

An Introduction to AdS/CFT for Non-specialists

Its Basics, Applications and Limitations

中村 真 (京都大学大学院理学研究科)

このスライドは、講演で使用したスライドに参考文献やコメントを加筆修正したものです。参考文献やコメントは[number]の形で引用し、スライドの末尾で説明を加えています。
なお、ミスプリ・ご質問・ご意見などがございましたらご連絡ください。

なお、聴衆として非専門家を想定し、正確性よりも直観的わかりやすさを重視したことをご了承ください。

Plan to talk

- Part 1 : AdS/CFT対応の基本思想
(AdS/CFT対応は難しくない。)
- Part 2: AdS/CFTのテクニック
(でも、真面目に計算しようとするといろいろある。)
- Part 3: 応用と展望
(何が出来て、何が難しいか。)

Part 1: AdS/CFT対応の基本思想

AdS/CFT対応はconjectureではあるが、
非常に**自然なconjecture**である。

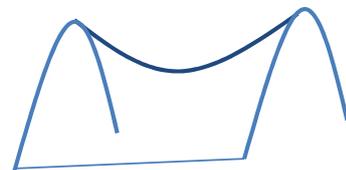
AdS/CFT対応

AdSとは？

AdS: **Anti de Sitter**時空

↑
曲率が負で一定の時空間

↓
de Sitter時空 (曲率が正で一定)

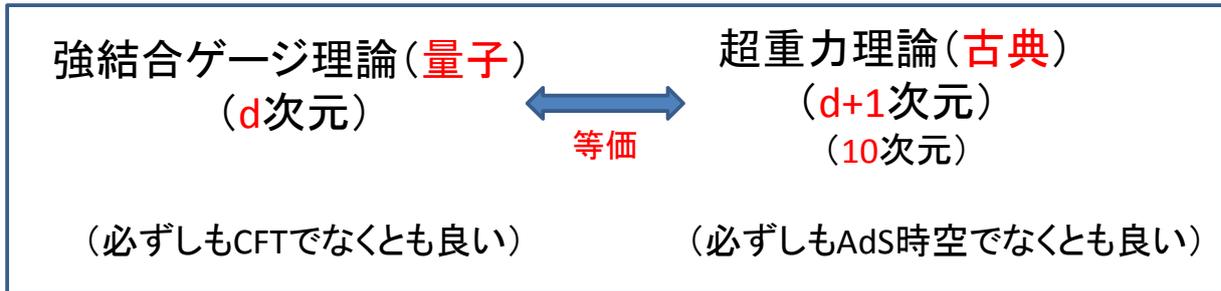


CFTとは？

CFT: **Conformal Field Theory** (共形場理論)
スケール変換のもとで不変な理論 ($\beta=0$)

AdS/CFT対応[0,1]

異なる二つの理論が**等価**であるという主張(予想)



典型的な例

4d $N=4$ SU(N) 超対称Yang-Mills 理論
@ large- N , large 't Hooft coupling



10d type IIB supergravity
on $AdS_5 \times S^5$

こちらの理論の**複雑な計算**が

こちらの理論の**簡単な計算**で
出来てしまう。

AdS/CFT対応の考え方

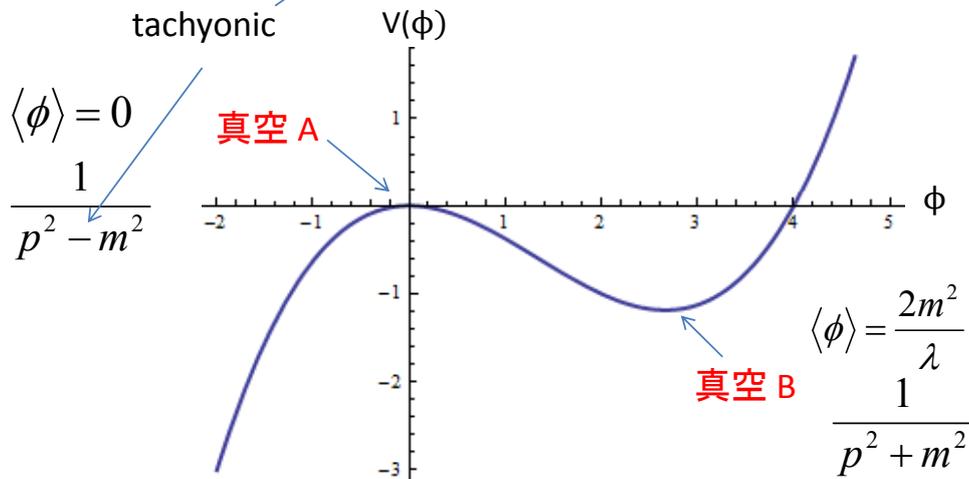
同じ物理量を、**異なる真空**上で展開した摂動論で
記述すると、計算が全く異なるものとなる。

摂動論を展開する**真空をうまく選ぶ**ことで、複雑な計算が
簡単になる場合がある。

まず、場の理論において、そのような例を見てみたい。

例： ϕ^3 -理論 (Euclidean)[2]

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{3!} \phi^3$$

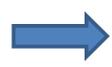


Aまわりの摂動論しか知らない者がBまわりの物理を議論したいとする。どうしたら良いか？

Aの視点では、Bにおいて場が期待値を持っている。

$$\langle \phi \rangle = \frac{2m^2}{\lambda} \leftarrow \text{non-perturbative}$$

これをどのようにしたら計算できるか？



$$L \rightarrow L + J\phi$$

$$\langle \phi \rangle = \left. \frac{\delta S[J]}{\delta J} \right|_{J=0}$$

sourceを導入。
(一点関数、tadpole)

$$\langle \phi \rangle = \begin{array}{c} | \\ \times \\ J \end{array} + \begin{array}{c} | \\ -\lambda \\ \times \quad \times \\ J \quad J \end{array} + \dots \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{c} | \\ \bullet \\ W \end{array}$$

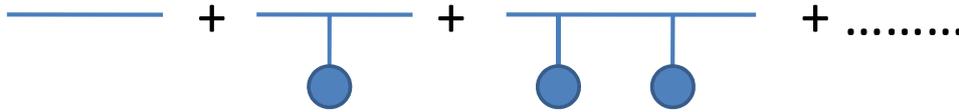
Consistency condition
(Schwinger-Dyson eq.)

$$\begin{array}{c} | \\ \bullet \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} | \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

$$-\frac{1}{m^2} w = -\frac{1}{m^2} (-\lambda) \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{m^2}\right)^2 w^2$$

$$w^2 = -\frac{2m^4}{\lambda} w, \quad \langle \phi \rangle = -\frac{1}{m^2} w = \frac{2m^2}{\lambda}$$

Bまわりでのpropagater (2点関数)



$$\frac{1}{p^2 - m^2} + \frac{1}{p^2 - m^2} \left[(-\lambda) \left(\frac{2m^2}{\lambda} \right) \frac{1}{p^2 - m^2} \right] + \frac{1}{p^2 - m^2} \left[(-\lambda) \left(\frac{2m^2}{\lambda} \right) \frac{1}{p^2 - m^2} \right]^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{p^2 - m^2} \left(\frac{1}{1 - (-\lambda) \left(\frac{2m^2}{\lambda} \right) \frac{1}{p^2 - m^2}} \right) = \frac{1}{p^2 + m^2}$$

