

多成分中性原子ボース凝縮系における ゼロモードを含めた解析について

早大本庄高等学院
早大理工学研究所

峰 真如

2010年9月1日 @基研研究会「熱場の量子論とその応用」

共同研究者

早大先進理工物理

竹井 郁夫

早大理工学研究所

小林 恵太

早大基幹理工電子光システム

山中 由也

1. 背景
2. 目的
3. 方法
4. 2成分BECにおけるゼロモード
5. N 成分系への拡張
6. まとめと展望

1. 背景(1): Bose-Einstein Condensation (BEC)

Physical system

Trap potential

$$V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$$

$$na^3 \ll 1$$

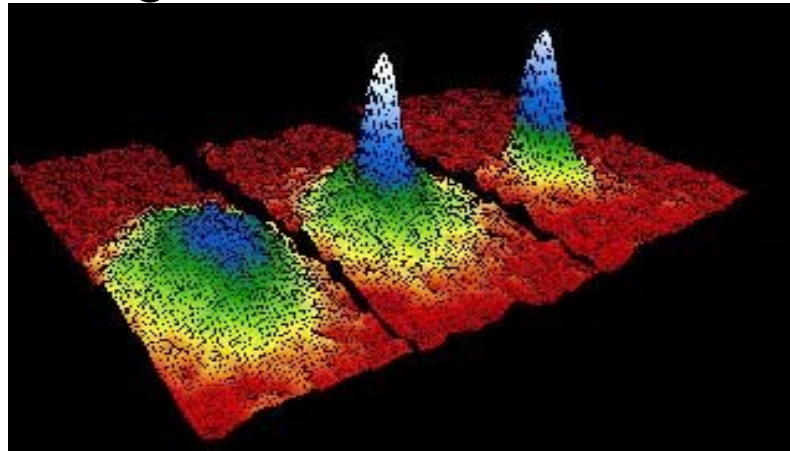
Interatomic potential

$$V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = g\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

n : particle density

a : scattering length

Fig: momentum distribution



High Temp.

Low Temp.

Cooling

Properties

- Atom: Rb, Na, etc.
- particle number:
 $10^3 \sim 10^6$
- size: $\sim \mu\text{m}$
- Transition temperature:
 $\sim \mu\text{K}$

<http://spot.colorado.edu/~cwieman/>

1. 背景(2): BECと場の理論

その他の特徴

- ・ 希薄(相互作用が小さい)
- ・ 制御可能性に富む(外場の形状, 原子間相互作用 g , 温度)



量子多体理論の検証の場として理想的



特に

場の理論

- ・ 量子相転移 ← 「自発的対称性の破れ」の機構
- ・ 摂動論など計算手法が整備

本研究の目的

中性原子BEC系を場の理論で記述する

(注: 並進対称性なし)

1. 背景(3): ゼロモード・多成分BEC

場の理論 → BECは位相変換が自発的に破れた系

↓
ゼロ・モード (南部・ゴールドストーンモード) が存在

└ 扱いが困難 (赤外発散)

→ 考慮されない現状 (集団励起で)

一方, この系のスペクトルは離散的 (トラップのため)

↓
ゼロ・モードを考慮する必要

└ 正準交換関係を保つ枠組み

Okumura and Yamanaka (2003),

MM, Koide, Okumura, Yamanaka (2006)

近年、多成分BECが成功

→ 相分離現象、texture structure (3Heとの関連)、量子情報への応用など、
興味深い現象！

多成分とは・・・原子種、超微細状態

2. 本研究の目的

多成分BECで、場の理論に基づく定式化を行う
→特に、ゼロ・モードの扱い方を明らかにする

多成分BECにおけるゼロモード
→Oles and Sacha (2008)
ただし、number conserving formalism

いずれは、複素モードも取り入れて、非平衡系へ。

c.f.) 複素モードがあるとき、ゼロ・モードの役割は
enhanceされる [Kobayashi, Nakamura, MM. Yamanaka (2009)]

2. 本研究の目的(位置づけ)

平衡系の場の理論



$T=0$ での場の理論

- ・対称性 (正閏交換関係を保つ)
- ・関数の完全系 $\rightarrow$ 場を展開
- ・ハミルトニアンの対角化



将来的には

非平衡場の理論, 相転移...

