

凝縮体がある冷却原子系の 非平衡Thermo Field Dynamics

2009年9月3日

基研研究会「熱場の量子論とその応用」

中村祐介, 須永知夏^A, 峰真如^B, 奥村雅彦^{CD}, 山中由也

早大基幹理工電子光システム, 早大先進理工物理^A,
早稲田大学本庄高等学院^B, 原子力機構シ計セ^C, CREST(JST)^D

凝縮体がある冷却原子系の 非平衡Thermo Field Dynamics

目次

- 冷却原子系について
- 平衡Thermo Field Dynamics (TFD)について
- 非平衡TFDについて
 - ✓ 凝縮体が存在しない場合の量子輸送方程式
 - ✓ 凝縮体が存在する場合の量子輸送方程式
- 数値計算
- まとめと今後の展望

冷却原子系

特徴

- 希薄
- 相互作用が弱い
- 実験制御性が高い
- BEC (ボソンの場合)

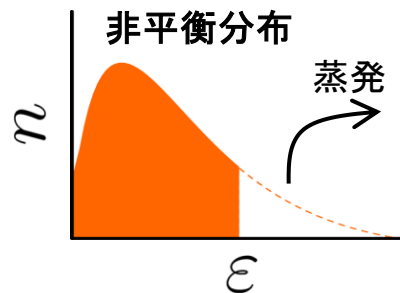
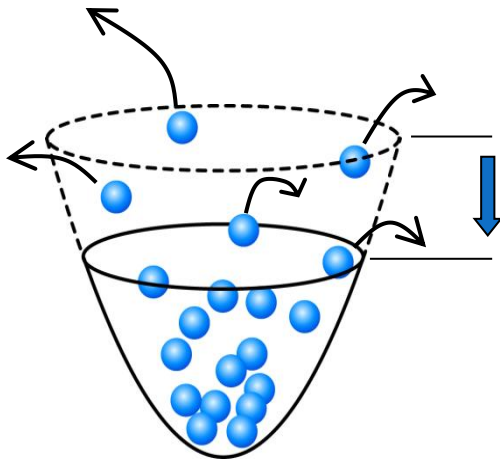
$$T_c \sim \mu\text{K}$$



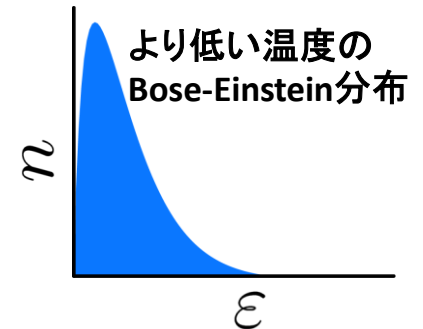
熱緩和がゆっくり
熱場の理論の検証に最適

どうやって冷却するか？

蒸発冷却法: 捕捉ポテンシャルを下げ、高いエネルギーの原子を蒸発させ、冷却する



時間発展



この非平衡過程を記述するのが量子輸送方程式

非平衡Thermo Field Dynamics (非平衡TFD)を用いて、 熱緩和過程を記述する量子輸送方程式を導出する。

今回扱うのは

1、凝縮体がない場合：
(転移温度より高温)



2、凝縮体がある場合：
(転移温度より十分低温)



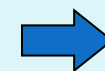
非凝縮気体 = 熱平衡なら
Bose-Einstein分布

凝縮体があると・・・様々な興味深い現象がある。例えば、

励起エネルギーが負になる場合がある(例えば、光学格子中を凝縮体が流れる場合)

B. Wu and Q. Niu, Phys. Rev. A **64**, 061603(R) (2001).

すると、負のエネルギーモードに次々に励起が起こり、
非凝縮体がどんどん増加 ⇒ 凝縮体がなくなる



Landau不安定性

まずは、平衡TFDを・・・

平衡 Thermo Field Dynamics (TFD)

熱的な状況では物理量は混合期待値であたえられる。 $\langle A \rangle = \text{Tr}[\rho A] = \sum_n \langle\langle n | \rho A | n \rangle\rangle$

