Dirac Spectrum and Lee-Yang Zeros in Dense QCD

Naoki Yamamoto (University of Tokyo)

contents

- Introduction: Dirac spectrum and Lee-Yang zeros
- Exact finite-volume analysis in dense QCD
- Summary & Outlook

---

(1) N.Y. and T. Kanazawa, Phys. Rev. Lett. 103 (2009) 032001.
(2) T. Kanazawa, T. Wettig and N.Y., JHEP 0908 (2009) 003.

基研研究会「熱場の量子論とその応用」 2009.9.3-5

Dirac spectrum

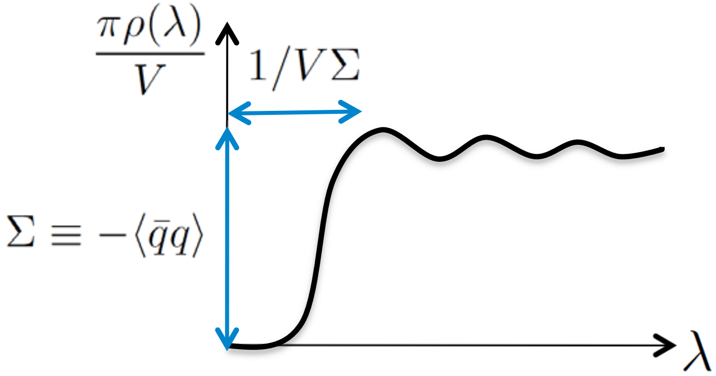
- Diracスペクトル：QCDのDirac演算子の固有値分布

$$\boxed{\hat{\mathcal{D}} = \gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu) + \mu\gamma_0, \quad \hat{\mathcal{D}}\psi_n = i\lambda_n\psi_n}$$

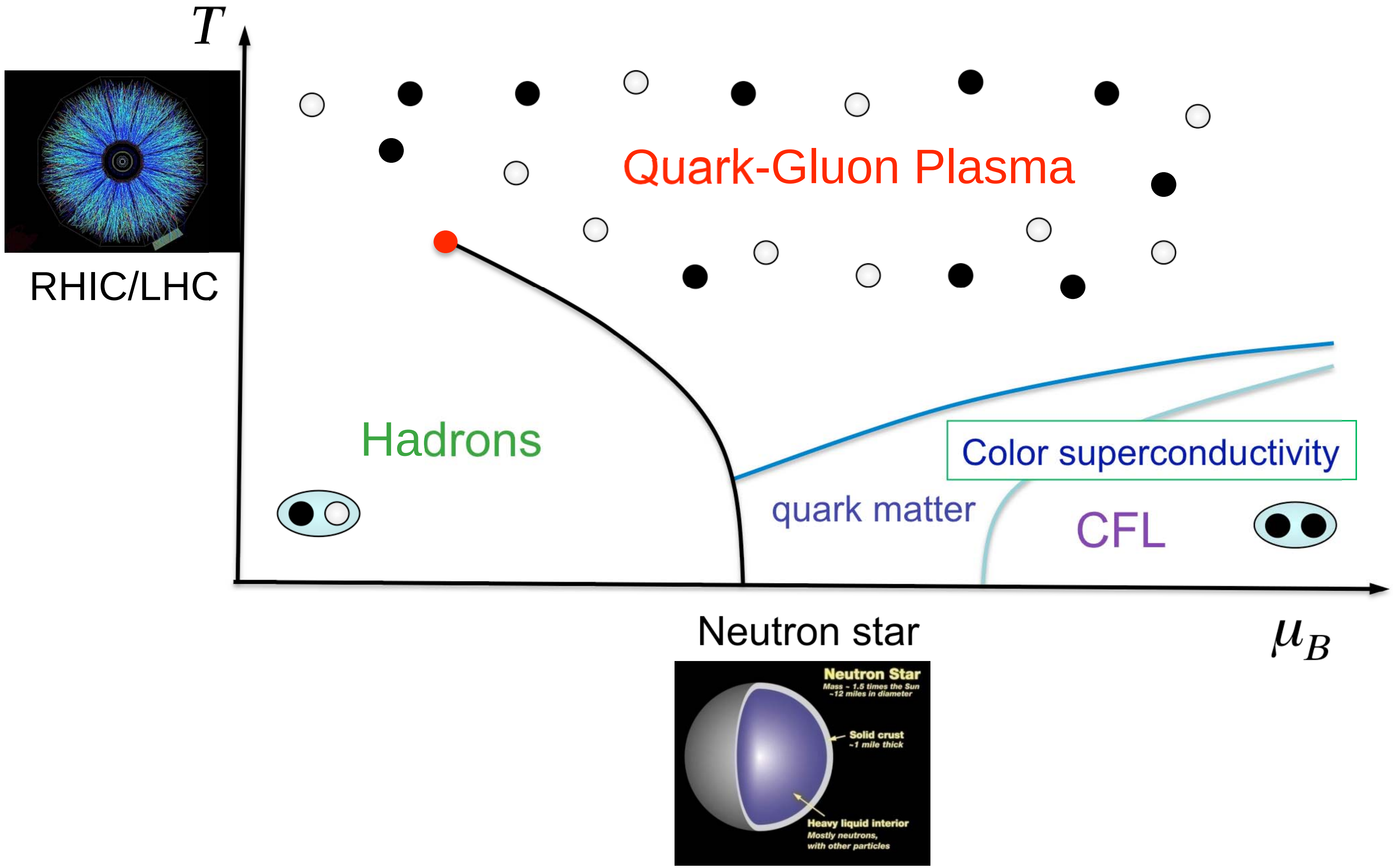
・カイラリティ：$\pm i\lambda_n$ のペアで出現　　　・反エルミート性：μ=(λ_n 　は実数