3. 研究の方法

・1成分BECにおける定式化*を拡張する

* Bogoliubov-de Gennesの方法

MM., Okumura, Sunaga, Yamanaka (2007),
Matsumoto and Sakamoto (2002)

その利点 : 不定計量がどのように現れるのか、明らか。

工夫のポイント: ゼロ・モード固有空間の完備化をどうするか

結論から言うと・・・

excitation : straightforwardな拡張

ゼロ・モード: ゲージ自由度に対する注意が必要

4. 2成分BECにおけるゼロ・モード(1)

まず2成分系で解析→後でN成分系へ拡張

Model Hamiltonian

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int d^3x & \left[\hat{\psi}_1^\dagger (K_1 + V_1 - \mu_1) \hat{\psi}_1 + \frac{g_1}{2} \hat{\psi}_1^\dagger \hat{\psi}_1^\dagger \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_1 \right. \\ & + \hat{\psi}_2^\dagger (K_2 + V_2 - \mu_2) \hat{\psi}_2 + \frac{g_2}{2} \hat{\psi}_2^\dagger \hat{\psi}_2^\dagger \hat{\psi}_2 \hat{\psi}_2 \\ & \left. + g_{12} \hat{\psi}_1^\dagger \hat{\psi}_2^\dagger \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2, \right] \end{aligned} \quad U(1) \times U(1) \text{ 対称}$$

$K_i = -\frac{\hbar^2}{2m_i}$: (第 i 成分の)運動エネルギー項, m_i はmass

V_i : (第 i 成分の)トラップポテンシャル

μ_i : (第 i 成分の)化学ポテンシャル

g_i : (第 i 成分どうしの)結合定数

g_{12} : 他成分間の結合定数

4. 2成分BECにおけるゼロ・モード(2)

10

凝縮相の出現

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_1(x) &= v_1(\mathbf{x}) + \hat{\varphi}_1(x) & \langle \hat{\psi}_1(x) \rangle &= v_1(\mathbf{x}) \\ \hat{\psi}_2(x) &= v_2(\mathbf{x}) + \hat{\varphi}_2(x) & \langle \hat{\psi}_2(x) \rangle &= v_2(\mathbf{x})\end{aligned}$$

凝縮相 ゆらぎ

Gross-Pitaevskii方程式(ゆらぎの1次が消える条件):

$$\begin{aligned}(K_1 + V_1 - \mu_1 + g_1|v_1|^2 + g_{12}|v_2|^2) v_1(\mathbf{x}) &= 0 \\ (K_2 + V_2 - \mu_2 + g_2|v_2|^2 + g_{12}|v_1|^2) v_2(\mathbf{x}) &= 0\end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x} |v_1(\mathbf{x})|^2 &= N_{c1} \\ \int d^3\mathbf{x} |v_2(\mathbf{x})|^2 &= N_{c2} \end{aligned} \right]$$

4. 2成分BECにおけるゼロ・モード(3)

Hamiltonian

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}} + \text{Const.}$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \int d^3\mathbf{x} [\hat{\varphi}_1^\dagger (K_1 + V_1 - \mu_1) \hat{\varphi}_1 + \frac{g_1}{2} (4|v_1|^2 \hat{\varphi}_1^\dagger \hat{\varphi}_1 + v_1^{*2} \hat{\varphi}_1^2 + v_1^2 \hat{\varphi}_1^{\dagger 2}) \\ &\quad + \hat{\varphi}_2^\dagger (K_2 + V_2 - \mu_2) \hat{\varphi}_2 + \frac{g_2}{2} (4|v_2|^2 \hat{\varphi}_2^\dagger \hat{\varphi}_2 + v_2^{*2} \hat{\varphi}_2^2 + v_2^2 \hat{\varphi}_2^{\dagger 2}) \\ &\quad + g_{12} (\hat{\varphi}_1^\dagger \hat{\varphi}_2^\dagger v_1 v_2 + \hat{\varphi}_1^\dagger \hat{\varphi}_1 |v_2|^2 + \hat{\varphi}_1^\dagger \hat{\varphi}_2 v_1 v_2^* + \hat{\varphi}_2^\dagger \hat{\varphi}_1 v_2 v_1^* + \hat{\varphi}_2^\dagger \hat{\varphi}_2 |v_1|^2 + \hat{\varphi}_1 \hat{\varphi}_2 v_1^* v_2^*)] \\ \hat{H}_1 &= (\text{terms with third- or fourth-order in } \hat{\varphi} \text{ and/or } \hat{\varphi}^\dagger)\end{aligned}$$