★ 混合期待値を純粋期待値で書けるか？ \rightarrow 空間を広げれば**可能**！ \rightarrow **TFD**

TFDでは、

チルダ演算子を導入、自由度を倍加する

$$a \rightarrow a, \tilde{a}$$

$$\left[\begin{array}{l} [a, a^\dagger] = [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1 \\ [a, \tilde{a}] = [a, \tilde{a}^\dagger] = 0 \\ f = e^{-\beta\omega} \\ cd = 1 - f \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

$\langle 0 |$ と $|0 \rangle$ どちらに \rightarrow 熱の情報を持たせるかという自由度

次のような状態を考える (**熱的真空**)

$$|0\rangle = c \sum_{n=0}^{\infty} f^{\alpha n} |n, \tilde{n}\rangle$$

$$\langle 0| = d \sum_{n=0}^{\infty} f^{(1-\alpha)n} \langle\langle n, \tilde{n}|$$

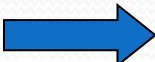
$$\langle 0|A|0\rangle = \text{Tr}[\rho A] = \langle A \rangle$$

純粋期待値で $\langle A \rangle$ を表すことができる

熱的Bogoliubov変換

a, \tilde{a} は熱的真空を消去しない $a|0\rangle \neq 0$
 $\tilde{a}|0\rangle \neq 0$

$$\begin{aligned} a^\mu &= B^{-1, \mu\nu} \xi^\nu \\ \bar{a}^\mu &= \bar{\xi}^\nu B^{\nu\mu} \end{aligned} \quad \text{と熱的Bogoliubov変換}$$

 $\xi, \tilde{\xi}$ は熱的真空を消去

熱的二重項

$$\begin{aligned} a^\mu &= \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix} & \xi^\mu &= \begin{pmatrix} \xi \\ \tilde{\xi}^\dagger \end{pmatrix} \\ \bar{a}^\mu &= (a^\dagger \quad -\sigma \tilde{a}) & \bar{\xi}^\mu &= (\xi^\dagger \quad -\sigma \tilde{\xi}) \end{aligned}$$

ボソン: $\sigma = 1$
 フェルミオン: $\sigma = -1$

$$B = \sqrt{1 + \sigma n} e^{s\tau_3} \begin{pmatrix} 1 & -f^\alpha \\ -\sigma f^{1-\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \sqrt{1 + \sigma n} \begin{pmatrix} 1 & f^\alpha \\ \sigma f^{1-\alpha} & 1 \end{pmatrix} e^{-s\tau_3}$$

α, s : 自由度

n : Bose-Einstein分布、
 Fermi-Dirac分布

チルダルール

$$(AB)^\sim = \tilde{A}\tilde{B}$$

$$(c_1 A + c_2 B)^\sim = c_1^* \tilde{A} + c_2^* \tilde{B}$$

$$\tilde{\tilde{A}} = \sigma A$$

$$\hat{H} = H - \tilde{H}$$

非平衡系：凝縮体が存在しない場合

冷却ボース気体のハミルトニアン


$$H = \int d^3x \left[\psi^\dagger(x) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V(\mathbf{x}) - \mu \right) \psi(x) + g \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi(x) \right]$$

g 相互作用定数
 $V(\mathbf{x})$ 捕捉ポテンシャル

$$H_0 = \sum_{\ell} \omega_{\ell} a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell}$$

$$\psi_{\ell}(x) = \sum_{\ell} u_{\ell}(x) a_{\ell}(t)$$

$$[\psi(\mathbf{x}), \psi^{\dagger}(\mathbf{x}')] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

TFD \sim  $a \rightarrow a, \tilde{a}$
 $\hat{H} = H - \tilde{H}$

$$a_{\ell}^{\mu} = \begin{pmatrix} a_{\ell} \\ \tilde{a}_{\ell}^{\dagger} \end{pmatrix}^{\mu} \quad \bar{a}_{\ell}^{\mu} = \bar{\xi}_{\ell}^{\nu} B_{\ell}^{\nu\mu}$$

$$\bar{a}_{\ell}^{\nu} = (a_{\ell}^{\dagger} \quad -\tilde{a}_{\ell})^{\nu} \quad a_{\ell}^{\mu} = B_{\ell}^{-1, \mu\nu} \xi_{\ell}^{\nu}$$