← Bにおけるpropagater

Aまわりの摂動論の**無限個**のdiagramの和が
Bまわりでは**たった1個**のdiagramで計算される。

この例で学んだこと

同じ物理量の計算でも、摂動論が立脚する真空を異なるものを選べば、計算手法が大幅に異なってくる。

真空Bまわり

の物理を記述する二つの方法

	真空A	真空B
場の期待値	$2m^2/\lambda$	0
Source	あり (weight: $-2m^4/\lambda$)	なし
2点関数 (古典)	Sourceを挿入した 無限個のdiagramの和	一本のdiagram
	「摂動的真空」	「非摂動的真空」

弦理論への一般化

- 弦理論の構成要素は点粒子ではなく弦。
- 平坦な時空上の摂動論は知られている。
- 超弦理論は10次元で定式化されている。



closed string



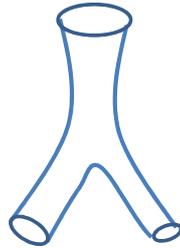
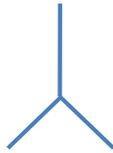
open string

重力場など

ゲージ場など

↑
string長さが無視できる極限では、このような点粒子と同定される。

Diagramは2次元面となる



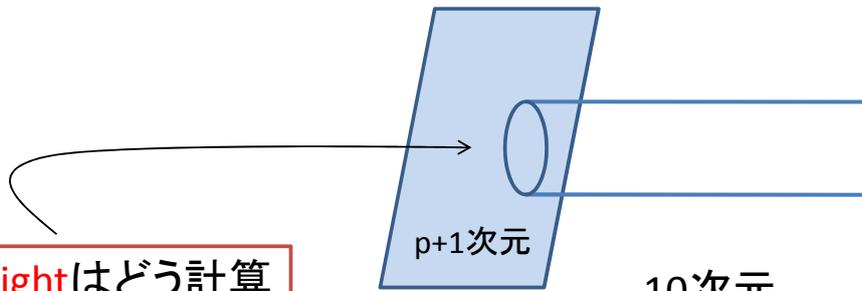
source、一点関数は？



D-brane

Dp-brane[3]

- closed stringの一点関数
- closed stringのdiagramが終端することのできる $p+1$ 次元の超平面(部分空間)



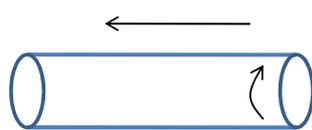
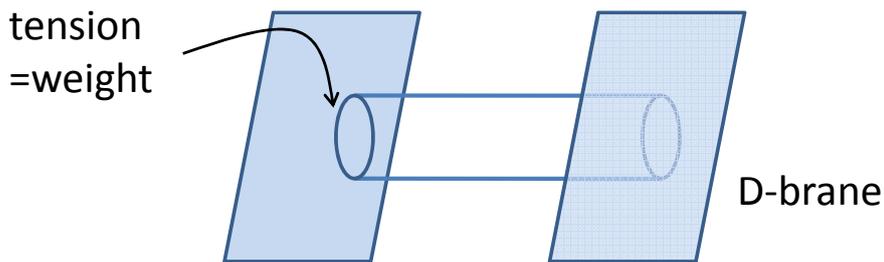
ここのweightはどう計算できるのだろうか？

Dp-brane

10次元

Consistency condition[3]

(Modular invariance)



closed stringがpropagate
していると考えても良いし
open stringがloopを描いて
いると考えても良い。



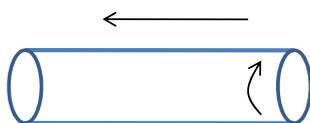
二つの考え方に基づく計算が一致する条件からtensionを計算できる。

$$[5] \text{ tension} = \frac{1}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}}$$

string coupling g_s の逆数に比例: 非摂動的

l_s : string length

さらに

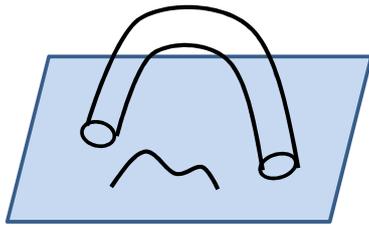


closed stringがpropagate
していると考えても良いし
open stringがloopを描いて
いると考えても良い。



closed stringのtreeはopen stringのloopに対応する！

D-brane[3]

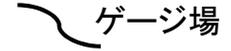


これをopen stringのloop diagramだと見ると.....

このopen stringの端点はD-braneに終端している。



重力



ゲージ場

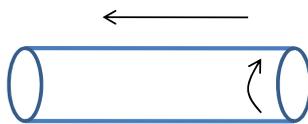
D-brane上にはopen stringが存在する。



D-brane上にはゲージ理論が存在している。

ゲージ理論のcoupling g_{YM} を D3-braneのtensionから読み取ると $g_{YM}^2 = 2\pi g_s$

ということ



closed stringがpropagateしていると考えても良いし open stringがloopを描いていると考えても良い。



closed stringのtreeはopen stringのloopに対応する！

D-braneの存在する弦理論に埋め込むことの出来る理論に対しては

ゲージ理論の1-loopは重力理論のtree

であると言える。

Analogy

	真空A	真空B
場の期待値	$2m^2/\lambda$	0
Source	あり (weight: $-4m^4/\lambda$)	なし
2点関数 (古典)	Sourceを挿入した無限個のdiagramの和	一本のdiagram
	「摂動的真空」	「非摂動的真空」



	真空A	真空B
Gravitonの期待値	あり	0
D-brane	あり (tension: g_s^{-1} に比例)	なし
2点関数 (古典)	D-braneを挿入した無限個のdiagramの和	一本のdiagram
	「平坦な時空」	「曲った時空」

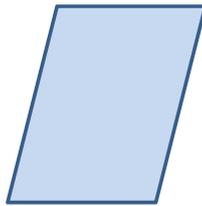
平坦な10次元時空 + D-brane
で構成した弦の摂動論



D-braneの無い曲った10次元時
空で構成した弦の摂動論

同じ物理
の書き換え

D-brane vs. curved space



平坦な時空上のIIB superstring理論
にD3-braneを導入した理論



曲った空間の上での
closed stringの摂動論 ?
(完全には知られていない。しかし、)



弦の長さが無視できる
低エネルギー極限では

弦の長さが無視できる
低エネルギー極限では

IIB supergravity (超重力) 理論
(良く知られている。)

この理論には black 3-brane時空 [4]という解がある

black 3-brane時空上の
IIB supergravity理論に
相当するだろう。

Black 3-brane解

([4]や[3]の文献参照。)