- 有限体積でのQCD真空では、カイラル凝縮がDiracスペクトルを支配

（例）Dirac固有値のスペクトル関数：$\rho(\lambda) \equiv \langle\delta(\lambda - \lambda_n)\rangle$



QCD phase diagram



Finite-volume QCD at high density

u,d,s r,g,b

➢ Color-flavor locking (CFL): $\epsilon_{ijk}\epsilon_{abc}\Delta_{ia} \sim \langle (q_L)^j_b C (q_L)^k_c \rangle = -\langle (q_R)^j_b C (q_R)^k_c \rangle$

➢ CFLにおける対称性の破れと素励起；

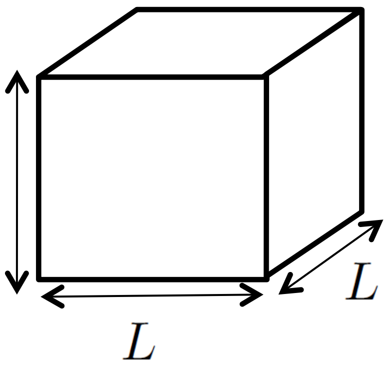
$$SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_B \times U(1)_A \rightarrow SU(3)_V \times \underline{Z(2)_L \times Z(2)_R}$$

- クォーク: ダイクォーク凝縮による質量~Δ
- グルーオン: Higgs機構による質量~Δ
- NGモード: ほぼmassless

➢ 有限体積トーラスにおけるQCD NY-Kanazawa (PRL2009)

ε-regime: $\frac{1}{\Delta} \ll L \ll \frac{1}{m_\pi}$

$\frac{1}{T} \sim L$



➢ ε-regimeでは、

- NGモード以外は無視できる(∵ $e^{-\Delta/T} \sim e^{-L\Delta} \ll 1$)
- NGモードの運動項は無視できる(∵系のサイズ≪NGモードのCompton長)

Partition functions in ε-regime

- 高密度QCDにおけるChiral Lagrangian:　　Son-Stephanov (PRD2000)