熱的真空

$$\xi_{\ell} |0\rangle = 0 \quad a_{\ell} |0\rangle \neq 0$$

$$\langle 0 | \xi_{\ell}^{\dagger} = 0 \quad \langle 0 | a_{\ell}^{\dagger} \neq 0$$

$\alpha = 1$ を採用する。(摂動計算のため)
T. S. Evans *et al.*, J. Math. Phys. **33**, 370 (1992).

$$B_{\ell}(t) = \begin{pmatrix} 1 + n_{\ell}(t) & -n_{\ell}(t) \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n_{\ell}(t) = \langle 0 | a_{\ell}^{\dagger}(t) a_{\ell}(t) | 0 \rangle$$

非平衡な分布関数。未知関数。
 $n_{\ell}(t)$ の時間依存性を求めたい。
= 量子輸送方程式

非摂動ハミルトニアン

相互作用描像 $\xi_\ell^\mu(t) = \xi_\ell^\mu e^{-i\omega_\ell t}$ となるようにする



$$i \frac{d}{dt} a_\ell^\mu = [a_\ell^\mu, \hat{H}_Q]$$

$$\hat{H}_Q = \hat{H}_0 - \hat{Q}$$

熱的カウンタ一項

ただし、 $\hat{Q} = \sum_\ell \bar{\xi}_\ell^\mu \begin{pmatrix} 0 & -in_\ell \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \xi_\ell^\nu$

$B_\ell(t)$ が時間依存すること起因

時間依存性する $n_\ell(t)$ を含むため

$\hat{H}_Q = \hat{H}_0 - \hat{Q}$ を非摂動ハミルトニアンにとる。

摂動ハミルトニアンは $\hat{H}_I + \hat{Q}$

非摂動伝播関数 $\Delta_{\ell\ell'}^{\mu\nu}(t, t') = -i \langle 0 | T [a_\ell^\mu(t) \bar{a}_{\ell'}^\nu(t')] | 0 \rangle$

伝播関数 $G_{\ell\ell'}^{\mu\nu}(t, t') = -i \langle 0 | T [a_{H\ell}^\mu(t) \bar{a}_{H\ell'}^\nu(t')] | 0 \rangle$

$$a_\ell^\mu = \begin{pmatrix} a_\ell \\ \tilde{a}_\ell^\dagger \end{pmatrix}^\mu$$

$$\bar{a}_\ell^\nu = (a_\ell^\dagger \quad -\tilde{a}_\ell)^\nu$$

$$\hat{H}_0 = \sum_\ell \omega_\ell \bar{a}_\ell^\mu a_\ell^\mu$$

$$= \sum_\ell \omega_\ell \bar{\xi}_\ell^\mu \xi_\ell^\mu$$

伝播関数

$$\Delta_{\ell\ell'}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = B_{\ell}^{-1, \mu\mu'}(t_1) \begin{pmatrix} \Delta_{\ell\ell'}^R(t_1, t_2) & 0 \\ 0 & \Delta_{\ell\ell'}^A(t_1, t_2) \end{pmatrix}^{\mu'\nu'} B_{\ell'}^{\nu'\nu}(t_2)$$

$$G_{\ell\ell'}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = B_{\ell}^{-1, \mu\mu'}(t_1) \begin{pmatrix} G_{\ell\ell'}^R(t_1, t_2) & g_{\ell\ell'}^{12}(t_1, t_2) \\ 0 & G_{\ell\ell'}^A(t_1, t_2) \end{pmatrix}^{\mu'\nu'} B_{\ell'}^{\nu'\nu}(t_2)$$

