

インフレーションがもたらす小さな宇宙項の力学モデル

hep-ph/10064890

岩崎 愛一（二松学舎大学）

現在の宇宙膨張は**加速膨張**

Review; Padmanabhan, 2003

ビッグバン以来、
元素合成、あるいは、晴れ上がりの時期
までは **減速膨張**

加速膨張 <--- 宇宙項(暗黒エネルギー)


$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \Lambda g_{\mu\nu} + 8\pi G T_{\mu\nu} \quad \mathbf{G}; \text{重力定数}$$
$$= 8\pi G \left(T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \right)$$

Flat space Friedmann Universe

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\vec{x}^2$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{energy density}}}{\rho} + 3 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pressure}}}{p} - \frac{3\Lambda}{8\pi G} \right) > 0 \quad \text{現在加速膨張}$$

競合

$$\left(T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - p g_{\mu\nu} \right)$$

energy density

pressure

fluid velocity

$$\rho \propto a^{-3}$$

$$p = 0$$

for non-relativistic matter
(cold dark matter)



物理定数の1つ？

cold dark matter + 宇宙項
(Λ CDM モデル)



宇宙項はスカラー場のポテンシャル項？
(時間的に変化する力学量)

Real scalar field q

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} + \partial_\mu q \partial_\nu q - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\lambda q \partial_\lambda q - V(q) - \frac{\Lambda}{8\pi G} \right)$$



物理定数なら、プランク質量と合わせて質量定数が2つ存在

$$\frac{\Lambda}{8\pi G} \approx (10^{-3} eV)^4 \ll (Planck\ mass)^4$$



宇宙項がスカラー場のポテンシャル項なら、プランク質量との大きな差は？

宇宙論における2大問題

宇宙項あるいはポテンシャル項は、なぜ
プランクスケールに比べ極端に小さいか？

“Cosmological constant problem”

$$\frac{\Lambda}{8\pi G} \approx (10^{-3} eV)^4 \ll (Planck\ mass)^4$$

なぜ、宇宙史の中で現在が加速膨張
なのか？

“Coincidence problem”

$$\text{物質のエネルギー} = \rho(today) \approx \frac{\Lambda}{8\pi G} = \text{暗黒エネルギー}$$

Scalar field theory (quintessence) for dynamical cosmological constant

Equation of motion of spatially uniform scalar field

coupled minimally with gravity

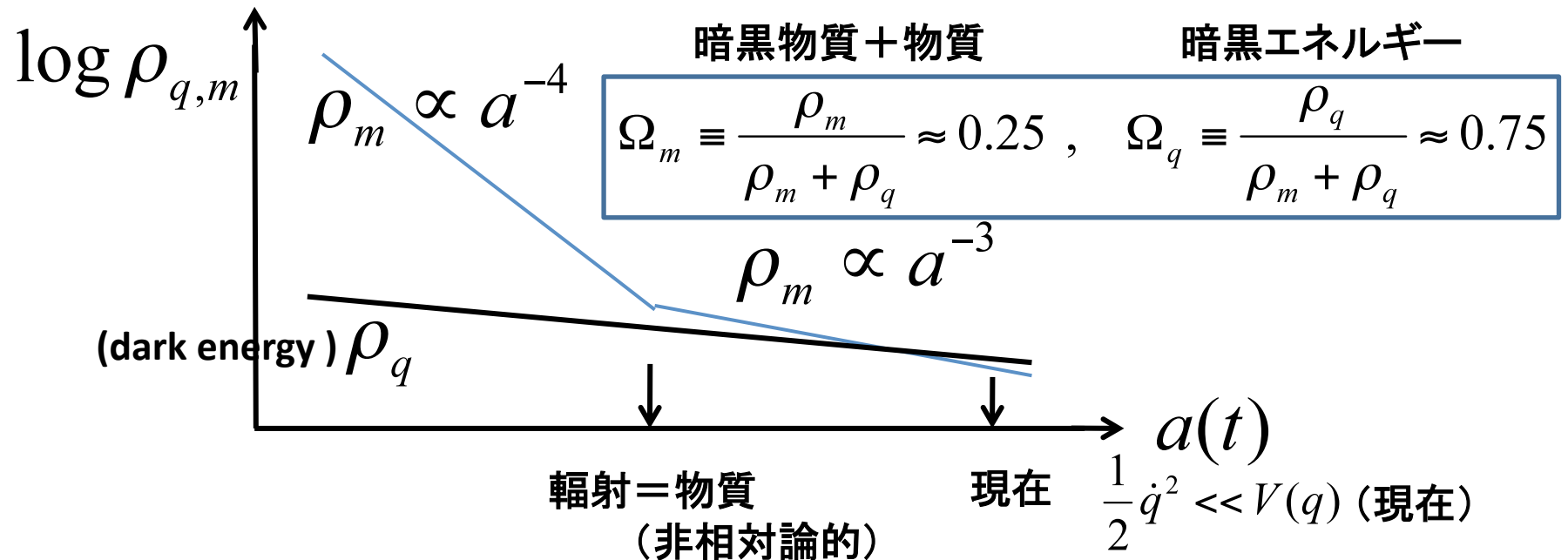
(energy density of the field q)

