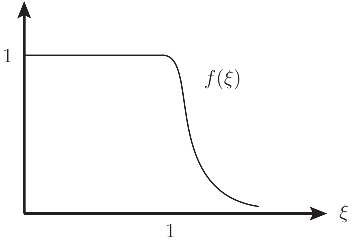
UV scale Λ_0 での cutoff regularization を導入:

$$Z^{\Lambda_0}[J] = \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left[-S^{\Lambda_0}[\phi] + K_{\Lambda_0}^{-1} J \cdot \phi\right],$$

$$S^{\Lambda_0}[\phi] = \frac{1}{2}\phi \cdot \frac{D}{K_{\Lambda_0}} \cdot \phi + S_I^{\Lambda_0}[\phi]$$

ここで $K_{\Lambda_0}(p) = f\left(\frac{|p|^2}{\Lambda_0^2}\right)$

: smooth cutoff function at Λ_0



→ cutoff free propagator: $K_{\Lambda_0}(p)\, D^{-1}(p)$

Wilson-Polchinski RG (2): Integrating out

IR thory:

$$Z^{\Lambda}[J] = \int \mathcal{D}\Phi \ \exp\left[-S^{\Lambda}[\Phi] + K_{\Lambda}^{-1} J \cdot \Phi\right],$$

$$S^{\Lambda}[\Phi] = \frac{1}{2}\Phi \cdot \frac{D}{K_{\Lambda}} \cdot \Phi + S_{I}^{\Lambda}[\Phi]. \qquad (\Phi : \text{IR field})$$

ここで Wilson effective action:

$$\exp -S_{I}^{\Lambda}[\Phi] = \int \mathcal{D}\tilde{\phi} \ \exp\left[-\frac{1}{2}\tilde{\phi} \cdot \tilde{D} \cdot \tilde{\phi} - S_{I}^{\Lambda_0}[\Phi + \tilde{\phi}]\right],$$

$$\tilde{D} := \frac{D}{\tilde{K}}, \quad \tilde{K} := K_{\Lambda_0} - K_{\Lambda}. \qquad (\tilde{D}^{-1} : \text{UV propagator}, \ \tilde{\phi} : \text{UV field})$$

また Z^{Λ} は Z^{Λ_0} と以下の関係にある:

$$Z^{\Lambda_0}[J] = N_J \ Z^{\Lambda}[J], \quad \ln N_J = -\frac{1}{2} J_A \left((-)^B \frac{\tilde{K}}{K_{\Lambda_0} K_{\Lambda}} D^{-1}\right)^{AB} J_B.$$

Wilson-Polchinski RG (3): Composite operators

UV theory に対して与えられた operator $\mathcal{O}[\phi]$ に対して, IR theory に対する operator $[\mathcal{O}]_\Lambda[\Phi]$ が

$$\left\langle \mathcal{O} \right\rangle_{S^{\Lambda_0}, K_{\Lambda_0}^{-1} J} = N_J \left\langle [\mathcal{O}]_\Lambda \right\rangle_{S^\Lambda, K_\Lambda^{-1} J} \qquad (\forall J)$$

と定義される ("Composite Operator"). ここで

$$\left\langle \mathcal{O} \right\rangle_{S^{\Lambda_0}, K_{\Lambda_0}^{-1} J} = \int \mathcal{D}\phi\, \mathcal{O}[\phi] \exp\left[-S^{\Lambda_0} + K_{\Lambda_0}^{-1} J \cdot \phi\right] = \mathcal{O}\left[K_{\Lambda_0} \frac{\partial^l}{\partial J}\right] Z^{\Lambda_0}$$

の記号を用いた.
これは先ほどの関係 $Z^{\Lambda_0} = N_J Z^\Lambda$ を用いて計算できる. 例えば

- $[\Phi^A]_\Lambda = \Phi^A - \left(\tilde{D}^{-1}\right)^{AB} \dfrac{\partial^l}{\partial \Phi^B} S_I^\Lambda$
- $[\Phi^A \Phi^B]_\Lambda = [\Phi^A]_\Lambda [\Phi^B]_\Lambda - \left(\tilde{D}^{-1}\right)^{AC} \dfrac{\partial^l}{\partial \Phi^C} \cdot \left(\tilde{D}^{-1}\right)^{BD} \dfrac{\partial^l}{\partial \Phi^D} \cdot S_I^\Lambda$