N枚の重なったD3-braneに対応する supergravityの解

Black 3-brane解

3+1次元方向のPoincare不変性

$$ds^2 = H^{-1/2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + H^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2)$$

$$H = 1 + \frac{r_0^4}{r^4}$$

$$r_0 = (4\pi g_s N)^{1/4} l_s$$

string length

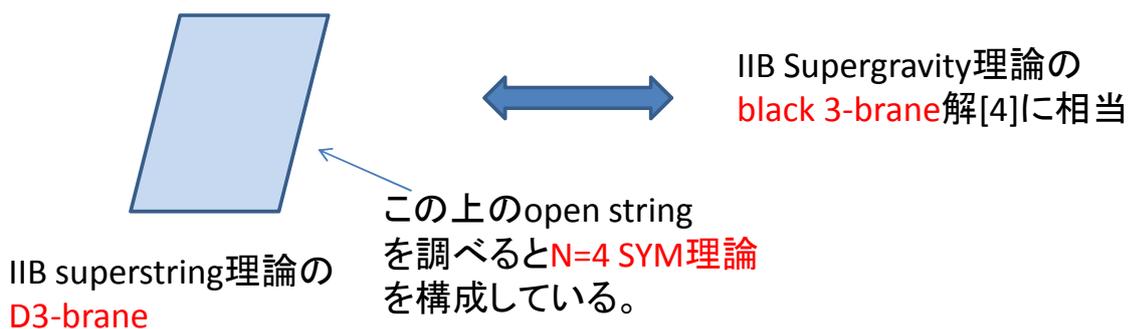
string coupling

- $r=0$ にhorizonがある。(一種のブラックホール)
- ADM質量は r_0^4 に比例する。すなわちNに比例する。

この他に、4階反対称テンソル場(Ramond-Ramond field)のfluxが存在し、この「ブラックホール」はD3-braneと同じRR chargeを持つ。

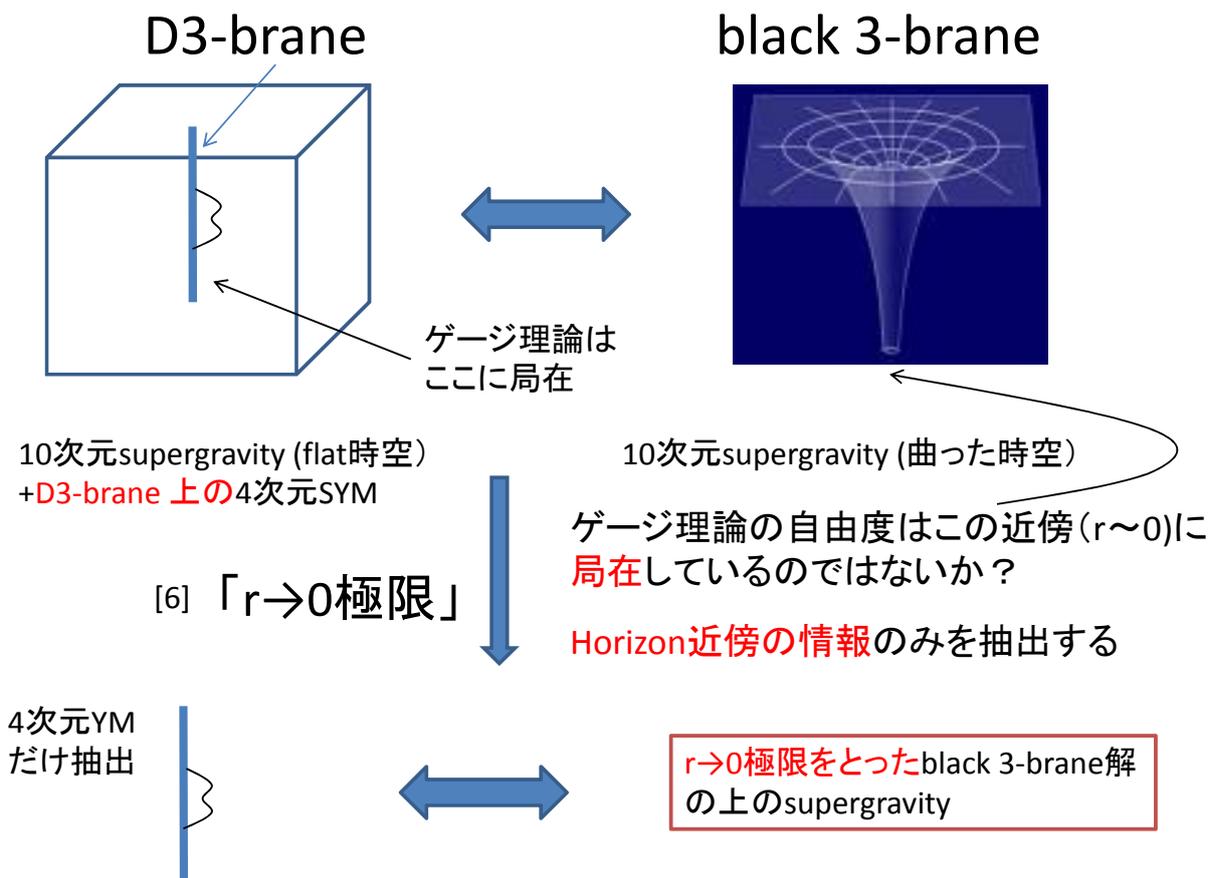
この他にscalar場(dilaton場)も存在する。

D-brane vs. curved space



弦の長さが無視できる低エネルギー極限では





Black 3-brane

$$ds^2 = H^{-1/2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + H^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2)$$

$$H = 1 + \frac{r_0^4}{r^4} \quad r_0 = (4\pi g_s N)^{1/4} l_s$$

[6] $r \rightarrow 0$ 極限 (near-horizon limit)

$$ds^2 = \underbrace{\frac{r^2}{r_0^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2)}_{\text{AdS}_5} + \frac{r_0^2}{r^2} dr^2 + r_0^2 d\Omega_5^2$$

S^5

3+1次元N=4 SYM理論



AdS₅ × S⁵ 上のsupergravity

等価?

等価というからには理論の持つ対称性くらいは一致していないと困る。本当に一致しているか？

N=4 SYM理論の対称性 (bosonic部分)

N=4 SYM理論の場

$$A_\mu$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$$

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5 \varphi_6$$

4種類の超対称変換を組み換える
自由度: R-symmetry

6個のscalar場を組み換える自由度
に対応

SO(6)

N=4 SYM理論はCFTであることが
知られている。(β=0)

3+1次元のconformal groupは
SO(2,4)

重力側の対称性

$$ds^2 = \frac{r^2}{r_0^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{r_0^2}{r^2} dr^2 + r_0^2 d\Omega_5^2$$

AdS₅

S⁵

AdS₅時空は時間が2つあるような
4+2次元Minkowski空間内の偽球面
として構成できるので、対称性は
SO(2,4)

ここの回転対称性が
SO(6)

SO(2,4) × SO(6)

たしかに一致している！

Fermionicな対称性まで含めて考えても、一致していることが確認できる。

注意事項(1)