$$\begin{cases} \ddot{q} + 3H\dot{q} + \partial_q V(q) = 0, \\ H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_q), \end{cases} \quad \begin{matrix} H \equiv \dot{a}/a \\ \text{(Hubble parameter)} \end{matrix}$$

$$\rho_q = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + V(q)$$

(energy density of radiation or matter)

$$\rho_m \propto a^{-4} \text{ or } a^{-3}$$



$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + 3p_m + \rho_q + 3p_q)$$

0 for cold dark matter

$$\approx -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m - 2V(q)) > 0 \quad \text{加速膨張}$$

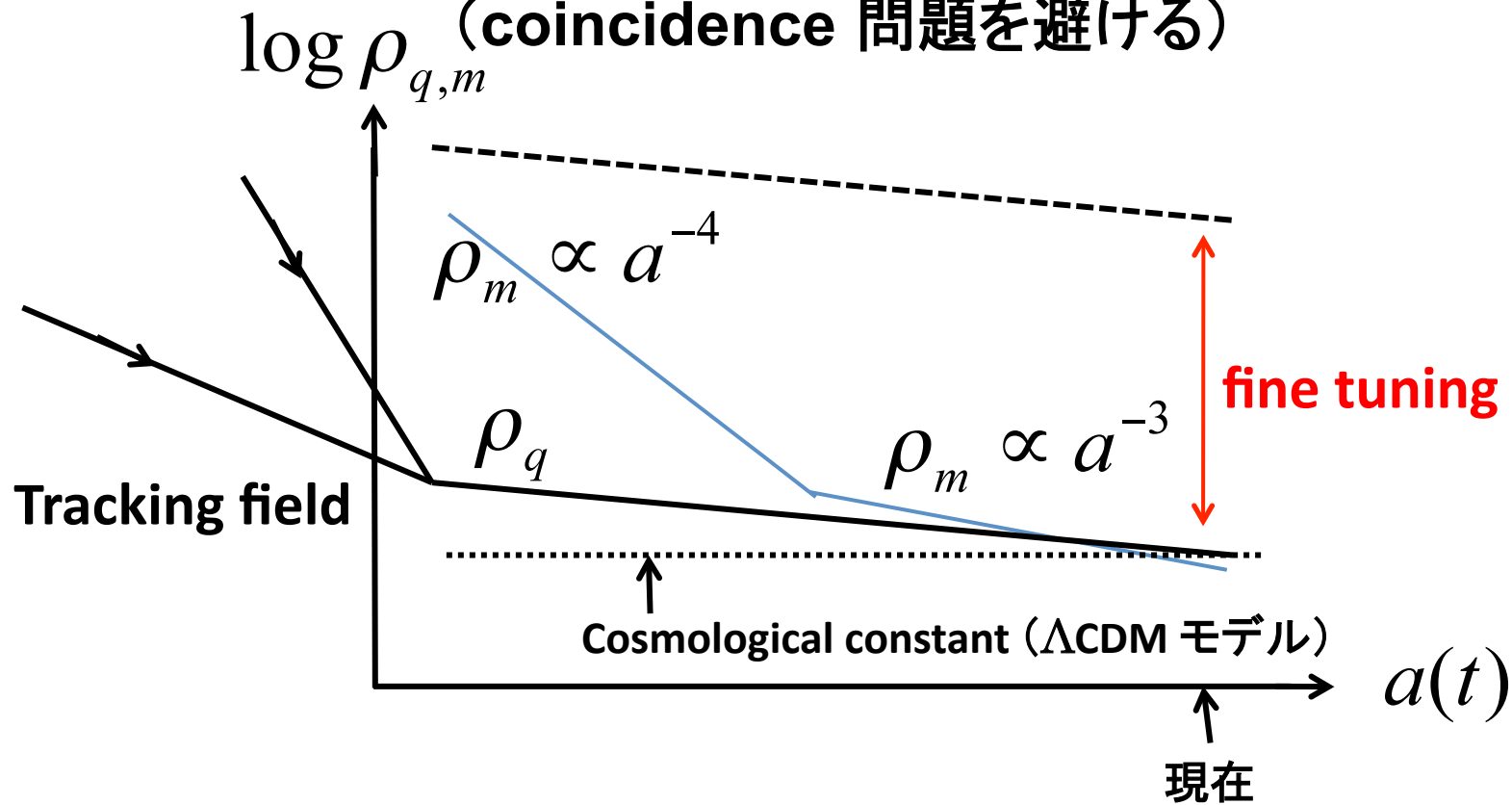
状態方程式 $\omega_q(a \approx 1) \equiv \frac{p_q}{\rho_q} = \frac{\dot{q}^2/2 - V}{\dot{q}^2/2 + V} \approx -1$

