

熱的Schwinger-Dyson方程式から得られる  
Boltzmann-like方程式の解析

---

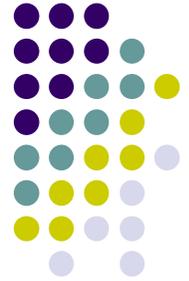
2010年8月31日(火)

基研研究会「熱場の量子論とその応用」

水谷 友一, 稲垣 知宏

広大理, 広大総

# 導入



- ◆ 時間発展に関わる高エネルギー物理現象：  
粒子生成, 宇宙膨張に伴う熱的分布の変化 等



相対論的場の量子論によって記述される非平衡現象

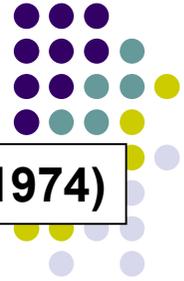
➡ 緩和過程: Boltzmann 方程式

- ◆ On-Shell 近似: 散乱過程のOn-Shell mode のみ取り出す.  
——→ 緩和過程に対するOff-Shell mode の寄与?

## ◆ 目的

非平衡Thermo Field Dynamics を  $\lambda \phi^4$  相互作用模型  
に適用して得られるBoltzmann-like 方程式の下で, On-Shell 近似  
による緩和とOff-Shell modeを含む緩和との比較を行う.

# Thermo Field Dynamics



Y.Takahashi and H.Umezawa (1974)

- ◆ 振動子：チルダ振動子の導入

$$\{a, a^\dagger\} \rightarrow \{a, a^\dagger\}, \{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\},$$

- ◆ Thermal Bogoliubov 変換:  $\begin{pmatrix} \xi \\ \tilde{\xi}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + n_p & -n_p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix},$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{◆ 熱的真空状態: } \langle \theta | \xi^\dagger = \xi | \theta \rangle = 0, \\ \text{◆ } \phi^\alpha: \text{熱的二重項表現で展開した場} \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{◆ 伝播関数: } 2 \times 2 \text{ 行列,} \\ D(x-y)^{\alpha\beta} \equiv \langle \theta | T[\phi(x)^\alpha \bar{\phi}(y)^\beta] | \theta \rangle \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^\dagger \\ -\tilde{a} \end{pmatrix} \right] : \text{熱的二重項表現}$$

- ◆ 非平衡系への拡張

H.Umezawa and Y.Yamanaka (1992)

Thermal Bogoliubov parameter

熱的分布関数:  $n_p$ ,  $\longrightarrow$  時間に依存するパラメータ:  $n_p(t)$ ,



# スカラー4点相互作用模型

## ◆ ラグランジアン密度

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi(x))(\partial^\mu\phi(x)) - \frac{m^2}{2}\phi(x)^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi(x)^4,$$

## ◆ TFDで扱うラグランジアン密度

$\tilde{\mathcal{L}}(x)$ :  $\mathcal{L}(x)$  のチルダ共役

$$\longrightarrow \hat{\mathcal{L}}(x) \equiv \mathcal{L}(x) - \tilde{\mathcal{L}}(x),$$

### ・チルダ共役則

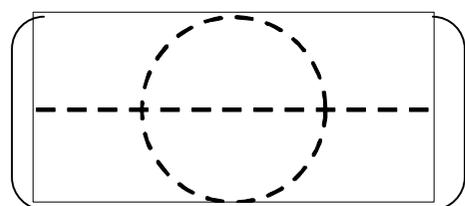
$[A_1, A_2 : \text{演算子}, c_1, c_2 : \text{c数}]$

$$(A_1 A_2)^\sim = \tilde{A}_1 \tilde{A}_2,$$

$$(c_1 A_1 + c_2 A_2)^\sim = c_1^* \tilde{A}_1 + c_2^* \tilde{A}_2,$$

$$(\tilde{A})^\sim = A.$$

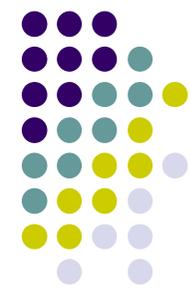
## ◆ 考慮した量子補正: 2-loopまで



Thermal index:

**2 × 2 行列構造**

# Boltzmann-like 方程式の導出



## ◆ Schwinger-Dyson 方程式

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \text{---} \\ \hline t_x \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline t_y \\ \beta \end{array} = \begin{array}{c} \alpha \\ \hline \text{---} \\ \hline t_x \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline t_y \\ \beta \end{array} + \begin{array}{c} \alpha \\ \hline \text{---} \\ \hline t_x \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline t_y \\ \beta \end{array}$$