まだ、熱的カウンター項 \hat{Q} を決めていない。

どう決めるか？ Chu-Umezawaの繰り込み条件: $g_{\ell\ell}^{12}(t, t) = 0$

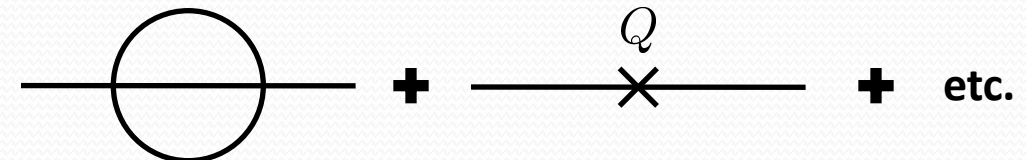
短時間で、 $G_{\ell\ell}$ が $\Delta_{\ell\ell}$ と同じ構造を持つことを要請

H. Chu and H. Umezawa, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 1693 (1995).



これにより、量子輸送方程式が得られる

量子輸送方程式 (凝縮体なし)

今回は 2loopまでとる $G_{\ell\ell'}^{\mu\nu}(t_1, t_2) =$  $+$ $+$ etc.

\leftarrow n-loopでも計算可能

$$\dot{n}_\ell(t) = 4g^2 \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} \int_{-\infty}^t ds \left(\underbrace{\cos[(\omega_\ell - \omega_1 - \omega_2 + \omega_3)(t - s)]}_{\text{blue dots}} \underbrace{|W_{\ell_1\ell_2; \ell_3\ell}|^2}_{\text{green dots}} \right. \\ \left. \times \underbrace{\{n_1 n_2 (1 + n_3)(1 + n_\ell) - (1 + n_1)(1 + n_2)n_3 n_\ell\}_s}_{\text{red dots}} \right)$$

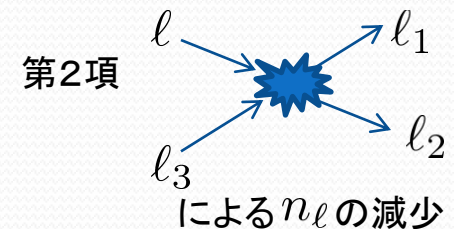
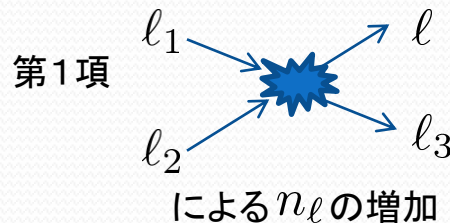
● エネルギー保存に対応

..... が時間依存しなければ $\delta(\omega_\ell - \omega_1 - \omega_2 + \omega_3)$

● 相対的な遷移確率

$$W_{\ell_1\ell_2; \ell_3\ell} = \int d^3x u_{\ell_1} u_{\ell_2} u_{\ell_3}^* u_\ell^*$$

● 粒子の交換を表す



2loopレベルでは良く知られた形に対応する
 M. Holland *et al.*, Int. J. Mod. Phys. **A9**, 1153 (1994).
 D. Jaksch *et al.*, Phys. Rev. A **56**, 575 (1997).

非平衡系：凝縮体が存在する場合

$$H = \int d^3x \left[\psi^\dagger(x) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V(\mathbf{x}) - \mu \right) \psi(x) + g\psi^\dagger(x)\psi^\dagger(x)\psi(x)\psi(x) \right]$$



凝縮相と非凝縮相に分割

$$\psi(x) = \zeta(\mathbf{x}) + \varphi(x)$$

凝縮相は時間依存しないと仮定

演算子 φ について二次形式の部分を H_0 に

$$H_0 = \frac{1}{2} \int d^3x \begin{pmatrix} \varphi^\dagger & -\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^\dagger \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{\nabla^2}{2m} + V(\mathbf{x}) - \mu + 2g|\zeta(\mathbf{x})|^2$$

$$\mathcal{M} = g\zeta^2(\mathbf{x})$$

BdGの完全系で展開

$$\begin{pmatrix} b_\ell \\ b_\ell^\dagger \end{pmatrix} = \int d^3x W_\ell \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^\dagger \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_\ell^\dagger & -b_\ell \end{pmatrix} = \int d^3x \begin{pmatrix} \varphi^\dagger & -\varphi \end{pmatrix} W_\ell^{-1}$$

$$\left[W_\ell = \sigma_3 \begin{pmatrix} \mathbf{y}_\ell^\dagger \\ \mathbf{z}_\ell^\dagger \end{pmatrix} \sigma_3 \quad W_\ell^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_\ell & \mathbf{z}_\ell \end{pmatrix} \right]$$

$$H_0 = \sum_\ell \omega_\ell b_\ell^\dagger b_\ell \quad [b_\ell, b_{\ell'}^\dagger] = \delta_{\ell\ell'}$$

Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L} \end{pmatrix} \mathbf{y}_\ell(\mathbf{x}) = \omega_\ell \mathbf{y}_\ell(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{y}_\ell = \sigma_1 \mathbf{z}_\ell^* \quad \int \mathbf{y}_{\ell'}^\dagger \sigma_3 \mathbf{y}_\ell = \delta_{\ell\ell'}$$

$$\int \mathbf{y}_{\ell'}^\dagger \sigma_3 \mathbf{z}_\ell = 0 \quad \int \mathbf{z}_{\ell'}^\dagger \sigma_3 \mathbf{z}_\ell = -\delta_{\ell\ell'}$$

H. Matsumoto and S. Sakamoto, Prog. Theor. Phys. **107**, 679 (2002).

M. Mine *et al.*, Ann. Phys. **322**, 2327 (2007).

ゼロモード、複素モードは無視

自由度を倍加して、TFDへ

$$\varphi, \varphi^\dagger$$

$$\varphi^\alpha$$



$$\varphi, \varphi^\dagger, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^\dagger$$

$$\varphi^{\nu\alpha}$$

- φ から b_ℓ 2×2 の BdG 変換 W
- b_ℓ から ξ_ℓ 2×2 の 熱的 Bogoliubov 変換 B



合わせて 4×4

$$\varphi^{\mu\alpha} = \sum_\ell W^{-1, \alpha\beta\mu\nu} b_\ell^{\mu\beta}$$

$$\tilde{\varphi}^{\nu\beta} = \sum_\ell \bar{b}_\ell^{\nu\alpha} W_l^{\mu\nu\alpha\beta}$$

$$b_\ell^{\mu\alpha} = B_l^{-1, \mu\nu\alpha\beta} \xi_\ell^{\nu\beta}$$

$$\bar{b}_\ell^{\nu\beta} = \xi_\ell^{\mu\alpha} B_l^{\mu\nu\alpha\beta}$$

BdG の足
 $\alpha, \beta = 1, 2$

TFD の足
 $\mu, \nu = 1, 2$

$$[b_\ell, b_{\ell'}^\dagger] = [\tilde{b}_\ell, \tilde{b}_{\ell'}^\dagger] = \delta_{\ell\ell'}$$

$$[b_\ell, \tilde{b}_{\ell'}] = [b_\ell, \tilde{b}_{\ell'}^\dagger] = 0$$

$$b_\ell^{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} b_\ell^{11} \\ b_\ell^{21} \\ b_\ell^{12} \\ b_\ell^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_\ell \\ \tilde{b}_\ell^\dagger \\ b_\ell \\ \tilde{b}_\ell \end{pmatrix}^{\mu\alpha}$$

$$\bar{b}_\ell^{\mu\alpha} = (\bar{b}_\ell^{11} \quad \bar{b}_\ell^{21} \quad \bar{b}_\ell^{12} \quad \bar{b}_\ell^{22})$$

$$= (b_\ell^\dagger \quad -\tilde{b}_\ell \quad -b_\ell \quad \tilde{b}_\ell^\dagger)^{\mu\alpha}$$

非摂動ハミルトニアンと伝搬関数

非摂動Hamiltonian

$$\hat{H}_Q = \hat{H}_0 - \hat{Q}$$

$$\hat{H}_0(t) = \int d^3x \frac{1}{2} (\varphi^\dagger \quad -\varphi) \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^\dagger \end{pmatrix} - (\text{T.C.})$$

$$\hat{Q}(t) = -\frac{i}{2} \sum_{\ell} \dot{n}_{\ell}(t) \bar{\xi}_{\ell}^{\mu\alpha} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{array} \right)^{\mu\alpha\nu\beta} \xi_{\ell}^{\nu\beta} \quad (\text{熱的カウンタ一項})$$