N枚のD-braneが重なった状況

open string (ゲージ粒子) の端点がどのD-braneに終端するかという自由度がある。この自由度の対称性はU(N)

➡ N枚のD-brane 上の理論はU(N) SYM理論

しかし、 $U(N) = SU(N) \times U(1)$ のU(1)部分は、near-horizon 極限をとった後ではdecoupleしている。

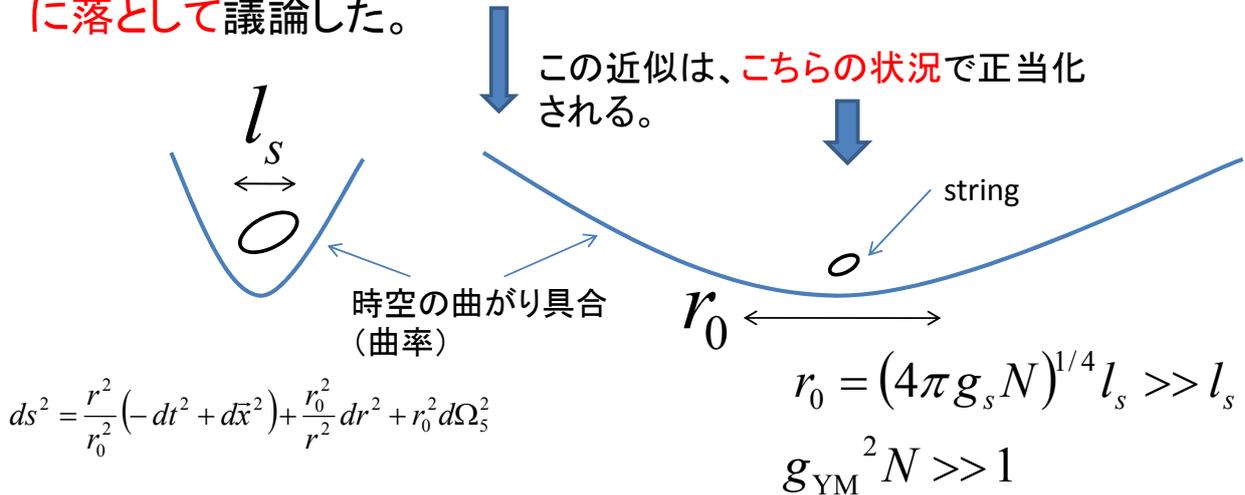
[7]



対応するゲージ理論はSU(N) SYM [7]

注意事項(2)

もともとは弦理論の摂動論を異なる真空(異なる時空)で構成して、同じ物理の計算を比較するのがideaであった。しかし、曲った時空での弦理論は定式化が容易でないため、弦の長さが無視できるとして点粒子の理論=超重力理論に落として議論した。



't Hooft coupling $\gg 1$ (強結合) で正当化

注意事項(3)

弦理論から重力理論に落として考えたとしても、もし量子重力を扱わねばならないのであれば解析が非常に困難になる。重力理論が古典的になるためには10次元重力のNewton constant $\rightarrow 0$ の極限をとるべき。

$g_s \rightarrow 0$ に対応

しかし、YM理論の't Hooft coupling $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N$ はそのまま保ちたい。

$g_{\text{YM}} \rightarrow 0$ 、 $N \rightarrow \infty$ 、 $\lambda = \text{一定}$ 、 に対応

$$g_{\text{YM}}^2 = 2\pi g_s$$

't Hooft のlarge-N極限を取っている。

(意図的にそういうset upを考える。)

注意事項(4)

重力理論は古典的であるが、対応するゲージ理論側は量子論。

large-N をとっているのでplanar diagramしか含まないが、planarなloop diagramは全て含めて計算している。

D-brane (tadpole) がからむ全ての可能なdiagramの和



曲った時空上での単純計算

という当初のideaと

closed stringのtree=open stringのloop

を思い出せば、少なくともそう期待できる。(実際そうになっている。)

結論

$N=4$ $SU(N)$ large- N SYM理論の $\lambda \gg 1$ 極限の量子論



等価

曲率 $\ll 1$ の $AdS_5 \times S^5$ 上の IIB 超重力理論の古典論

であると予想するに足る十分な理由が超弦理論にはある。

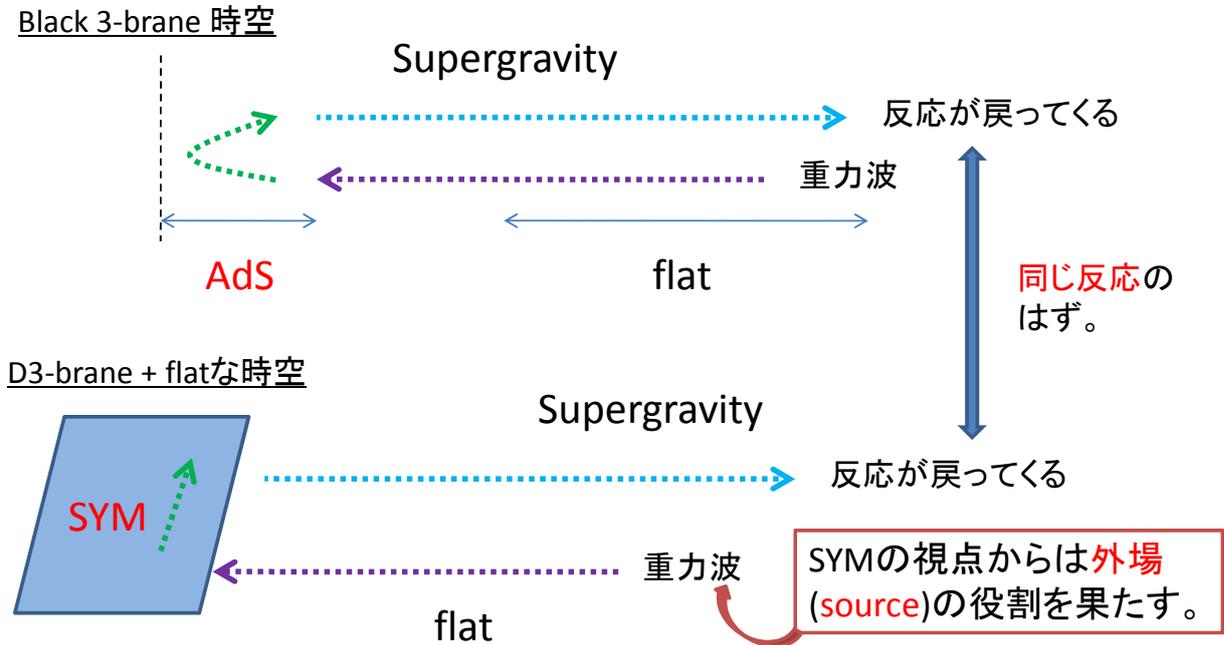
Part2: AdS/CFTのテクニック

AdS/CFTを用いてゲージ理論側の計算を行うにはどうしたら良いのか。

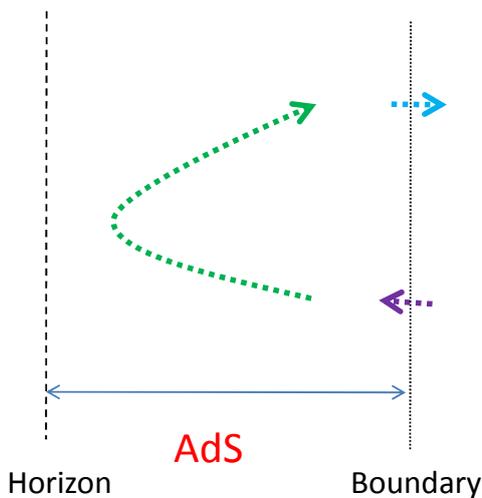
どう等価なのか？ [8]