$$p_q \equiv \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q) \approx -V(q) < 0$$

(現在は場の運動エネルギーが十分小さい)

現在は、暗黒物質＋物質に比べ、暗黒エネルギーが優勢で、かつ、そのポテンシャルエネルギーが運動エネルギーに比べ十分大きい

初期条件によらず一定値に近づく
(coincidence 問題を避ける)



Tracking condition

$$\frac{V''(q)V(q)}{(V'(q))^2} > 1 \quad \text{初期条件によらず一定の解に近づく}$$

例 $V = \frac{M^{4+n}}{q^n}$

Steinhardt, et.al 1999

従来のスカラー場モデルの問題点

Tracking condition を課しても
様々なモデルが可能。

Λ CDM モデルを自然に一般化したモデルはない

Fine tuning の問題が残されたまま。

説得力のある現象論的モデルがない。
(予言能力がない)

$V = \frac{M^{4+n}}{q^n}$ では、現在の加速膨張が十分説明できない。

A guiding principle for the construction of quintessence (scalar field theory)

次の条件を満たすスカラー場 q が存在する。

$$\frac{\dot{q}}{M} = H = \frac{\dot{a}}{a}$$

M はスカラー場 q を特徴づける質量
 q/M の時間変化は H に比例する。
Hubble parameter H は宇宙の基本的
時間スケール

$$\ddot{q} + 3H\dot{q} + \partial_q V(q) = 0$$

$$\left(\frac{d}{dt} = \frac{da(t)}{dt} \frac{d}{da} = \dot{a} \frac{d}{da} \right)$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_q)$$

along with $\frac{\dot{q}}{M} = H = \frac{\dot{a}}{a}$

$$2a \frac{dV(a)}{da} = -6\lambda V(a) - \lambda \left(a \frac{d}{da} \rho_m(a) + 6\rho_m(a) \right)$$

**V(a) is uniquely determined
in terms of the energy density of
matter $\rho_m(a)$**

with $\lambda \equiv \frac{8\pi G M^2}{3} < 1$
 $\frac{3}{8\pi G} \equiv m^2 \quad (m \approx 4.2 \times 10^{18} \text{ GeV})$

背景に依存する項 qに固有な項

$$\begin{aligned}
 V(a) &= \frac{\lambda \rho_m(a)}{4-3\lambda} + \tilde{V}_0 a^{-3\lambda} \quad \text{for } \rho_m(a) \propto a^{-4} \quad \text{Radiations dominated} \\
 &= \frac{\lambda \rho_m(a)}{2(1-\lambda)} + \tilde{V}_0 a^{-3\lambda} \quad \text{for } \rho_m(a) \propto a^{-3} \quad \text{Matter dominated}
 \end{aligned}$$

intrinsic for q

When we express it in terms of the field q; $q = M \log(a/a_0)$

from the condition $\frac{\dot{q}}{M} = H = \frac{\dot{a}}{a}$

$$\begin{aligned}
 V(q) &= \frac{\lambda \rho_m(a = a_0 \exp(q/M))}{2(1-\lambda)} + \tilde{V}_0 a_0^{-3\lambda} \exp(-3\lambda q/M) \\
 &= \frac{\lambda a_0^{-3} \rho_0 \exp(-3q/M)}{2(1-\lambda)} + M^4 \exp(-3\lambda q/M)
 \end{aligned}$$

intrinsic for q

for matter dominated

assumption $M^4 = \tilde{V}_0 a_0^{-3\lambda}$

vacuum energy =0

$$2a \frac{dV(a)}{da} = -6\lambda V(a) - \lambda \left(a \frac{d}{da} \rho_m(a) + 6\rho_m(a) \right)$$