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EFT}} = \cancel{[\text{kinetic terms}]} + \frac{3m^2\Delta^2}{4\pi^2}[(\mathrm{Tr}\Sigma^\dagger)^2 - \mathrm{Tr}(\Sigma^\dagger)^2 + \mathrm{h.c.}]$$

$$\Sigma \in SU(3)_A \times U(1)_A \simeq U(3)$$

- 高密度QCDにおける厳密な分配関数:　　NY-Kanazawa (PRL2009)
  ハドロン相とCFL相で同じ関数形＝クォーク・ハドロン連続性と関係

$$Z_{\mathrm{EFT}} = \det \begin{vmatrix} I_0(x) & I_1(x) & I_2(x) \\ I_1(x) & I_0(x) & I_1(x) \\ I_2(x) & I_1(x) & I_0(x) \end{vmatrix} \quad \begin{cases} x = 3Vm^2\Delta^2/\pi^2 & \text{at high } \mu. \\ x = Vm|\langle\bar{q}q\rangle| & \text{at } \mu=0. \end{cases}$$

Spectral sum rules at high density

- 有限密度QCDの分配関数: $Z_{\mathrm{QCD}} = \left\langle \prod_n \left(1 + \frac{m^2}{\lambda_n^2}\right)^3 \right\rangle$

- スペクトル和則 ＝ QCDと有効理論のマッチング（Z_{QCD}=Z_{EFT}）

$$\left\langle \sum_n \frac{1}{\lambda_n^2} \right\rangle = \left\langle \sum_{m \neq n} \frac{1}{\lambda_m^2 \lambda_n^2} \right\rangle = \left\langle \sum_n \frac{1}{\lambda_n^6} \right\rangle = 0,$$
$$\left\langle \sum_n \frac{1}{\lambda_n^4} \right\rangle = \frac{3}{4\pi^4}(V\Delta^2)^2, \quad \cdots$$

ダイクォーク凝縮の
$Z(2)_L \times Z(2)_R$ 対称性

- カラー超伝導のギャップΔが高密度QCDのDiracスペクトルを支配

符号問題のない2-color QCDなどの理論で、格子QCDによる解析が可能

Kanazawa-Wettig-NY (JHEP2009)

Another viewpoint: Lee-Yang zeros

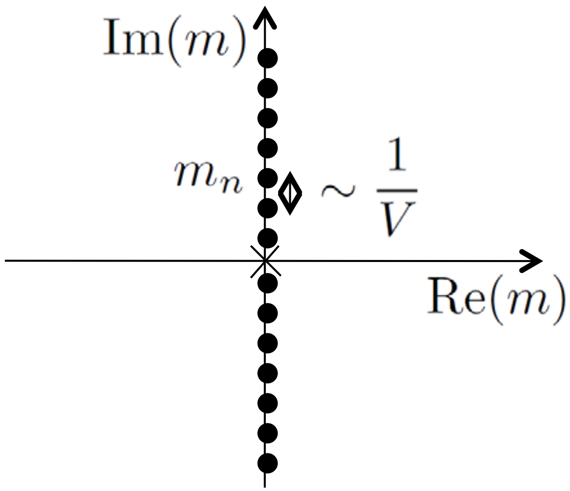
- 分配関数のゼロ点(Lee-Yangゼロ)分布はカイラル対称性の破れと関係:

Halasz-Jackson-Verbaarschot (PLB97; PRD97)

$$Z_{\mathrm{QCD}}(m) = \prod_n (m - m_n)$$

$$\langle \bar{q}q \rangle_m = \frac{1}{V}\frac{\partial \ln Z_{\mathrm{QCD}}}{\partial m} = \frac{1}{V}\sum_n \frac{1}{m - m_n}$$

- 有限のカイラル凝縮 → 原点を通過するLee-Yangゼロのcutが存在



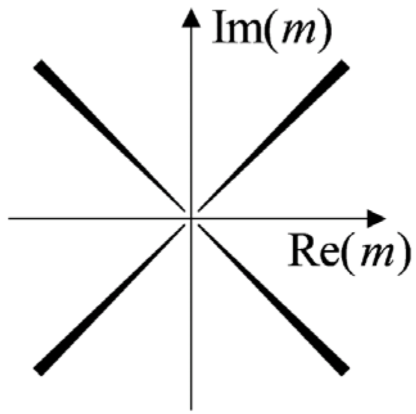
[QCD真空におけるLee-Yangゼロ]

Leutwyler-Smilga (PRD92)