重力側とゲージ理論側の対応関係の辞書をどのように作ったら良いか？

D-braneのpictureに立ち返ることが重要。



Near-horizon limit 後では



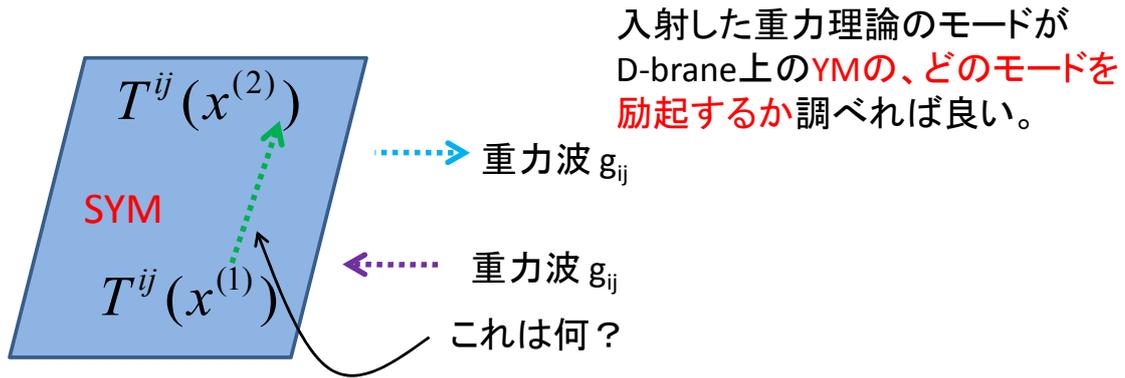
AdS空間では「無限遠点」($r = \infty$)に有限時間で到達することができる。

$r = \infty$ は時空の境界。

境界上のモード (つまり境界条件)が外場、sourceに対応する。

何に対するsource？

D-brane pictureでは



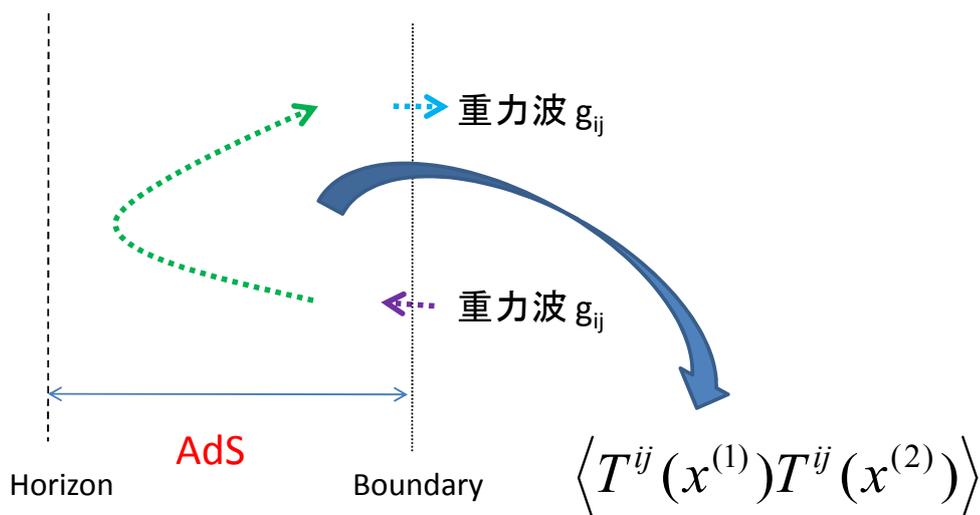
D-braneの有効作用: (non-abelian Dirac-Born-Infeld action)

$$S = -\frac{1}{4g_{YM}^2} \text{Tr} \int d^4x \sqrt{-\det g_{kl}} F_{ij} F^{ij} + \dots$$

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\det \bar{g}_{kl}} T^{ij} \delta g_{ij}$$

例えば、重力(3+1次元成分metric g_{ij})は D-brane上のYM理論のstress-energy tensorと線形に結合する。

ということ



曲った時空中の重力の古典的Green関数が

平らな時空中のYM理論のstress tensorのあらゆるplanar diagramを取り入れた2点関数を与える。

まとめると[8]

重力時空(AdS)のboundary上の g_{ij} の値



対応するゲージ理論(N=4 SYM)のstress tensorに対するsource
(つまりSYM理論が定義されている3+1次元時空のmetricそのもの)

重力理論のon-shell作用

境界条件の関数

$$S(g_{ij} \Big|_{\text{boundary}})$$



SYM理論の(経路積分後の)
有効作用

これをboundary metricでn回変分すれば、stress tensorのn点関数の期待値が(重力側の古典的計算から)求められる。

どう変分するのか？

数学的構造を見るためにscalar場の例で考える

5次元のscalar場の作用
(S^5 部分はreductionして
残りの5次元を考えている。)

$$S = \int d^4x dz \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi]$$

$$= - \int d^4x dz \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) \phi + \int d^4x \sqrt{-g} g^{zz} \phi \partial_z \phi$$

運動方程式によりゼロ

境界項のみにできる。

$$ds^2 = \frac{-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2}{z^2}$$

というmetricを採用したとする($z=0$ がboundary)

場がz座標のみに依存する
場合、運動方程式は

$$\partial_z (z^{-3} \partial_z \phi(z)) = 0$$

運動方程式の解は

Non-normalizable mode

Normalizable mode

$$\phi(z) = C_1 (1 + a_1 z^5 + \dots) + C_2 z^4 (1 + b_1 z^5 + \dots)$$

$$= C_1 + C_2 z^4 + \dots$$

という形。(C₁、C₂は積分定数。)

$$\phi(z) = C_1(1 + a_1 z^5 + \dots) + C_2 z^4(1 + b_1 z^5 + \dots)$$

$$= C_1 + C_2 z^4 + \dots$$

これがboundary(z=0)での値: source

これが対応するoperatorの期待値(に比例)

$$S = \int d^4 x \sqrt{-g} g^{zz} \phi \partial_z \phi$$

$$S(C_1) = \int d^4 x z^{-5} z^2 (C_1 + C_2 z^4 + \dots) \partial_z (C_1 + C_2 z^4 + \dots)$$

$$= \int d^4 x [4C_1 C_2 + C_2 z^4 + \dots] = 4 \int d^4 x C_1 C_2$$

(at z=0)