物質のエネルギー密度 + 任意定数 を加える

$$\rho_m(a) + \delta\rho_m$$

解は

$$V(a) \rightarrow V(a) - \delta\rho_m$$

全エネルギー密度は変化なし。(真空のエネルギー=0)

$$V(a) + \rho_m(a) = (V(a) - \delta\rho_m) + (\rho_m(a) + \delta\rho_m)$$

$$0 \leq V(a) + \rho_m(a) \rightarrow 0 \quad \text{as } a \rightarrow \infty$$

2 parameters in our model

😊 $M \quad \left(\frac{\dot{q}}{M} = H = \frac{\dot{a}}{a} \right)$

場 q の特徴的スケール

同じ
↑↓

😊 $\lambda \equiv \frac{8\pi G M^2}{3} < 1$

M がPlanck massより小さい

😊 $\tilde{V}_0 = 0.75 \rho_c \quad \left(V(a) = \frac{\lambda \rho_m(a)}{4 - 3\lambda} + \tilde{V}_0 a^{-3\lambda} \right)$ 暗黒エネルギー
(ρ_c : critical density)

😊 $a_0 \ll 1 \quad (a = a_0 \exp(q/M))$ 場 q が特徴的スケール M を取る時のscale factor
($a(\text{today}) = 1$)

現在のscale factor $a=1$ (normalization)

a_0 は、 M と $\tilde{V}_0$ との関数 $a_0 = \left(\frac{\tilde{V}_0}{M^4} \right)^{(1/3\lambda)}$

Our model is reduced to Λ CDM (cold dark matter) model in the limit $\lambda \rightarrow 0$ ($M \rightarrow 0$).

$$\begin{aligned}\rho_q &= \frac{\dot{q}^2}{2} + V(q) \\ &= \frac{\lambda(\rho_m + V)}{2 - \lambda} + V = \frac{\lambda(\rho_m + V)}{2 - \lambda} + \frac{\lambda\rho_m(a)}{2(1 - \lambda)} + \tilde{V}_0 a^{-3\lambda} \\ &\rightarrow \tilde{V}_0 = 8\pi G\Lambda\end{aligned}$$

$$\rho_m + \rho_q \rightarrow \rho_m + \tilde{V}_0 = \rho_m + 8\pi G\Lambda$$

この極限で宇宙のエネルギーは、物質 ρ_m と宇宙項 Λ のみとなる

The field $q = M \log(a/a_0)$ vanishes in the limit $\lambda \rightarrow 0$ ($M \rightarrow 0$)



われわれのモデルは Λ CDM モデルの自然な一般化

観測量

😊 現在の暗黒エネルギーの状態方程式(加速膨張を決める)

$$\text{Our model } \omega_q(a \approx 1) \equiv \frac{p_q}{\rho_q} = -1 + \frac{4\lambda}{3} + \lambda(1-a)$$

$$\omega_q(a=1) < -0.9 \quad \longrightarrow \quad \underline{\lambda < 0.08}$$

(観測から)

😊 元素合成時における暗黒エネルギーの割合
(元素合成を阻害しない)

$$\Omega_q(a \approx 10^{-9}; \text{Nucleosynthesis}) = \frac{\rho_q}{\rho_m + \rho_q} < 0.1$$

$$\text{Our model } \underline{\approx \lambda < 0.1}$$

Intrinsic potential

$$\tilde{V}_0 a^{-3\lambda} = \tilde{V}_0 a_0^{-3\lambda} \exp(-3\lambda q / M) = M^4 \exp(-3\lambda q / M)$$

$$\tilde{V}_0 a_0^{-3\lambda} = M^4 = \lambda^2 m^4 \quad (m \approx 4.2 \times 10^{18} \text{ GeV})$$

$$a_0 = \left(\frac{\tilde{V}_0}{M^4} \right)^{(1/3\lambda)} \approx 10^{-400} \quad \text{小さい!}$$

f or $\tilde{V}_0 \approx (10^{-3} \text{ eV})^4$ and $\lambda = 0.1$
(観測から) (例として)