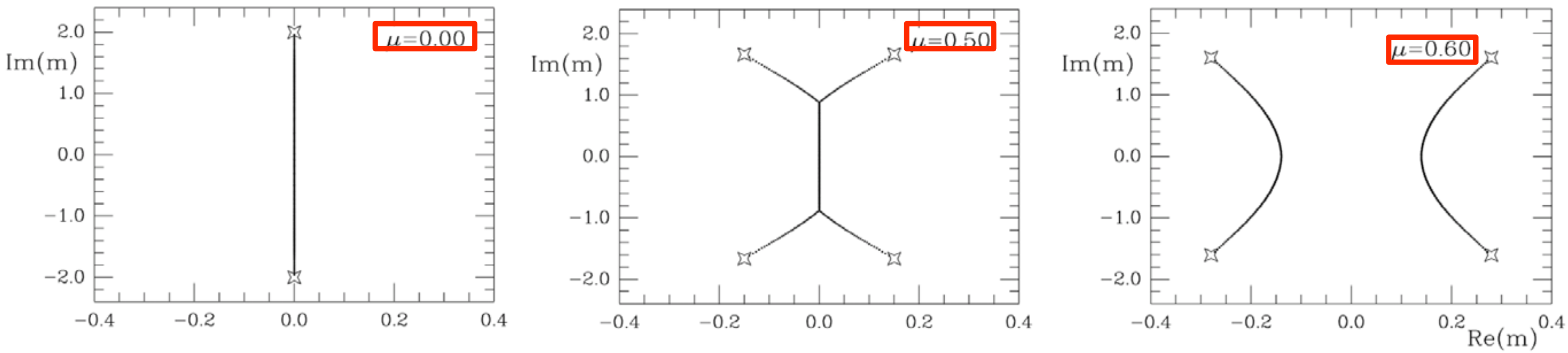
Lee-Yang zeros at high density

- 高密度極限での漸近的な分配関数とLee-Yangゼロ:
  NY-Kanazawa (PRL2009)

$$Z \sim x^{-5/2} \cos\left(4ix - \frac{3\pi}{4}\right) \qquad |x| = 3V|m|^2\Delta^2/\pi^2 \gg 1$$



- ランダム行列モデルによる予言 : Halasz-Jackson-Verbaarschot (PRD97)



- 高密度ではカイラル対称性は漸近的に回復

まとめ

新しい有限体積領域（ε-regime）における高密度QCD

1. 分配関数は高密度極限とQCD真空で同じ関数形
2. カラー超伝導のギャップΔがDiracスペクトルを支配
3. X字型Lee-Yangゼロによる漸近的なカイラル対称性の回復

展望

1. 普遍的なスペクトル関数？新しいランダム行列理論？[★★★]
   [参考] QCD真空：Shuryak-Verbaarschot (NPA93); Verbaarschot-Zahed (PRL93)
2. 有限密度におけるBanks-Casher関係式？[★★★]
3. 格子QCDによるDiracスペクトル：Z(2)対称性はあるか？ Δは？[★★]
4. 中間密度領域では？[★★]
5. adjoint fermionなどのQCD-likeな理論では？[★]

<u>Back up slides</u>

Abstract

カラー超伝導の実現する高密度QCDにおいて、以下の諸性質を厳密に示した。

1. 超伝導ギャップΔで特徴づけられる新しい有限体積領域（ε-領域）の存在
2. ε-領域における分配関数の形がQCD真空と高密度極限で完全に一致
3. 高密度QCDのDirac固有値に対するスペクトル和則
   - ✓ ギャップΔがDirac固有値の分布を支配
   - ✓ ダイクォーク凝縮の$Z(2)_L \times Z(2)_R$対称性がDirac固有値分布と関係
7. 高密度QCDにおけるX字型の分配関数のゼロ点（Lee-Yangゼロ）分布

これは2-color QCDなどの理論にも拡張可能であり、原理的に格子QCDで確認できる。同時に、高密度QCDの新たなユニバーサリティをもつランダム行列理論が構築できる可能性を示唆している！[→金澤さんのポスター]