4. 2成分BECにおけるゼロ・モード(4)

$\hat{H}_0$ は次のようにかける

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \hat{\Phi}^\dagger T' \hat{\Phi}$$

ただし、
$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_1^\dagger \\ \hat{\varphi}_2 \\ \hat{\varphi}_2^\dagger \end{pmatrix}, \quad \hat{\Phi}^\dagger = (\hat{\varphi}_1^\dagger \quad \hat{\varphi}_1 \quad \hat{\varphi}_2^\dagger \quad \hat{\varphi}_2)$$

$$T' = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{X}_{1\bar{2}} & \mathcal{X}_{12} \\ \mathcal{M}_1^* & \mathcal{L}_1 & \mathcal{X}_{\bar{1}\bar{2}} & \mathcal{X}_{\bar{1}2} \\ \mathcal{X}_{\bar{1}2} & \mathcal{X}_{12} & \mathcal{L}_2 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{X}_{\bar{1}\bar{2}} & \mathcal{X}_{1\bar{2}} & \mathcal{M}_2^* & \mathcal{L}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= K_1 + V_1 - \mu_1 + 2g_1|v_1|^2 + g_{12}|v_2|^2 \\ \mathcal{L}_2 &= K_2 + V_2 - \mu_2 + 2g_2|v_2|^2 + g_{12}|v_1|^2 \\ \mathcal{M}_1 &= g_1 v_1^2, \\ \mathcal{M}_2 &= g_2 v_2^2, \\ \mathcal{X}_{ij} &= g_{12} v_i v_j \quad (i, j = 1, 2), \\ \mathcal{X}_{i\bar{j}} &= g_{12} v_i v_j^* \quad (i, j = 1, 2), \\ \mathcal{X}_{\bar{i}j} &= g_{12} v_i^* v_j \quad (i, j = 1, 2), \\ \mathcal{X}_{\bar{i}\bar{j}} &= g_{12} v_i^* v_j^* \quad (i, j = 1, 2). \end{aligned}$$

4. 2成分BECにおけるゼロ・モード(5)

Heisenberg equation

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_1^\dagger \\ \hat{\varphi}_2 \\ \hat{\varphi}_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{X}_{1\bar{2}} & \mathcal{X}_{12} \\ -\mathcal{M}_1^* & -\mathcal{L}_1 & -\mathcal{X}_{\bar{1}2} & -\mathcal{X}_{\bar{1}\bar{2}} \\ \mathcal{X}_{\bar{1}2} & \mathcal{X}_{12} & \mathcal{L}_2 & \mathcal{M}_2 \\ -\mathcal{X}_{\bar{1}\bar{2}} & -\mathcal{X}_{1\bar{2}} & -\mathcal{M}_2^* & -\mathcal{L}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_1^\dagger \\ \hat{\varphi}_2 \\ \hat{\varphi}_2^\dagger \end{pmatrix}$$



$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Phi} = \tilde{T} \hat{\Phi}$$

ここで、

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{X}_{1\bar{2}} & \mathcal{X}_{12} \\ -\mathcal{M}_1^* & -\mathcal{L}_1 & -\mathcal{X}_{\bar{1}2} & -\mathcal{X}_{\bar{1}\bar{2}} \\ \mathcal{X}_{\bar{1}2} & \mathcal{X}_{12} & \mathcal{L}_2 & \mathcal{M}_2 \\ -\mathcal{X}_{\bar{1}\bar{2}} & -\mathcal{X}_{1\bar{2}} & -\mathcal{M}_2^* & -\mathcal{L}_2 \end{pmatrix} = u_3 T' \quad u_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