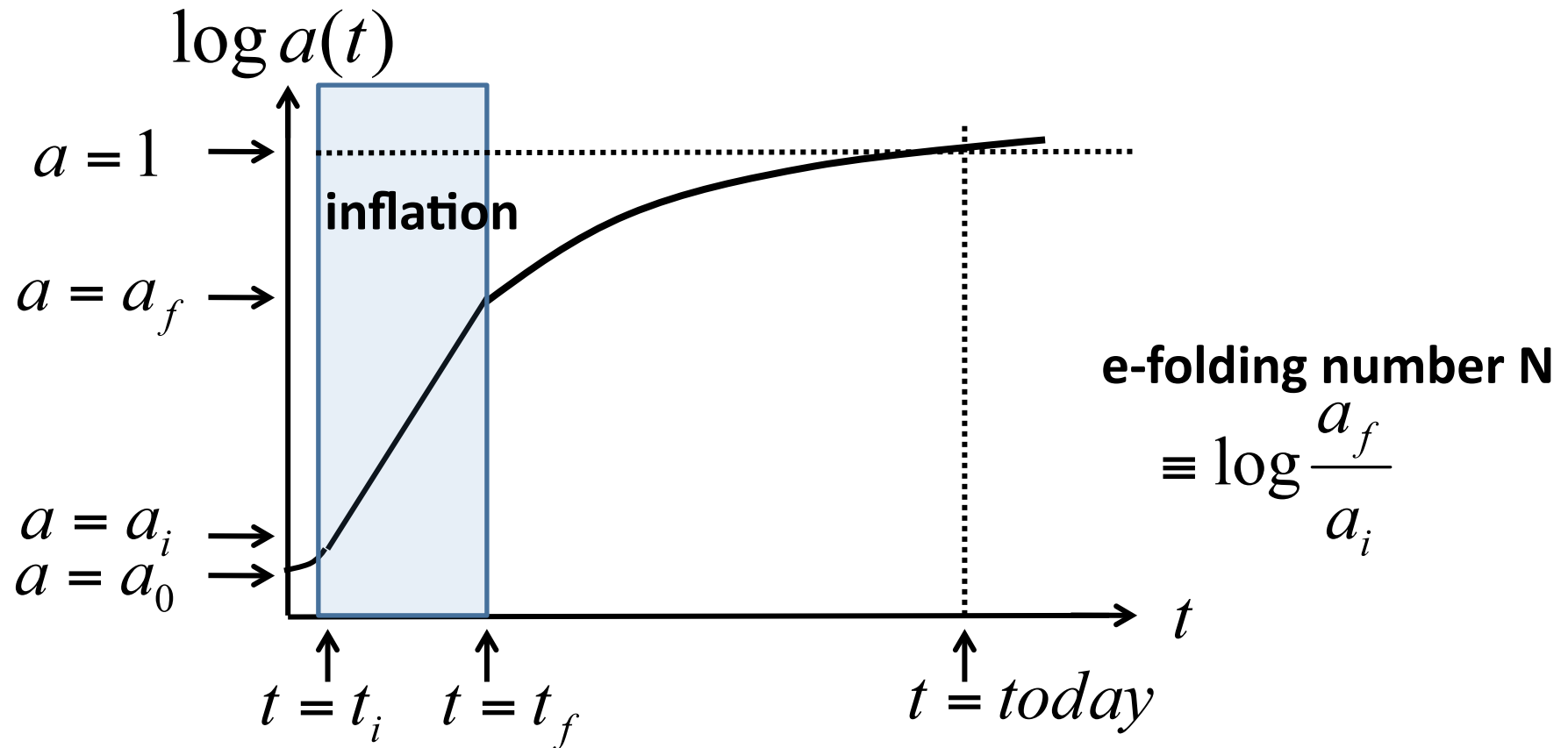
a_0 ; field q が値 M を取る時期のスケールファクター
(現在は $a=1$)

なぜ、これほど小さい？ fine tuning? No!