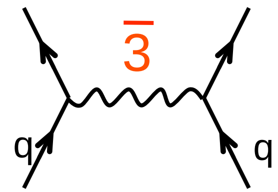
Color Superconductivity

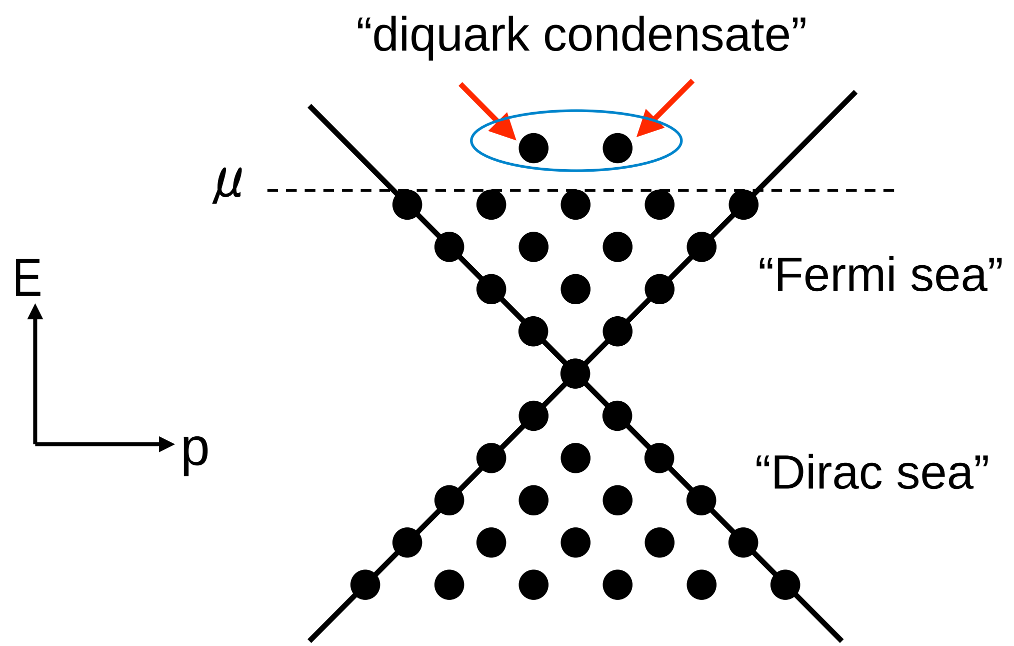
- QCD at high density → *asymptotic free* Fermi surface

- Attractive channel → Cooper instability

  $[3]_C \times [3]_C = [6]_C + [\bar{3}]_C$

  $$(\tau_a)_{ij}(\tau_a)_{kl} = \frac{2}{3}(\tau_S)_{ik}(\tau_S)_{lj} \underline{- \frac{4}{3}(\tau_A)_{ik}(\tau_A)_{lj}}$$



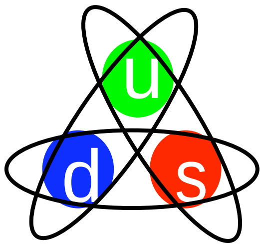


Color-Flavor Locking (CFL)

- Pairing channel
  - s-wave pairing, spin singlet → Dirac antisymmetric
  - Attractive channel → color antisymmetric
  - Pauli principle → flavor antisymmetric
  - [U(1)A anomaly → Lorentz scalar]

- 3-flavor limit: Color-Flavor Locking (CFL)   Alford-Rajagopal-Wilczek (NPB1999)

$$\underbrace{\epsilon_{ijk}}_{u,d,s}\underbrace{\epsilon_{abc}}_{r,g,b}\Delta_{ia} \sim \langle (q_L)^j_b C (q_L)^k_c \rangle = -\langle (q_R)^j_b C (q_R)^k_c \rangle$$



- Gauge-invariant order parameter

  e.g.) $\langle q^a_{Li} q^b_{Lj} \bar{q}^k_{Ra} \bar{q}^l_{Rb} \rangle \sim \langle q^a_{Li} q^b_{Lj} \rangle \langle \bar{q}^k_{Ra} \bar{q}^l_{Rb} \rangle \sim \Delta^2 \epsilon_{ijm} \epsilon^{klm}$