たしかにconjugateな形

例えば1点関数の期待値は、このようなテクニックで計算可能。

量子論的期待値が得られると言ったが

- 「くりこみ」はどうしているのか？
- 紫外発散は？

(古典)重力理論側にもAdS/CFTの文脈では「くりこみ」の対応物がある。

YM理論側の紫外発散



重力理論側の赤外発散

重力理論の境界項に、この発散をcancelするような「counter term」を加えて繰り込む。

応用として

Holographic繰り込み群

イメージをつかむために 2階のtensorで同じことやってみる

$$S = \int d^3x \sqrt{-g} g^{zz} g^{ik} g^{jl} h_{ij} \partial_z h_{kl} \quad \text{部分積分後}$$

$$\text{運動方程式: } \partial_z (z \partial_z h_{ij}) = 0$$

$$\text{運動方程式の解は } h_{ij}(z) = C_1 \eta_{ij} + C_2 \eta_{ij} \log z$$

$$\begin{aligned} S(C_1) &= \int d^4x z^{-5} z^2 z^2 z^2 (C_1 + C_2 \log z) \partial_z (C_1 + C_2 \log z) \\ &= \int d^4x [C_1 C_2 + C_2^2 \log z] \end{aligned}$$

困った！ $z \rightarrow 0$ で**発散**。

Holographicな繰り込み[9]

一般的には重力側で物理量の期待値を計算すると表面項を境界に持っていく($z \rightarrow 0$)手続きの際に発散が生じる。

これは、時空の範囲を境界まで伸ばす(時空の体積を増やす)操作における発散なので、重力側の視点では**赤外発散**。

そこで、

1. $z = \epsilon$ というregulator (cut-off)を導入する。
2. ちょうど発散を打ち消すような**境界項** S_{coul} を、あらかじめ重力作用に入れておく。
3. 最後に $\epsilon \rightarrow 0$ をとる。

counter term

Holographicな繰り込み

Stress tensorの計算[10]

境界のある5次元重力の正しい作用

境界上のextrinsic curvature

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x dz \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{8\pi G} \int d^4x \sqrt{-\gamma} K$$

境界上のmetric
Gibbons-Hawking term

これをmetricの自由度について部分積分をして境界項のみの作用に書き換えると

$$S = \frac{1}{8\pi G} \int d^4x [K^{\mu\nu} - K\gamma^{\mu\nu}] \gamma_{\mu\nu}$$

しかし、このまま計算してみると紫外発散が出るためcounter termが必要。

$$S_{\text{count}} = -\frac{1}{8\pi G} \int d^4x \sqrt{-\gamma} \left[6 + \frac{1}{2} R^{(4)} \right]$$

繰り込まれた stress tensorは

$\Lambda=-6$ の convention
で $N^2/(4\pi^2)$

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G} \left[K^{\mu\nu} - K\gamma^{\mu\nu} - 3\gamma^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (R^{(4)\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} R^{(4)}) \right]$$

しかし結局、[11]

$$ds^2 = \frac{\tilde{g}_{ij}(x, z) + dz^2}{z^2}$$

という座標系を採用した場合は話が単純になり、結局

$$\tilde{g}_{ij}(x, z) = \underbrace{\gamma_{ij}}_{\text{source (boundary metric)}} + z^4 \left(\frac{2\pi^2}{N^2} \right) \underbrace{T_{ij}}_{\text{<operator> (stress tensor)}} + \dots$$

(参考: 先ほど scalar 場で考察した時の形)

$$\begin{aligned} \phi(z) &= C_1(1 + a_1 z^5 + \dots) + C_2 z^4(1 + b_1 z^5 + \dots) \\ &= C_1 + C_2 z^4 + \dots \end{aligned}$$

source

operatorの期待値
(に比例)

注意事項

$$S_{\text{count}} = -\frac{1}{8\pi G} \int d^4x \sqrt{-\gamma} \left[6 + \frac{1}{2} R^{(4)} \right]$$

Counter termは発散が除去されるように入れるだけでなく、その項が理論の対称性 (boundary上の一般座標変換に対するcovarianceなど) を保つような形でなくてはならない。

このため、発散を過不足なく取り除くようにcounter termの係数を調整すると、counter termの発散部分以外の部分から有限の寄与が生じる場合がある。

これは、量子効果であって、anomalyの計算などに重要な寄与をする。一般に、単に発散部分を手で捨て去るだけでは、この有限の量子効果を見逃す危険性がある。

注意事項その2

$$ds^2 = \frac{\tilde{g}_{ij}(x, z) + dz^2}{z^2} \quad \tilde{g}_{ij}(x, z) = \underbrace{\gamma_{ij}}_{\text{source (boundary metric)}} + z^4 \left(\frac{2\pi^2}{N^2} \right) \underbrace{T_{ij}}_{\text{<operator> (stress tensor)}} + \dots$$

sourceは手で指定して、operatorの期待値は結果として得られるはず。



一方で重力側の方程式は2階の微分方程式なので、解を決定するためには境界条件2つ必要なのでは？ (つまり右辺2項目も与えるべき境界条件)

実は、重力側の時空がregular (naked singularityがない) ということのを要請すると、この条件により 右辺2項目=operatorの期待値 が決まる。



Part3: 応用編 もっといろいろできる。

何が出来て何が出来ないのか？

Stress tensor以外も計算可

10次元supergravityには重力以外にも、他にいろいろな場が含まれている。

それらの場がD-brane上のYMと、どう結合するか調べれば、その結合する相手のoperatorの期待値や相関関数が計算可能ということになる。

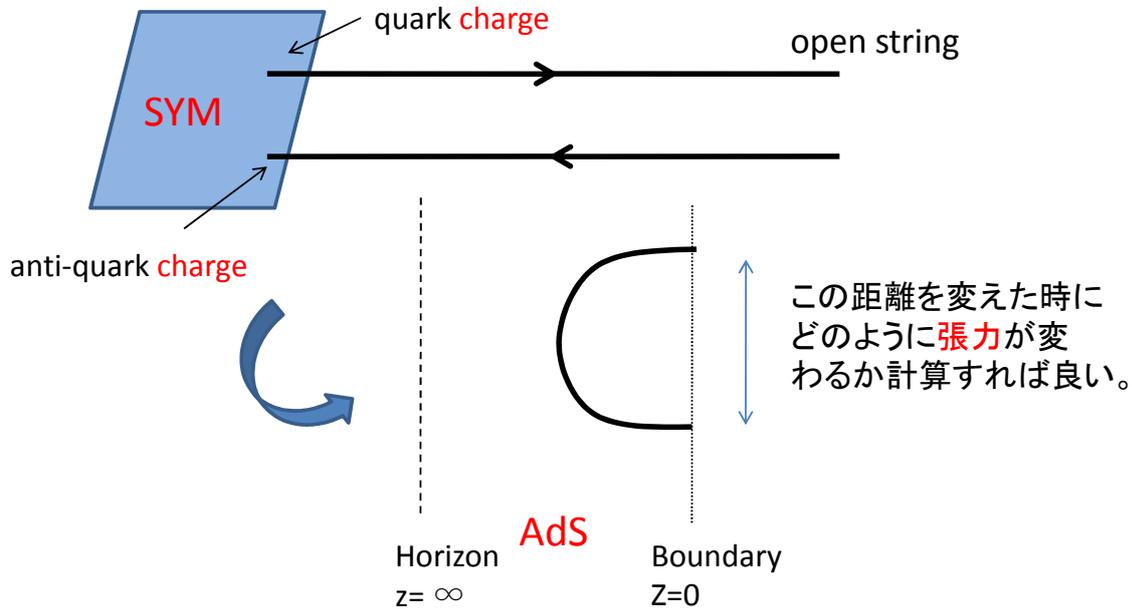
対応の例

Field	Operator
g_{ij}	T_{ij}
Dilaton (scalar)	$\text{Tr } F^2$
RR-scalar	$\text{Tr } F \wedge F$