伝搬関数

$$\Delta^{\mu\alpha\nu\beta}(x, x') = -i \langle 0 | T [\varphi^{\mu\alpha}(x) \bar{\varphi}^{\nu\beta}(x')] | 0 \rangle,$$

$$G^{\mu\alpha\nu\beta}(x, x') = -i \langle 0 | T [\varphi_{\text{H}}^{\mu\alpha}(x) \bar{\varphi}_{\text{H}}^{\nu\beta}(x')] | 0 \rangle,$$

$$d_{\ell\ell'}^{\mu\alpha\nu\beta}(t, t') = -i \langle 0 | T [\xi_{\ell}^{\mu\alpha}(t) \bar{\xi}_{\ell'}^{\nu\beta}(t')] | 0 \rangle,$$

$$g_{\ell\ell'}^{\mu\alpha\nu\beta}(t, t') = -i \langle 0 | T [\xi_{\text{H}\ell}^{\mu\alpha}(t) \bar{\xi}_{\text{H}\ell'}^{\nu\beta}(t')] | 0 \rangle.$$

伝搬関数と繰り込み条件

今回は、1loopで計算。(n-loopでも計算可能)

$$G_{ll'}^{\mu\nu (1\text{-loop})}(t_1, t_2) = \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \times \text{---}$$

$$\left[H_I^{(3)} = \int d^3x g(\zeta^* \varphi^\dagger \varphi \varphi + \zeta \varphi^\dagger \varphi^\dagger \varphi) \right]$$

熱的カウンター項を決めるChu-Umezawaの繰り込み条件 $g_{ll}^{1211}(t, t) = 0$

➡ 凝縮体がある場合の量子輸送方程式が導出される

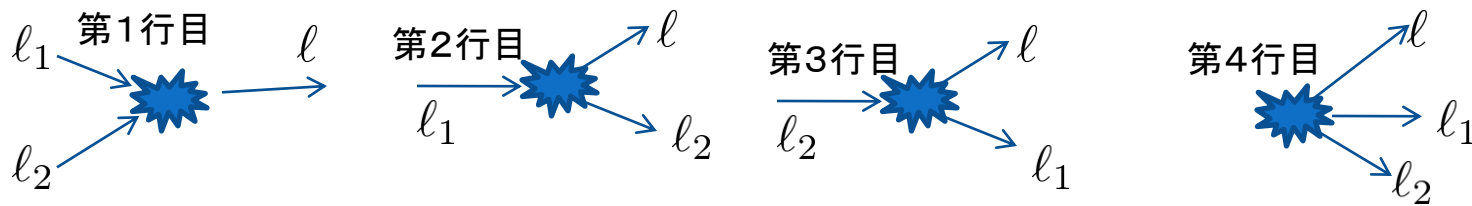
量子輸送方程式(凝縮体あり)

$$\dot{n}_\ell(t) = 4g^2 \sum_{l_1, l_2} \int_{-\infty}^t ds \left[\right.$$

$$\begin{aligned} & \cos[(\omega_\ell - \omega_1 - \omega_2)(t - s)] \left| (\mathbf{y}_\ell, \boldsymbol{\chi}_{yy}) \right|^2 \left\{ (1 + n_\ell)n_1n_2 - n_\ell(1 + n_1)(1 + n_2) \right\}_s \\ & + \cos[(\omega_\ell - \omega_1 + \omega_2)(t - s)] \left| (\mathbf{y}_\ell, \boldsymbol{\chi}_{yz}) \right|^2 \left\{ (1 + n_\ell)n_1(1 + n_2) - n_\ell(1 + n_1)n_2 \right\}_s \\ & + \cos[(\omega_\ell + \omega_1 - \omega_2)(t - s)] \left| (\mathbf{y}_\ell, \boldsymbol{\chi}_{zy}) \right|^2 \left\{ (1 + n_\ell)(1 + n_1)n_2 - n_\ell n_1(1 + n_2) \right\}_s \\ & + \cos[(\omega_\ell + \omega_1 + \omega_2)(t - s)] \left| (\mathbf{y}_\ell, \boldsymbol{\chi}_{zz}) \right|^2 \left\{ (1 + n_\ell)(1 + n_1)(1 + n_2) - n_\ell n_1 n_2 \right\}_s \end{aligned} \left. \right]$$