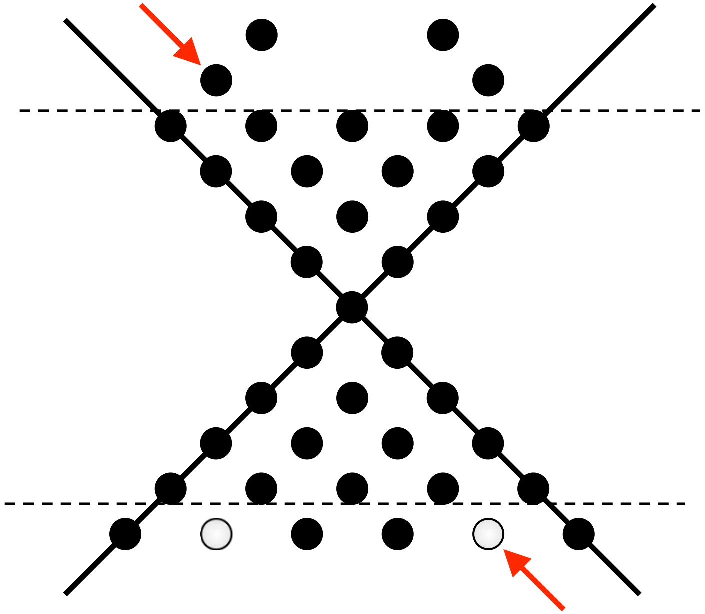
- Symmetry breaking pattern:

$$SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_B \times U(1)_A \to SU(3)_V \times Z(2)_L \times Z(2)_R$$