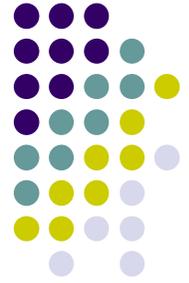
## ◆ 粒子数保存則が導かれる条件 L.Kadanoff, G.Baym (1962)

$$D_{0,x}^{-1} = \partial_x^2 + m^2,$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t_x \rightarrow t_y} B^{-1}(n_H(t_x)) D_{0,x}^{-1} \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline t_x \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline t_y \\ \beta \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline t_x \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline t_y \\ \beta \end{array} \right)^{\gamma_1 \gamma_2} B(n_H(t_y)) \\
 & - \lim_{t_x \rightarrow t_y} B^{-1}(n_H(t_x)) \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline t_x \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline t_y \\ \beta \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline t_x \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline t_y \\ \beta \end{array} \right)^{\gamma_1 \gamma_2} \overleftarrow{D}_{0,y}^{-1} B(n_H(t_y)) \\
 & = 0,
 \end{aligned}$$

## ◆ $\gamma_1 \neq \gamma_2$ で成り立つ恒等式

Bogoliubov parameter,  $\dot{n}_p(t) = \dots, \longrightarrow$  **Boltzmann-like 方程式**



# Boltzmann-like 方程式

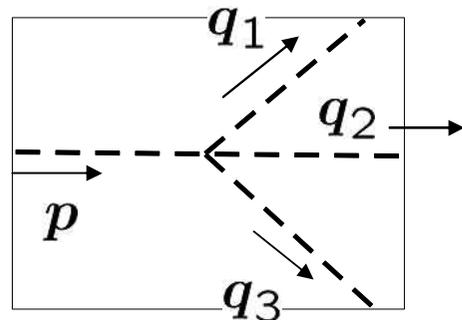
## ◆ 粒子数分布の時間発展方程式

$$\frac{\partial}{\partial t_x} n_p(t_x) = -\frac{\lambda^2}{3!} \int_{t_0}^{t_x} dt_s \int \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k_2}{(2\pi)^2} \frac{1}{8\omega_p \omega_{q_1} \omega_{q_2} \omega_{q_3}}$$

$$\times \left[ \cos\{(\omega_p - \omega_{q_1} - \omega_{q_2} - \omega_{q_3})(t_x - t_s)\} \right] \quad \text{Off-Shell モードも寄与する}$$

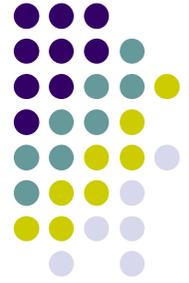
$$\times \left\{ n_{q_1}(t_s) n_{q_2}(t_s) n_{q_3}(t_s) + n_p(t_x) \left( n_{q_1}(t_s) n_{q_2}(t_s) n_{q_3}(t_s) - (1 + n_{q_1}(t_s))(1 + n_{q_2}(t_s))(1 + n_{q_3}(t_s)) \right) \right\} + \dots$$

## ◆ 4体Bose 粒子散乱過程



$$p = q_1 + q_2 + q_3,$$

# Boltzmann-like 方程式 (On-Shell 近似)



## ◆ On-Shell 近似

$$i\Sigma(t-t') = \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{1}{\underline{p_0} - \omega + i\varepsilon} e^{-ip_0(t-t')} F[n(t)]$$

$$\longrightarrow \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{1}{\underline{\omega_p} - \omega + i\varepsilon} e^{-ip_0(t-t')} F[n(t)] = \frac{1}{\omega_p - \omega + i\varepsilon} \delta^0(t-t') F[n(t)]$$

## ◆ Boltzmann-like 方程式

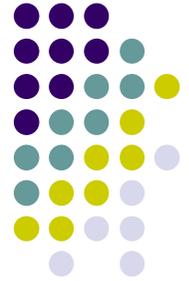
$$\frac{\partial}{\partial t_x} n_p(t_x) = -\frac{\lambda^2}{3!} \int_{t_0}^{t_x} dt_s \int \frac{d^2\mathbf{k}_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{k}_2}{(2\pi)^2} \frac{\pi}{8\omega_p\omega_{q_1}\omega_{q_2}\omega_{q_3}}$$

$$\times \left[ \delta^0(\underline{\omega_p - \omega_{q_1} - \omega_{q_2} - \omega_{q_3}}) \right]$$

$$\times \left\{ n_{q_1}(t_s) n_{q_2}(t_s) n_{q_3}(t_s) + n_p(t_x) \left( n_{q_1}(t_s) n_{q_2}(t_s) n_{q_3}(t_s) - (1 + n_{q_1}(t_s))(1 + n_{q_2}(t_s))(1 + n_{q_3}(t_s)) \right) \right\} + \dots$$