4. 2成分BECにおけるゼロ・モード(6)

Bogoliubov-de Gennes equation

Hamiltonian: $\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \left(\hat{\Phi}, \tilde{T} \hat{\Phi} \right)$

内積: $(r, s) \equiv \int r^\dagger(\mathbf{x}) u_3 s(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}$
 (不定計量) $u_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$

$\tilde{T} x_n(\mathbf{x}) = E_n x_n(\mathbf{x})$: 2成分BECに対する
 Bogoliubov-de Gennes方程式

$x_n(\mathbf{x})$: 4成分固有関数

→ 上記内積に対する直交性を調べる必要！

4. 2成分BECにおけるゼロ・モード(7)

15

ゼロ・モードを入れる

$$\begin{aligned} (K_1 + V_1 - \mu_1 + g_1|v_1|^2 + g_{12}|v_2|^2) v_1(\mathbf{x}) &= 0 \\ (K_2 + V_2 - \mu_2 + g_2|v_2|^2 + g_{12}|v_1|^2) v_2(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_1 f_1(\mathbf{x}) - \mathcal{M}_1 f_1^*(\mathbf{x}) &= 0 \\ \mathcal{L}_2 f_2(\mathbf{x}) - \mathcal{M}_2 f_2^*(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned}$$

凝縮相

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{N_{c1}}} v_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{N_{c2}}} v_2(\mathbf{x}) \end{cases}$$

$$\tilde{T} x_0^{(1)}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\tilde{T} x_0^{(2)}(\mathbf{x}) = 0$$

$$x_0^{(1)}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1 \\ -f_1^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_0^{(2)}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_2 \\ -f_2^* \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \|x_0^{(1)}\|^2 &= (x_0^{(1)}, x_0^{(1)}) = 0 \\ \|x_0^{(2)}\|^2 &= (x_0^{(2)}, x_0^{(2)}) = 0 \end{aligned}$$

Remark: $(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}) = 0$

$x_0^{(1)}, x_0^{(2)}$ だけでは、ゼロ・モード固有空間は完備でない。

c.f.) 電子と正孔の例

完備化のための、補助的なモードが必要

Lewenstein and You (1996)

Matsumoto and Sakamoto (2002)

4. 2成分BECにおけるゼロ・モード(9)

17

完備化のための補助モード(1)

1成分のとき: Dziarmaga (2004)

$$(K_1 + V_1 - \mu_1 + g_1|v_1|^2 + g_{12}|v_2|^2) v_1(\mathbf{x}) = 0$$

を N_{c1} で微分 (以後 N_{c1} を N_1 などと書く)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{X}_{1\bar{2}} & \mathcal{X}_{12} \\ \mathcal{M}_1^* & \mathcal{L}_1 & \mathcal{X}_{\bar{1}2} & \mathcal{X}_{\bar{1}\bar{2}} \\ \mathcal{X}_{\bar{1}2} & \mathcal{X}_{12} & \mathcal{L}_2 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{X}_{1\bar{2}} & \mathcal{X}_{1\bar{2}} & \mathcal{M}_2^* & \mathcal{L}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial N_1} \\ \frac{\partial v_1^*}{\partial N_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial N_1} \\ \frac{\partial v_2^*}{\partial N_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu_1}{\partial N_1} v_1 \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial N_1} v_1^* \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial N_1} v_2 \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial N_1} v_2^* \end{pmatrix}$$