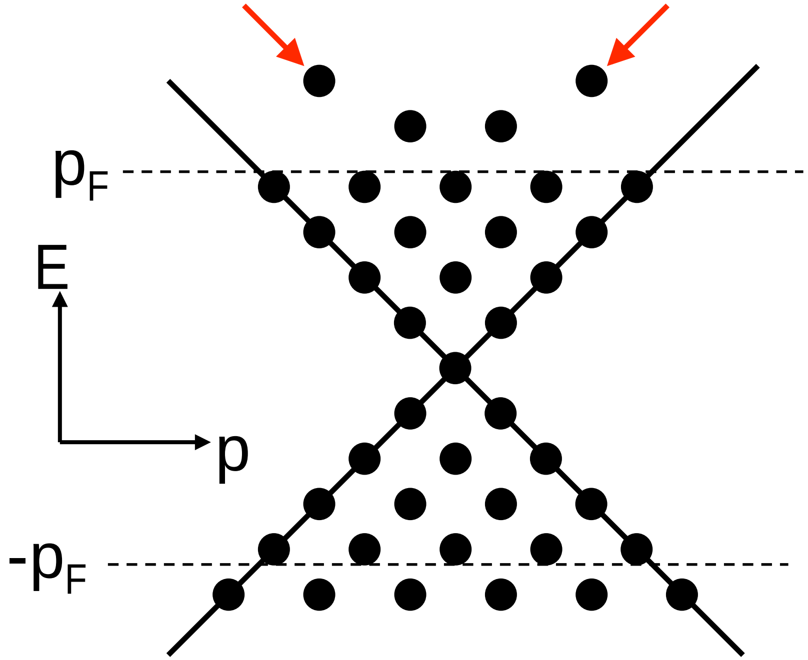
Chiral vs. Diquark condensates

➢ Chiral condensate

➢ Diquark condensate



Y. Nambu ('60)



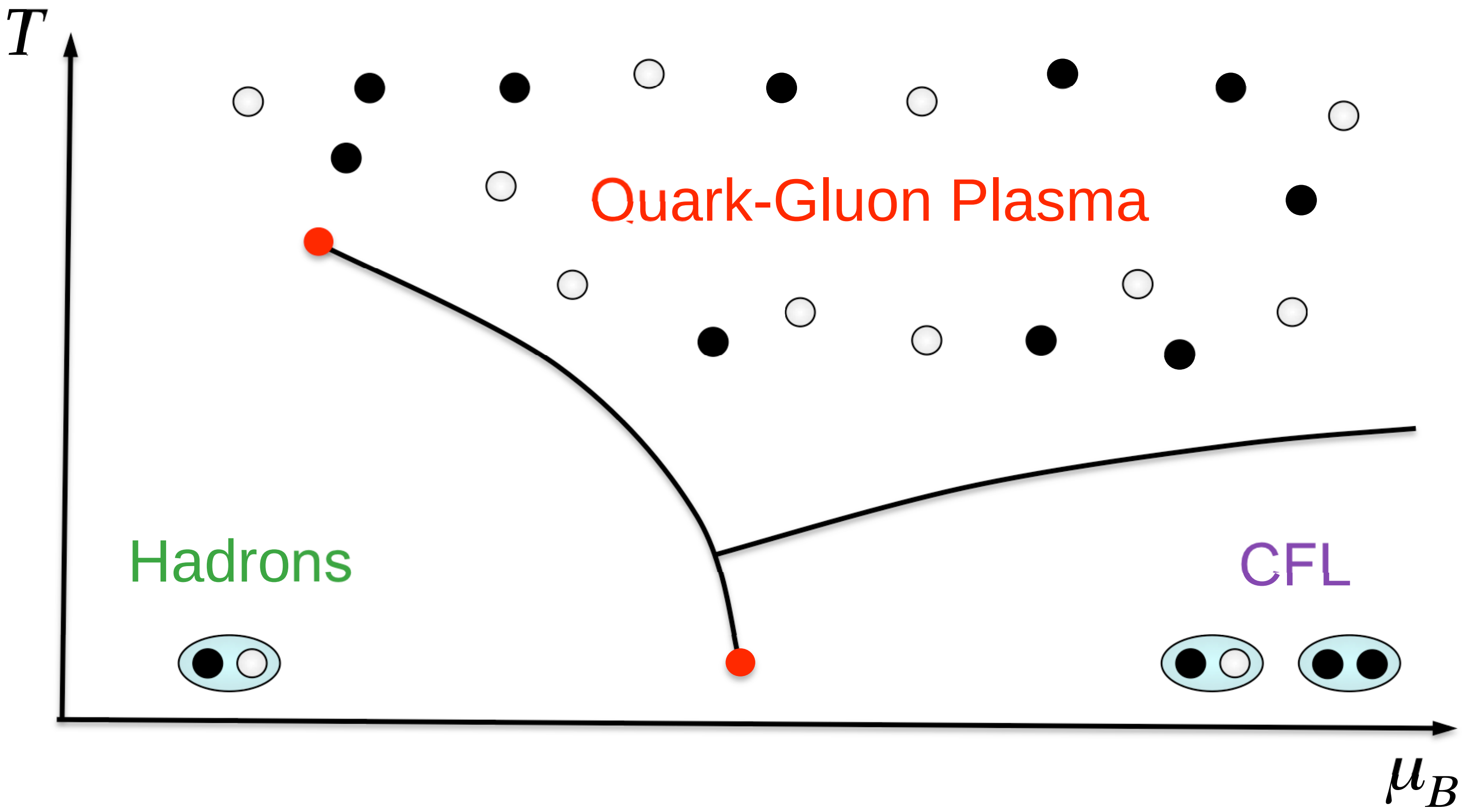
Quark-hadron continuity

Continuity between hadronic matter and quark matter
(color-flavor locking)

Phases	Hadrons (3-flavor)	Color-flavor locking
Symmetry breaking	$SU(3)_L \times SU(3)_R \rightarrow SU(3)_{L+R}$	$SU(3)_L \times SU(3)_R \times SU(3)_C \times U(1)_B \rightarrow SU(3)_{L+R+C}$
Order parameter	Chiral condensate	Diquark condensate
Elementary excitations	NG bosons (**π** etc)	NG bosons
	Vector mesons (**ρ** etc)	Gluons
	Baryons	Quarks

Schäfer-Wilczek (PRL1999)

Possible QCD phase diagram



- アノマリーに由来する高密度QCDの臨界点 NJLモデルにおけるベクトル型相互作用
- クォーク・ハドロン連続性と関係？

Hatsuda-Tachibana-NY-Baym (PRL2006)
Kitazawa-Koide-Kunihiro-Nemoto (PTP2002)
Schafer-Wilczek (PRL1999)