# 数値解析

$\left[ \mu : \text{任意の物理スケール} \right]$



◆ **Parameter:**  $D = 1 + 2$ ,  $\Lambda = 20\mu$ ,  $\lambda = 1.0\mu$ ,

◆ **始状態:** Bose 分布  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Bose mass, } m = 0.5\mu, \\ \text{Temperature, } T = 1.0\mu, \end{array} \right.$

時刻,  $t = 0$ , **Bose mass,  $m = 0.4\mu$ ,**

→ **熱平衡分布からのずれ**

◆  $n_{eq,p} \left( \begin{array}{l} \text{始状態と同じエネルギーを持つ} \\ m = 0.4\mu, \text{ の熱的 Bose 分布} \end{array} \right) \rightarrow \text{終状態の分布関数}$

$\delta n_p(t) \equiv n_p(t) - n_{eq,p}, \quad [T_{eq} = 0.988\mu,]$

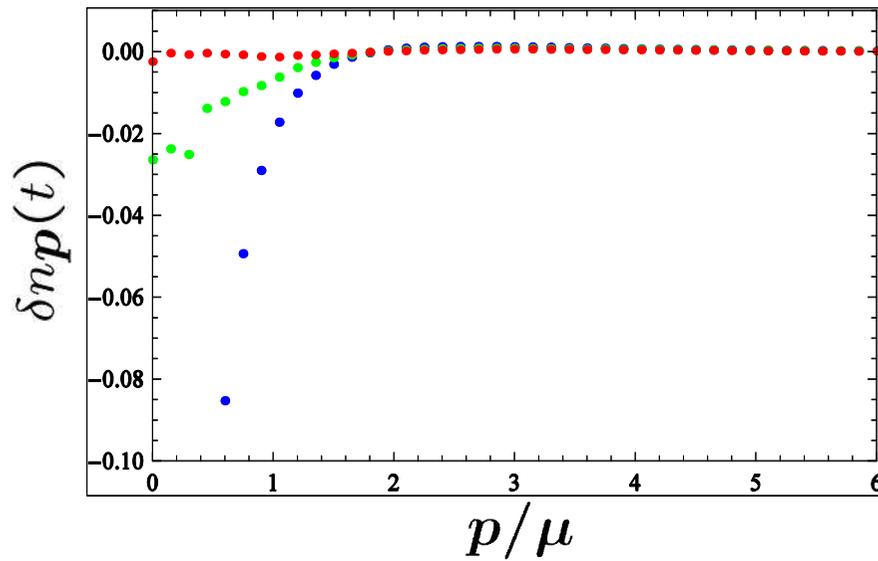
→  $\delta n_p(t)$  の時間発展を評価した.