外場以外にも

「外部object」を入れて計算が出来る。

quark-反quark potential [13]



外から何も持ち込まなくても....

例: glueball spectrum [14]

先ほどscalar場を使って考察した時:

Non-normalizable mode

Normalizable mode

$$\phi(z) = C_1(1 + a_1 z^5 + \dots) + C_2 z^4(1 + b_1 z^5 + \dots)$$

$$= C_1 + C_2 z^4 + \dots$$

外場

<場・(operator)の期待値>

$C_1=0$ として残るモード(normalizable mode)は、外場ではなくYM理論の物理的自由度。

重力理論に含まれる(closed string由来の)様々な場のnormalizable modeが時空内に作る定在波のspectrum



glueballのspectrumと解釈できる

さらに何が出来るか

- **有限温度**[15]の導入：
AdSからAdS-black holeへ
 - 閉じ込め、非閉じ込めの相転移
- **Dynamical quark**の導入：SYMからSQCDへ[16]
- 超対称性の**ない**模型[17]
- **流体力学**（時間依存性）[18]

さらに何が出来**得る**か

- 有限（バリオン）**密度**の導入[19]
- **物性**への応用[20]

- 非平衡物理へのヒント？

限界点は？

- **Large-Nの制限**

この制限を超えようとするとき**重力の量子補正**を考えねばならない。

- **Flavorを入れた系でのquench近似を超える扱い**
重力の方程式が解けるか？

- **Baryonの多体系**

Baryonは重力dualに移った後でもD-brane(やsoliton)の形で構成される。D-braneの多体系を曲った空間でどのように適切に記述するか？

- **強結合の制限**

弱結合側へ行くにはstring長さの補正が入る。(これはある程度可能。)

まとめ(メッセージ)

AdS/CFT対応は決してblack boxではない。
非常に**自然な**考察の帰結である。

重力理論とゲージ理論の対応を知りたければ**D-brane**
のpictureに立ち戻ることが重要。

逆にそれが出来れば、自分の欲しい対応関係を見出す
ことも可能。

理論物理学上の殆ど全ての重要問題が
関係してくる非常に面白い領域。

この研究会にピッタリの学問領域。

参考文献・コメント

まず全般にわたっての日本語で書かれた良いreviewとしては

[0-1] 今村洋介、「AdS₅/CFT₄ correspondence」、素粒子論研究98(6) pp.209-242 (1999)

また、AdS/CFTが提案されて比較的初期に書かれた大部なreviewに

[0-2] O. Aharony, S.S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz,
“Large N Field Theories, String Theory and Gravity,” Phys.Rept.323:183-386,2000 ,
arXiv:hep-th/9905111

があります。

[1] J. Maldacena, “The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity,” Adv.Theor.Math.Phys.2:231-252,1998, arXiv:hep-th/9711200.

しかし、以下の論文では既にAdS/CFTの基本概念が見え隠れしています。
基本思想を読み取る上で重要です。

I. R. Klebanov, “World Volume Approach to Absorption by Non-dilatonic Branes,”
Nucl.Phys. B496 (1997) 231-242, arXiv:hep-th/9702076

[2]

ここで用いた ϕ^3 理論のアナロジーでAdS/CFTの説明を行うアイデアは筆者の**独自の**試みであり、他の文献には、AdS/CFTを説明する目的では恐らく見当たらないのではないかと思います。

しかしD-braneをclosed stringのtadpoleとみなしてre-summationする考え方や、ここで行った計算については、tachyon condensationの研究の過程で川合光氏より手ほどきを受けました。また計算の細部の理解については韓国APCTPの松尾善典氏、竹内紳悟氏との議論が役に立ちました。この場を借りてお礼申し上げます。

[3] D-braneの考え方、tensionの求め方などは例えば

[3-1] J. Polchinski, "String Theory," vol. 2, Cambridge University Press

[3-2] 太田信義、「超弦理論・ブレイン・M理論」、シュプリンガー・フェアラーク東京

に詳しく載っています。また「素粒子論研究」のReview記事のうち

[3-3] 橋本 幸士、「D-brane、特にそのEffective ActionとDuality」、
素粒子論研究 94(5) pp.75-116 (1997)

[3-4] 今村洋介、「String, M and Matrix Theories」、
素粒子論研究 96(5) pp.187-270 (1998)

なども参考になります。

[4] G. Horowitz and A. Strominger, "Black Strings and p-branes,"

Nucl. Phys. B360 (1991)197. 歴史的にはD-braneよりも先に知られていました。

[5] ここではstring tensionとD1-braneのtensionの比が g_s となるような conventionを採用しています。例えば[3-1]の4.5章の最後などを参照。

[6]

実は、ここでのnear-horizon limitの説明は、少し不十分な点があります。

つまり、単純に「 $r \rightarrow 0$ 」の極限をとるのではなく、この極限を取る際に「ゲージ理論側の物理量を一定に保ったまま」極限をとる必要があります。

(例えば、有限温度を導入した場合は、極限をとったあとも有限の温度が得られるようにスケールさせる必要があります。)

この例では、 $r \times (\text{string tension})$ がゲージ理論のエネルギースケールなので、これを一定に保ったまま「 $r \rightarrow 0$ 」の極限をとる、と言うのがより正確です。ここで $\text{string tension} = (2\pi l_s)^{-2}$ です。こう思うと、「 $l_s \rightarrow 0$ 」、 $r \sim l_s^2$ のようにスケールさせていることになります。 $r_0 \sim l_s$ であることを考え合わせると、この「 $l_s \rightarrow 0$ 」極限で、metricのHの中の「1」が無視できることになります。

しかし、このように詳細を説明すると複雑になるため、講演では直観を重視して単に「 $r \rightarrow 0$ 」の極限をとるとしました。直観を重視する場合は、まず「 $r \rightarrow 0$ 」の極限をとる」とした上で、この極限操作においてゲージ理論の物理量がちゃんと一定に保たれている(極限後も有限に保たれている)ことを確認する必要があります。

[7]

ここでdecoupleしているU(1)のモードは**singleton**と呼ばれるモードです。

より正確な考察は[0-2]の(3.6)と(3.7)式の間(で引用されているRefs.)を参照されたい。(また[0-1]にも説明があります。)

[8]

ここで説明されている operatorと重力側の場の対応 についての対応処方 はGKP-Witten処方と呼ばれています。

[8-1] S.S. Gubser, I.R. Klebanov, A.M. Polyakov ,
``Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory ,''
Phys.Lett.B428:105-114,1998 , arXiv:hep-th/9802109

[8-2] E. Witten,
``Anti De Sitter Space And Holography ,''
Adv.Theor.Math.Phys.2:253-291,1998 , arXiv:hep-th/9802150

[9]

Holographicな繰り込み(群)や、UV/IR対応に関しては非常に多くの文献が
あります。Lecture Noteとしては

[9-1] K. Skenderis, ``Lecture Notes on Holographic Renormalization,``
arXiv:hep-th/0209067.