Inflation can explain why it is much small.

a_0 は次元のない数。

Inflation; $a \propto \exp(Ht)$
(Hubble parameter H is constant)



Inflation starts at $t = t_i$ and ends at $t = t_f$

$a = a_0$ がどれほど小さくとも、 N を適当に選ぶことで十分大きな a が実現する。

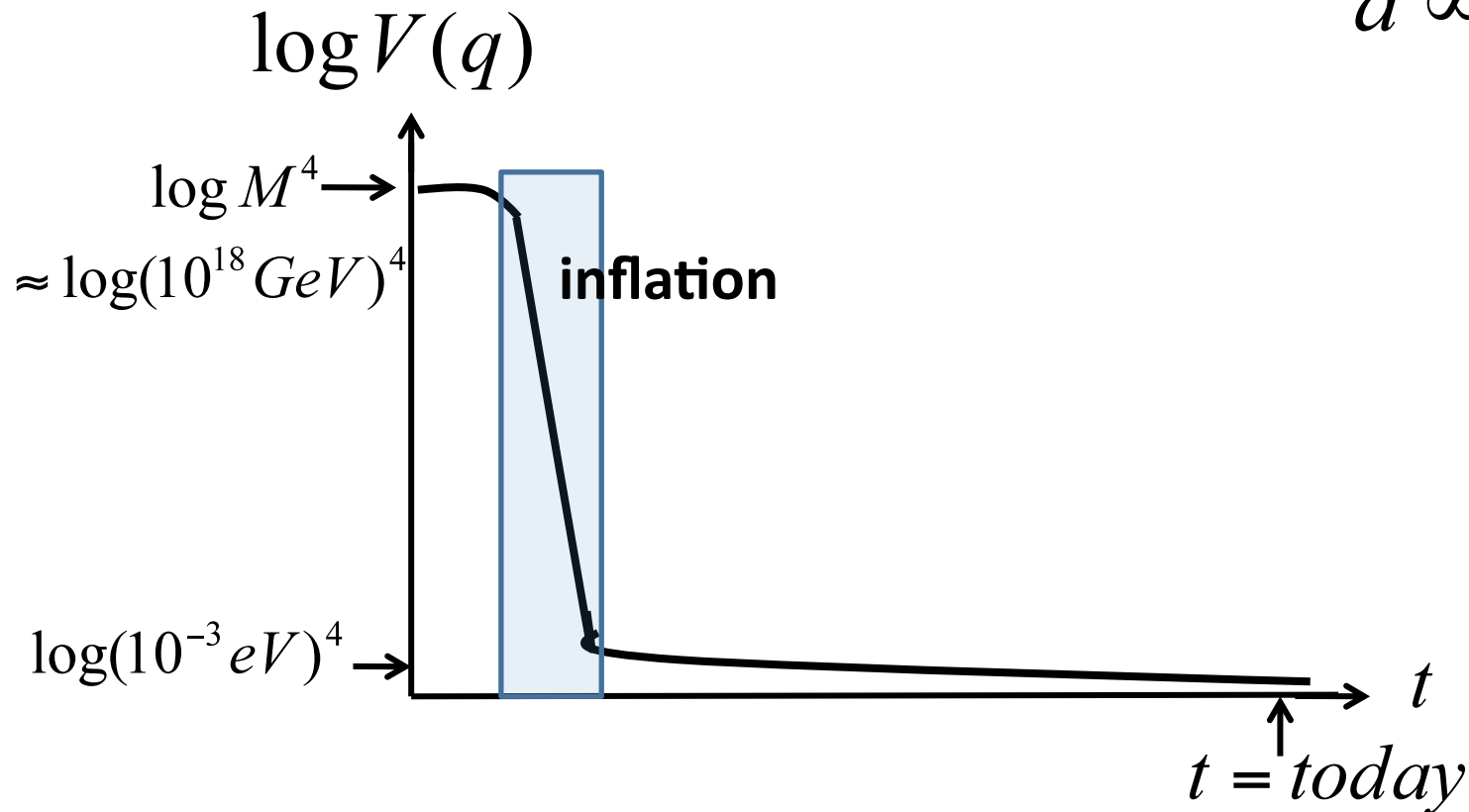
Inflationで宇宙項が小さくなる

Dark energy

$$\tilde{V}_0 a^{-3\lambda} = \tilde{V}_0 a_0^{-3\lambda} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\lambda} = M^4 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\lambda} \rightarrow 0$$

owing to the exponential increase of $a(t)$;

$$a \propto \exp(Ht)$$



結論

条件 $\frac{\dot{q}}{M} = H = \frac{\dot{a}}{a}$ を満たす場 q の

力学は一意に決まる。

唯一のパラメータ M 、あるいは λ は観測で決まる。

☺ 予言 $\omega_q(a \approx 1) \equiv \frac{p_q}{\rho_q} = -1 + \frac{4\lambda}{3} + \lambda(1-a)$

☺ Λ CDM モデルの自然な一般化

☺ Inflationによる小さな宇宙項
(No cosmological constant problem)