- エネルギー保存に対応
- 相対的な遷移確率
- 粒子の交換を表す

$$\left(\begin{aligned} (\mathbf{y}, \boldsymbol{\chi}) &= \int d^3x \mathbf{y}^\dagger \sigma_3 \boldsymbol{\chi} \\ \chi_{yz}^\alpha &= \zeta^{\bar{\alpha}} \mathbf{y}_1^\alpha z_2^\alpha + \zeta^\alpha \mathbf{y}_1^\alpha z_2^{\bar{\alpha}} + \zeta^\alpha \mathbf{y}_1^{\bar{\alpha}} z_2^\alpha \end{aligned} \right)$$



…とそれらの逆過程

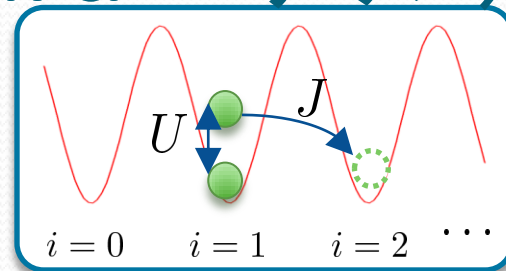
第1,2,3行目 Beliaev減衰, Landau減衰

第4行目 Landau不安定性がある場合、熱緩和を阻害する項(triple production term)

数値計算 (1D Bose-Hubbardモデル)

1D Bose-Hubbardモデル

$$H = \sum_i \left[-J\psi_i^\dagger (\psi_{i+1} + \psi_{i-1}) - \mu\psi_i^\dagger\psi_i + \frac{U}{2}\psi_i^\dagger\psi_i^\dagger\psi_i\psi_i \right]$$



流れのある凝縮体が存在するとする

$$\psi_i = \zeta_i + \varphi_i \quad \langle 0|\varphi_i|0\rangle = \zeta_i = \sqrt{\frac{N_0}{I_s}} e^{ikx_i}$$

J : ホッピング項

U : 相互作用項

I_s : 格子数

k : 凝縮体の流れ

計算条件

適当な非平衡分布を初期条件に、時間発展を計算

$$I_s = 21$$

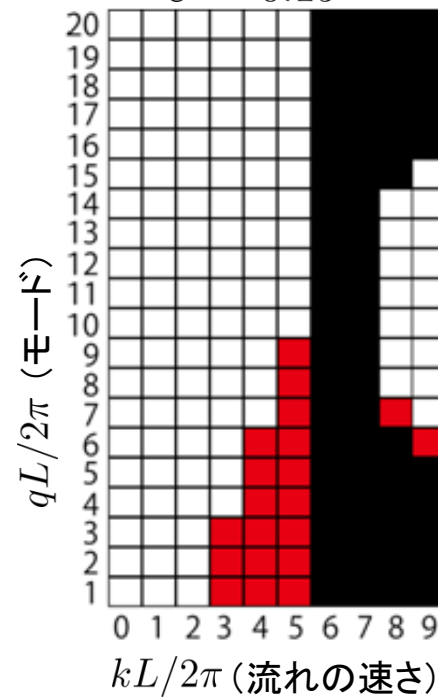
$$N = 210$$

$$U = 0.1J$$

- $k = 2$ (安定な領域)
- $k = 3$ (Landau不安定な領域)