$$(K_2 + V_2 - \mu_2 + g_2|v_2|^2 + g_{12}|v_1|^2) v_2(\mathbf{x}) = 0$$

を N_{c2} で微分

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{X}_{1\bar{2}} & \mathcal{X}_{12} \\ \mathcal{M}_1^* & \mathcal{L}_1 & \mathcal{X}_{\bar{1}2} & \mathcal{X}_{\bar{1}\bar{2}} \\ \mathcal{X}_{\bar{1}2} & \mathcal{X}_{12} & \mathcal{L}_2 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{X}_{1\bar{2}} & \mathcal{X}_{1\bar{2}} & \mathcal{M}_2^* & \mathcal{L}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial N_2} \\ \frac{\partial v_1^*}{\partial N_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial N_2} \\ \frac{\partial v_2^*}{\partial N_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu_1}{\partial N_2} v_1 \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial N_2} v_1^* \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial N_2} v_2 \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial N_2} v_2^* \end{pmatrix}$$

4. 2成分BECにおけるゼロ・モード(10)

完備化のための補助モード(2)

$$Y_{-1}^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial N_1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1^* \\ v_2 \\ v_2^* \end{pmatrix}, \quad Y_{-1}^{(2)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial N_2} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1^* \\ v_2 \\ v_2^* \end{pmatrix} \quad \text{とすれば}$$

$$\tilde{T} Y_{-1}^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\tilde{I}_{11}} x_0^{(1)}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{\tilde{I}_{12}} x_0^{(2)}(\boldsymbol{x})$$

$$\tilde{T} Y_{-1}^{(2)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\tilde{I}_{21}} x_0^{(1)}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{\tilde{I}_{22}} x_0^{(2)}(\boldsymbol{x})$$

$$\tilde{I}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{N_j} \frac{\partial \mu_j}{\partial N_i}}$$

4. 2成分BECにおけるゼロ・モード(11)

完備化のための補助モード(3)

$$(Y_{-1}^{(1)}, x_0^{(1)}) = \int \left(\frac{\partial v_1^*}{\partial N_1} f_1 + \frac{\partial v_1}{\partial N_1} f_1^* \right) \equiv K_1 \quad (\in \mathbf{R})$$

とすれば $x_{-1}^{(1)} = \frac{1}{K_1} Y_{-1}^{(1)} \quad \rightarrow \quad (x_{-1}^{(1)}, x_0^{(1)}) = 1$

同様に、 $(x_{-1}^{(2)}, x_0^{(2)}) = 1$

定義方程式は、次のように書き換えることができた:

$$\begin{aligned} \tilde{T} x_{-1}^{(1)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{I_{11}} x_0^{(1)}(\mathbf{x}) + \frac{1}{I_{12}} x_0^{(2)}(\mathbf{x}) \\ \tilde{T} x_{-1}^{(2)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{I_{21}} x_0^{(1)}(\mathbf{x}) + \frac{1}{I_{22}} x_0^{(2)}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

ここから先:

$x_{-1}^{(1)}(\mathbf{x})$, $x_{-1}^{(2)}(\mathbf{x})$
の直交性を調べる

ただし

$$K_i = (Y_{-1}^{(i)}, x_0^{(i)}) \text{ として } (i = 1, 2) \quad I_{ij} = \tilde{I}_{ij} K_i \quad \begin{aligned} (x_{-1}^{(1)}, x_0^{(1)}) &= 1 \\ (x_{-1}^{(2)}, x_0^{(2)}) &= 1 \end{aligned}$$

4. 2成分BECにおけるゼロ・モード(12)

これまでのまとめと、大問題

	$x_0^{(1)}$	$x_{-1}^{(1)}$	$x_0^{(2)}$	$x_{-1}^{(2)}$
$x_0^{(1)}$	0	1	0	0
$x_{-1}^{(1)}$		0	0	?
$x_0^{(2)}$			0	1
$x_{-1}^{(2)}$				0

※symmetric

$$(x_{-1}^{(1)}, x_{-1}^{(2)}) = 0?$$

... ☆

5. まとめと今後の展望

- 多成分BECにおけるゼロ・モードの導入法を明らかにした
- 多成分性→直交化の必要性
- 状態空間は、
excitation: $\hat{c}_n$ の真空
ゼロ・モード: open problem

<今後の課題>

Spinor BECへの応用 $\cdots U(1) \times SU(2)$ 対称性