Ward-Takahashi operator

関数空間の勝手な変数変換 $\phi \to \phi + \delta\phi \cdot \lambda$ に対して, 汎関数積分 Z は不変:

$$0 = \delta Z = \int \mathcal{D}\phi \left[J \cdot \delta\phi \underbrace{\underbrace{- \delta S}_{\text{action}} + \underbrace{\frac{\partial^r}{\partial\phi^A}\delta\phi^A}_{\text{measure}}}_{\equiv -\Sigma} \right] \exp\left(-S[\phi] + J \cdot \phi\right)$$

ここで Ward-Takahashi operator (WT op.):

$$\Sigma[\phi] := \delta S - \frac{\partial^r}{\partial\phi^A}\delta\phi^A$$

を定義した．これを用いて,

$\Sigma = 0$ (WT identity) $\Leftrightarrow$ δ はこの量子系の対称性

Ward-Takahashi operator

関数空間の勝手な変数変換 $\phi \to \phi + \delta\phi \cdot \lambda$ に対して, 汎関数積分 Z は不変:

$$0 = \delta Z = \int \mathcal{D}\phi \left[J \cdot \delta\phi \underbrace{\underbrace{- \delta S}_{\text{action}} + \underbrace{\frac{\partial^r}{\partial \phi^A} \delta\phi^A}_{\text{measure}}}_{\equiv -\Sigma} \right] \exp\left(-S[\phi] + J \cdot \phi\right)$$

ここで Ward-Takahashi operator (WT op.):

$$\Sigma[\phi] := \delta S - \frac{\partial^r}{\partial \phi^A} \delta\phi^A$$

を定義した．これを用いて,

$$\Sigma \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \text{ はこの量子系の対称性ではない}$$

($\rightsquigarrow$ anomaly)

composite op. としての Ward-Takahashi operator (“Modified Symmetry”)

UV theory で “BRS” 変換が与えられると, その WT op. が定義される:

- $\delta\phi^A := K_{\Lambda_0} {R_{\Lambda_0}}^A[\phi] = K_{\Lambda_0} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} R^A_{B_1 \dots B_k} \phi^{B_1} \dots \phi^{B_k}$
- $\Sigma^{\Lambda_0}[\phi] = \left(\frac{\partial^r S^{\Lambda_0}}{\partial\phi^A} - \frac{\partial^r}{\partial\phi^A} \right) \delta\phi^A$

composite op. としての Ward-Takahashi operator (“Modified Symmetry”)

UV theory で “BRS” 変換が与えられると, その WT op. が定義される:

- $\delta\phi^A := K_{\Lambda_0} R_{\Lambda_0}{}^A[\phi] = K_{\Lambda_0} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} R^A_{B_1 \ldots B_k} \phi^{B_1} \ldots \phi^{B_k}$
- $\Sigma^{\Lambda_0}[\phi] = \left(\frac{\partial^r S^{\Lambda_0}}{\partial \phi^A} - \frac{\partial^r}{\partial \phi^A} \right) \delta\phi^A$

$\wr$ (RG flow)

すると, IR theory における 変換と WT op. が以下のように決まる:

- $\delta\Phi^A := K_\Lambda R_\Lambda{}^A[\phi] = K_\Lambda \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} R^A_{B_1 \ldots B_k} \left[\Phi^{B_1} \ldots \Phi^{B_k} \right]_\Lambda$ ← composite op.
- $\Sigma^\Lambda[\phi] = \left(\frac{\partial^r S^\Lambda}{\partial \Phi^A} - \frac{\partial^r}{\partial \Phi^A} \right) \delta\Phi^A$

Ward-Takahashi operator とアノマリー (1)
non-Abelian anomaly on Wilson-Polchinski RG

具体例として chiral gauge theory ($G_L \times G_R$ YM theory) における non-Abelian anomaly が WT op. に含まれていることを

- S_I^{Λ} の摂動展開によって
- $\Lambda_0 \to \infty$ かつ $\Lambda \to \Lambda_0$ の極限で

確認する.