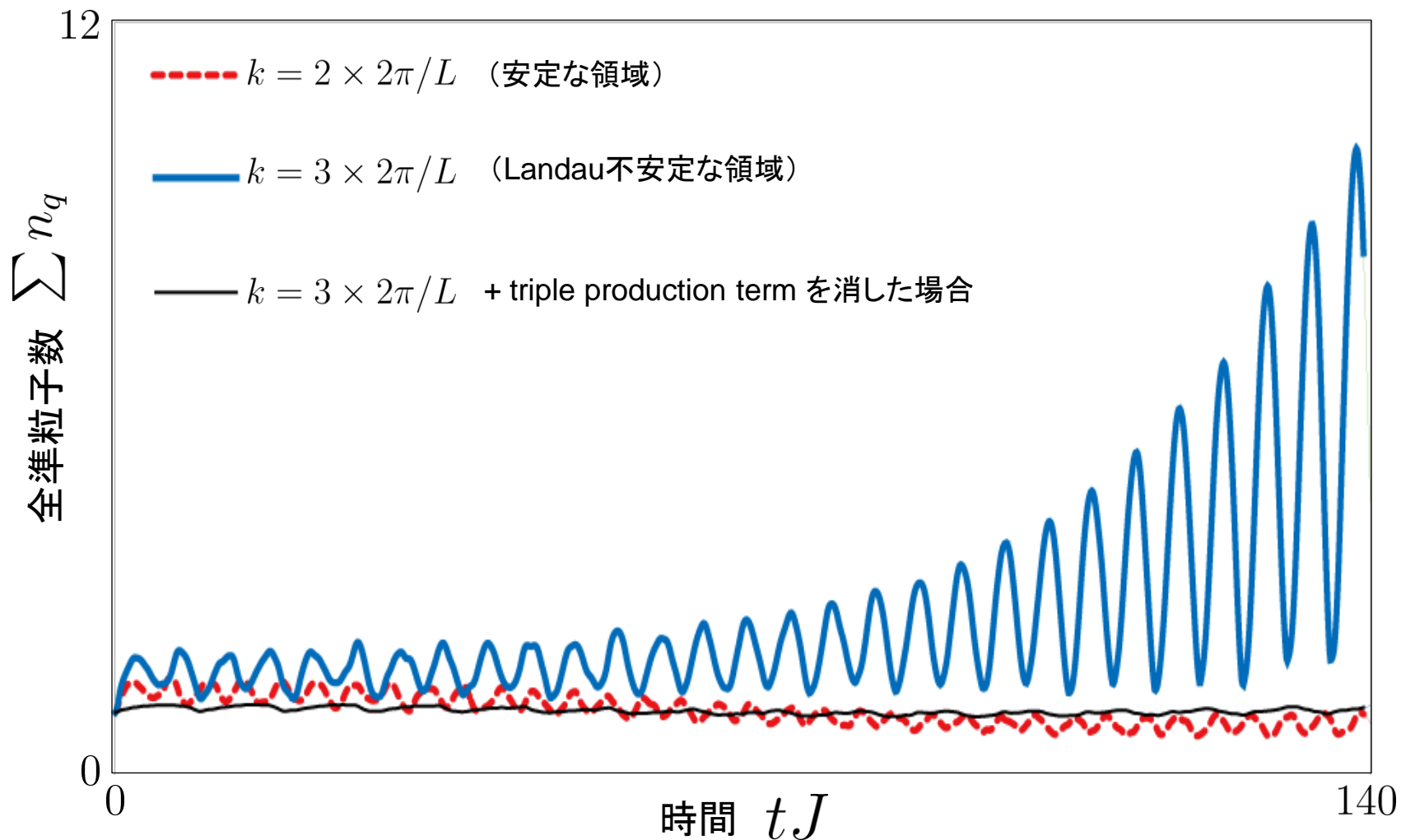
BdG固有値の相図

$$U = 0.1J$$



- Landau不安定なモード
- 動的不安定なモード

適当な非平衡分布を入れて、時間発展



Landau不安定な領域で準粒子数が増加
不安定性による凝縮体崩壊の兆候

まとめ

- 非平衡TFDの立場で、量子輸送方程式を導出した。
 - ✓ 凝縮体が存在しない場合、する場合
- ただし凝縮体が存在する場合、まだ自己無撞着な扱いが出来ていない。
 - ✓ 凝縮体は時間依存しないと仮定
 - ✓ ゼロモードを含んでいない
- Landau不安定性がある場合、triple production term (第4行目の項)が、凝縮体崩壊に重要な役割を果たす。
 - ✓ 数値計算で、崩壊の兆候を確認

今後の展望

ゼロモード、凝縮体の時間依存性、Landau不安定性、動的不安定性、相転移、etc.