# 粒子数分布の時間発展



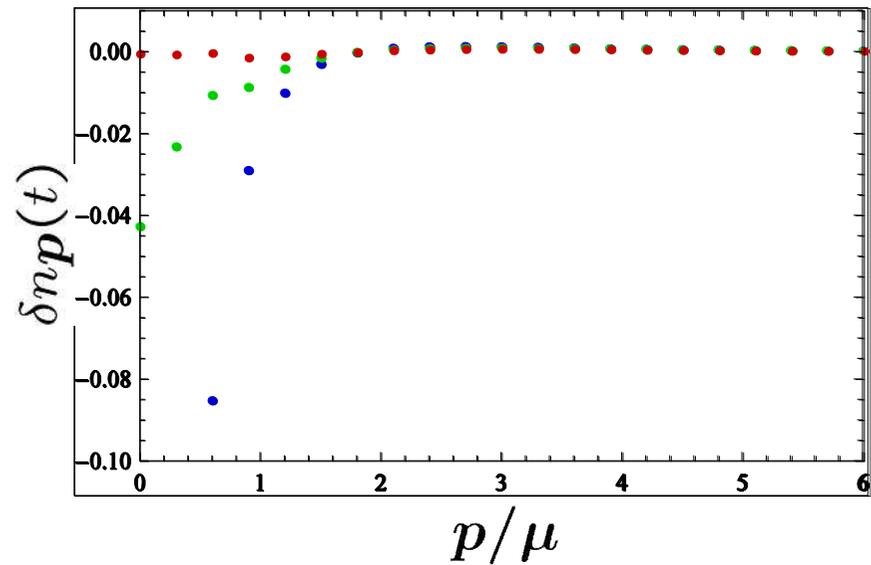
## ◆ On-Shell 近似による発展

- :  $t = 0$
- :  $t = 39.6\mu^{-1}$ ,
- :  $t = 102.8\mu^{-1}$ ,



## ◆ Off-Shell を含む発展

- :  $t = 0$
- :  $t = 40.5\mu^{-1}$ ,
- :  $t = 100.\mu^{-1}$ ,

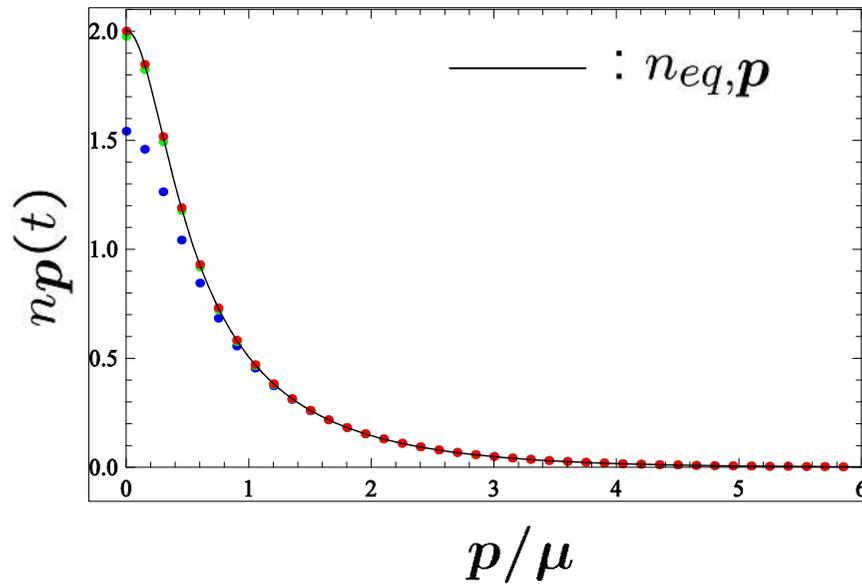


# 粒子数分布の時間発展



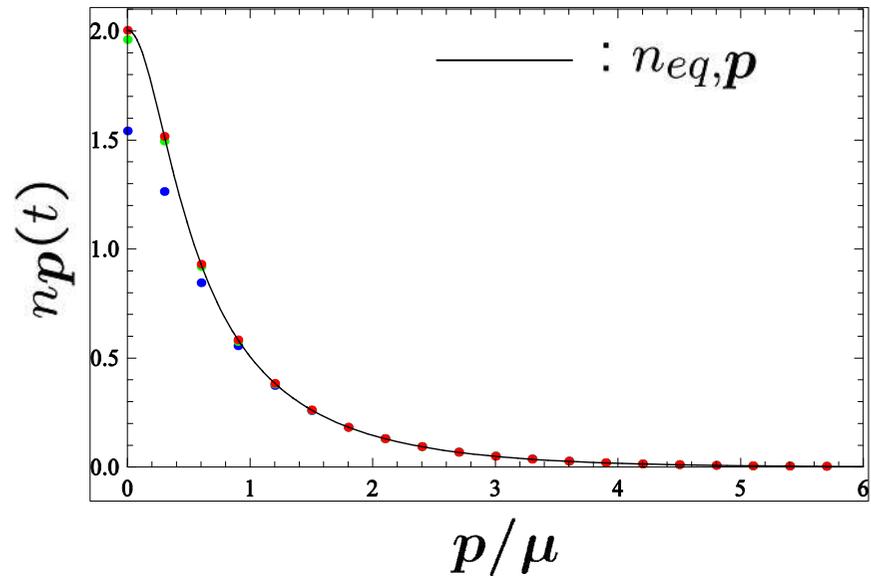
## ◆ On-Shell 近似による発展

- :  $t = 0$
- :  $t = 39.6\mu^{-1}$ ,
- :  $t = 102.8\mu^{-1}$ ,



## ◆ Off-Shell を含む発展

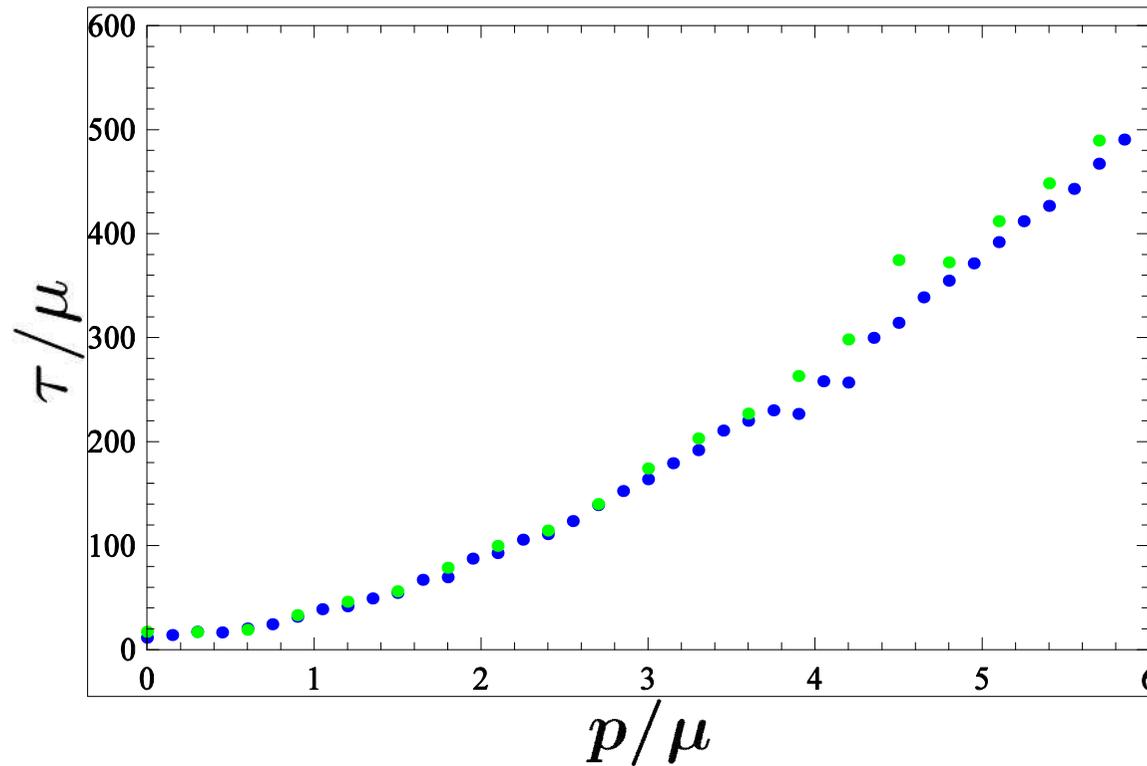
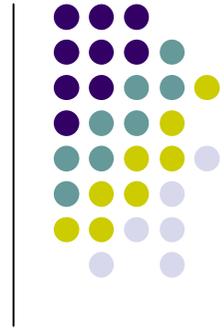
- :  $t = 0$
- :  $t = 40.5\mu^{-1}$ ,
- :  $t = 100.\mu^{-1}$ ,



- 
- ◆ 時間と共に熱平衡分布へ収束した.
  - ◆ Off-Shell mode を含む時間発展は, On-Shell 近似を課した場合と同様の振る舞いを示した.

# 緩和時間の比較

◆ 緩和時間:  $\tau \equiv -\frac{\delta n_p}{\delta \dot{n}_p}$ ,



— : On-Shell

— : Off-Shell



高運動量領域では, Off-Shell mode を含む発展方程式による緩和時間がより大きくなる傾向が見られた.

# まとめ



- ◆ 相対論的Scalar場を用いて, SD方程式よりBoltzmann-like方程式を導出し, 2-loopまでの量子補正にOn-Shell 近似を課した時間発展とOff-Shell の状態を含む時間発展との比較を行った.
- ◆ エネルギー保存解がある散乱過程では, On-Shell 近似を課した時間発展は, Off-Shell mode を取り入れた場合と同様の時間発展を示した.
- ◆ 高運動量領域では, Off-Shell mode を含むBoltzmann-like 方程式から得られた緩和時間は, On-Shell 近似を課した場合よりも大きくなる傾向が見られた.
- ◆ 課題
  - ◆ SD 方程式から導かれた条件と熱的真空状態の自己無撞着条件との関係.
  - ◆ 他の模型(Higgs, Yukawa模型)への適用.