Ward-Takahashi operator とアノマリー (1)
non-Abelian anomaly on Wilson-Polchinski RG

具体例として chiral gauge theory ($G_L \times G_R$ YM theory) における non-Abelian anomaly が WT op. に含まれていることを

- S_I^Λ の摂動展開によって
- $\Lambda_0 \to \infty$ かつ $\Lambda \to \Lambda_0$ の極限で

確認する.

Σ^Λ の中の anomalous な寄与のみを見る:

1. fermion measure の Jacobian からの寄与 (cf. Fujikawa)
2. ghost C の一次項
3. γ_5-trace (ϵ tensor) を含む
4. $O(\hbar^1)$
5. $\Lambda \to \infty$ で non-vanishing

Ward-Takahashi operator とアノマリー (2)
Chiral gauge theory

- 以下の classical action を考える ($G^+ \times G^-$ YM theory)

$$S[\phi] = -\bar{\psi} \cdot \mathrm{i}\, \not{D} \cdot \psi \quad \left(+ S_{\mathrm{YM}} + S_{\mathrm{GF+FP}} \right)$$

ここで

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu \,,$$
$$A_\mu = A_\mu^+ P_+ + A_\mu^- P_- \qquad \left(A_\mu^\pm = A_\mu^{\pm a} T_a^\pm \,, \quad T_a^\pm \in \mathfrak{g}^\pm \right) \,,$$
$$P_\pm = \tfrac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$$

- これは以下の BRS transformation で不変:

$$\delta\psi = C\psi \,, \quad \delta\bar{\psi} = \bar{\psi}\tilde{C} \,, \quad \delta A_\mu = D_\mu C \,, \quad \ldots$$

ここで

$$C = C^+ P_+ + C^- P_- \qquad \text{and} \qquad \tilde{C} = C^+ P_- + C^- P_+$$

Ward-Takahashi operator とアノマリー (2)
Chiral gauge theory

$\wr$

- UV action:

$$S^{\Lambda_0}[\phi] = -\bar{\psi} \cdot \frac{\mathrm{i}\,\not\partial}{K_{\Lambda_0}} \cdot \psi - \bar{\psi} \cdot \mathrm{i}\,\not A \cdot \psi \quad \left(+ S^{\Lambda_0}_{\mathrm{YM}} + S^{\Lambda_0}_{\mathrm{GF+FP}} + \text{higher} \right)$$

- UV BRS trf.:

$$\delta\psi = K_{\Lambda_0} C\psi\,, \quad \delta\bar{\psi} = K_{\Lambda_0}\bar{\psi}\tilde{C}\,, \quad \ldots$$

$\wr$

- IR action

$$S^{\Lambda}[\phi] = -\bar{\Psi} \cdot \frac{\mathrm{i}\,\not\partial}{K_{\Lambda}} \cdot \Psi - S^{\Lambda}_{I}[\phi]$$

- IR BRS trf.

$$\delta\Psi = K_{\Lambda}\,[C\Psi]_{\Lambda}\,, \quad \delta\bar{\Psi} = K_{\Lambda}\,[\bar{\Psi}\tilde{C}]_{\Lambda}\,, \quad \ldots$$

Ward-Takahashi operator とアノマリー (3)

Anomaly in WT operator

IR WT op. ($\Lambda_0 \to \infty$) :

$$\Sigma^\Lambda \ni \mathrm{Tr}\left[\frac{\partial^r}{\partial\Psi}\delta_\Lambda\Psi + \frac{\partial^r}{\partial\bar{\Psi}}\delta_\Lambda\bar{\Psi}\right] \qquad \leftarrow \text{fermion measure}$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\frac{\partial^r}{\partial\Psi}\cdot K_\Lambda\, [C\Psi]_\Lambda + \frac{\partial^r}{\partial\bar{\Psi}}\cdot K_\Lambda\, [\bar{\Psi}\tilde{C}]_\Lambda\right]$$

$$\ni \mathrm{Tr}\left[\frac{\partial^r}{\partial\Psi}\cdot K_\Lambda\ \cdot C\cdot\left(\tilde{D}^{-1}\right)^{\Psi A}\frac{\partial^l S_I^\Lambda}{\partial\Phi^A} + \frac{\partial^r}{\partial\bar{\Psi}}\cdot K_\Lambda\ \cdot\left(\tilde{D}^{-1}\right)^{\bar{\Psi}B}\frac{\partial^l S_I^\Lambda}{\partial\Phi^B}\cdot\tilde{C}\right]$$