また、より「繰り込み群」に主眼を置いた初期の論文として

[9-2] J. de Boer, E. Verlinde, H. Verlinde, ``On the Holographic
Renormalization Group ,'' JHEP 0008 (2000) 003 ,
arXiv:hep-th/9912012

があります。

[10]

Stress tensorの正確な計算については上記[9-1]の他

[10-1] V. Balasubramanian and P. Kraus,
"A Stress Tensor for Anti-de Sitter Gravity,"
Commun.Math.Phys. 208 (1999) 413-428, arXiv:hep-th/9902121

[10-2] S. de Haro, K. Skenderis, S. N. Solodukhin,
"Holographic Reconstruction of Spacetime and Renormalization
in the AdS/CFT Correspondence,"
Commun.Math.Phys. 217 (2001) 595-622, arXiv:hep-th/0002230

[11]

ここで伝えたかったメッセージは次のようなものです。

bulkの場を座標 z で展開していった時の z のべきと、operatorのscaling dimensionの間にはある関係が存在します。重力側の場がゲージ理論のどのoperatorに対応するのか同定する際に、このoperatorのscaling次元と、重力側の場の z 展開のべきの関係から対応を同定しようとする論理がたまに見受けられます。しかし、もともと、scaling dimensionと z のべきの関係は「結論」であって、それが指導原理ではないと私は考えています。

あくまで、重力側の場とゲージ理論側のoperatorの対応関係はD-braneのpictureから「導出される」ものです。

そうしないと、理論を一般化、複雑化したときに重力側とゲージ理論側をどう対応付けて良いのかが全くわからなくなってしまいます。

重力側の計量が複雑になれば、一般に「 z のべき」と「scaling」の関係は変化し得ますし、また仮にゲージ理論のoperatorのscalingが z のべきから同定されたとしても、同じscalingを持つoperatorがいくつもある場合はどれを選んで良いのかがわかりません。

[12]

この問題については

S. Kinoshita, S. Mukohyama, S. Nakamura, and K-y. Oda
"A Holographic Dual of Bjorken Flow,"
Prog.Theor.Phys.121:121-164,2009 , arXiv:0807.3797

および、そこで引用した文献において、深く考察されています。

[13] Wilson loopの計算とあわせ、以下の文献がoriginalな仕事です。

[13-1] J. Maldacena, "Wilson loops in large N field theories,"
Phys. Rev. Lett. 80 (1998)4859, arXiv:hep-th/9803002

[13-2] S-J. Rey and Jungtae Yee,
"Macroscopic strings as heavy quarks: Large-N gauge theory and
anti-de Sitter supergravity,"
Eur.Phys.J. C22 (2001) 379-394, arXiv:hep-th/9803001

[14] 例えば

[14-1] C. Csaki, H. Ooguri, Y. Oz and J. Terning,
"Glueball Mass Spectrum From Supergravity," JHEP 9901 (1999) 017,
arXiv:hep-th/9806021

[14-2] R.de Mello Koch, A. Jevicki, M. Mihailescu and J. P. Nunes,
"Evaluation Of Glueball Masses From Supergravity,"
Phys.Rev.D58:105009,1998 , arXiv:hep-th/9806125.

[14-3] R. C. Brower, S. D. Mathur and C-I. Tan,
"Discrete Spectrum of the Graviton in the AdS⁵ Black Hole Background ,"
Nucl.Phys.B574:219-244,2000, arXiv:hep-th/9908196

[14-4] R. C. Brower, S. D. Mathur and C-I. Tan,
"Glueball spectrum for QCD from AdS supergravity duality,"
Nucl.Phys.B587:249-276,2000, arXiv:hep-th/0003115

など、非常に多くの文献があります。

[15] E. Witten, "Anti-de Sitter Space, Thermal Phase Transition, And Confinement In Gauge Theories," Adv.Theor.Math.Phys.2:505-532,1998 arXiv:hep-th/9803131.

[16]多くの文献、モデルがあるが、代表的なものとして酒井・杉本モデル

[16-1] T. Sakai and S. Sugimoto,
"Low energy hadron physics in holographic QCD,"
Prog.Theor.Phys. 113 (2005) 843-882, arXiv:hep-th/0412141

[16-2] T. Sakai and S. Sugimoto,
" More on a holographic dual of QCD,"
Prog.Theor.Phys.114:1083-1118,2005. arXiv:hep-th/0507073

がある。

[17]
E. Wittenの[15]を参照。なお、[16-1,2]でも[15]の方法に基づき
超対称性を破っている。

[18]
ゲージ理論流体の流体力学的物理量の導出等に関するreviewとしては、
例えば

[18-1] M. Natsuume, "String theory and quark-gluon plasma,"
arXiv:hep-ph/0701201

[18-2] D. T. Son, A. O. Starinets, "Viscosity, Black Holes, and
Quantum Field Theory," Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.57:95-118,2007,
arXiv:0704.0240

などがあります。

また、流体力学と重力dualの対応に主眼を置いたreviewとしては

[18-3] M. Rangamani, "Gravity & Hydrodynamics: Lectures on the
fluid-gravity correspondence," arXiv:0905.4352

があります。

さらに、「(流体の)時間依存性」に主眼をおいた仕事については[12]および
そこで引用している文献を参照。

[19]

私の認識では、有限バリオン密度を本当に満足いく形で導入するには、いろいろと解決すべき問題が残っていますが、参考になる文献としては例えば、

[19-1] O. Bergman, G. Lifschytz and M. Lippert ,
`` Holographic Nuclear Physics,`` JHEP0711:056,2007
arXiv:0708.0326

などがあります。(他にも実に多くの文献があります。)

[20]

2+1次元のCFTとの対応を考えることにより、物性系へAdS/CFTを応用する試みが近年なされています。一つのreviewとしては

[20-1] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog, G. T. Horowitz
`` Holographic Superconductors,``
JHEP0812:015,2008, arXiv:0810.1563

がありますが、ここで網羅されていない仕事も多数あります。

ここで触れることの出来なかった テーマ

- Spin Chain関連の仕事
- Alday-Maldacenaのglueon散乱の仕事
- Wilson loopのD-braneを用いた計算

などなど、多数あります。