$\cdots$ ↖ by ghost degree

$$= \int_{pq}\mathrm{tr}\left[C(p-q)\cancel{U}(-p,q)\frac{\partial^l\partial^r S_I^\Lambda}{\partial\bar{\Psi}(-q)\partial\Psi(p)}\right]$$

where

$$\cancel{U}(-p,q) := K_\Lambda(p)\tilde{\cancel{S}}(q) - \tilde{\cancel{S}}(p)K_\Lambda(q) \quad \text{and} \quad \tilde{\cancel{S}}(p) := \frac{\tilde{K}_\Lambda(p)\cancel{p}}{|p|^2}$$

↑ UV fermion propagator

Ward-Takahashi operator とアノマリー (3)
Anomaly in WT operator

S_I^Λ の中で $\left\{ O(\hbar^0) \ \ \& \ \ \Lambda \to \infty \right.$ で non-vanishing $\left.\right\}$ な寄与:

$$\frac{\partial^l \partial^r S_I^\Lambda}{\partial \bar{\Psi}(-q) \partial \Psi(p)}$$

$$\ni \sum_{H=\pm} \Bigg[\int_{\substack{k_1,k_2 \\ p+q+k_1+k_2=0}} \left(-\mathrm{i}\, A^H_{\substack{k_2\\ \mu_2}} \gamma^{\mu_2} P_H\right) \tilde{\mathcal{S}}_{k_1+p} \left(-\mathrm{i}\, A^H_{\substack{k_1\\ \mu_1}} \gamma^{\mu_1} P_H\right)$$

$$+ \int_{\substack{k_1,k_2,k_3 \\ p+q+k_1+k_2+k_3=0}} \left(-\mathrm{i}\, A^H_{\substack{k_3\\ \mu_3}} \gamma^{\mu_3} P_H\right) \tilde{\mathcal{S}}_{k_2+k_1+p} \left(-\mathrm{i}\, A^H_{\substack{k_2\\ \mu_2}} \gamma^{\mu_2} P_H\right) \tilde{\mathcal{S}}_{k_1+p} \left(-\mathrm{i}\, A^H_{\substack{k_1\\ \mu_1}} \gamma^{\mu_1} P_H\right)$$

(∼ ゲージ場の 3 次項まで)

Ward-Takahashi operator とアノマリー (3)
Anomaly in WT operator

この S_I^Λ を Σ^Λ の表式に挿入して

1. $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ を含む寄与のみを取り出した後
2. $\Lambda \to \infty$ すると,

$$\Sigma^{\Lambda\to\infty} \ni \frac{-1}{24\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sum_{H=\pm}\epsilon^H \int_x \mathrm{tr}\left[C^H\left(\partial_\mu A_\nu^H\cdot\partial_\rho A_\sigma^H + \frac{1}{2}\partial_\mu(A_\nu^H A_\rho^H A_\sigma^H)\right)\right]$$

$$= \sum_{H=\pm}\left(-\frac{\epsilon^H}{24\pi^2}\right)\int \mathrm{tr}\left[C^H\,\mathrm{d}\left(A^H\,\mathrm{d}A^H + \frac{1}{2}\left(A^H\right)^3\right)\right]$$

$$(\ \epsilon^\pm = \pm 1\ )$$

∼ 通常の (Euclidean) 4-dim. non-Abelian anomaly

Summary

- WT op. を composite op. として構成することで, Wilson 繰り込み群上で対称性 (Modified symmetry) を議論することができる.
- Wilson-Polchinski RG の枠組みにおいて chiral gauge theory に対する WT op. を $\Lambda_0 \to \infty$ かつ $\Lambda \to \infty$ の極限で計算し, 通常の non-Abelian anomaly の形を再現することを確認した.