



非平衡Thermo-Field Dynamics より 導かれるBoltzmann-like方程式の解析

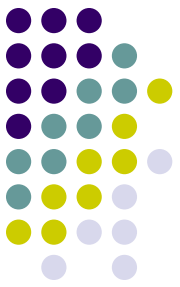
2009年9月3日(木)

基研研究会「熱場の量子論とその応用」

水谷 友一、稲垣 知宏

広大理、広大総

導入



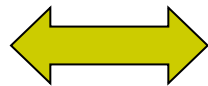
- 初期宇宙の時間発展に関わる物理現象：
粒子生成、宇宙膨張に伴う熱的分布の変化 等



相対論的場の量子論によって記述される非平衡現象

- 非平衡現象を記述する理論：実時間形式の熱場の量子論
Thermo-field Dynamics (Y.Takahashi and H.Umezawa (1974))

熱場の量子論 → 粒子数分布の時間発展方程式



Boltzmann方程式との関係？

- 目的

非平衡Thermo-field Dynamics に湯川型相互作用模型を応用することによって得られるBoltzmann-like方程式の導出と解析.

Thermo-field Dynamics



- 自由度の倍化: (TFDの自由度) = (通常の場合の理論) + (熱的自由度)

$$\text{チルダ振動子の導入} \begin{cases} \{a, a^\dagger\} \rightarrow \{a, a^\dagger\}, \{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\}, \\ |n\rangle \rightarrow |n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle, \end{cases}$$

正準交換関係

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= 1, \\ [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] &= 1, \\ [a, \tilde{a}^\dagger] &= 0, \\ \langle 0|a^\dagger = a|0\rangle &= 0. \\ \langle 0|\tilde{a}^\dagger = \tilde{a}|0\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Bogoliubov 変換

$$\begin{pmatrix} 1 + n_p & -n_p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \tilde{\xi}^\dagger \end{pmatrix}$$



Bogoliubov パラメータ

•非平衡TFD

$n(t)$: 時間に依存する
一般的なパラメータ

正準交換関係

$$\begin{aligned} [\xi, \xi^\dagger] &= 1, \\ [\tilde{\xi}, \tilde{\xi}^\dagger] &= 1, \\ [\xi, \tilde{\xi}^\dagger] &= 0, \\ \langle \theta|\xi^\dagger = \xi|\theta\rangle &= 0, \\ \langle \theta|\tilde{\xi}^\dagger = \tilde{\xi}|\theta\rangle &= 0. \end{aligned}$$

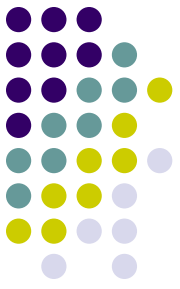
熱的真空状態

H.Umezawa and Y.Yamanaka (1992)

Cf.熱平衡系

n : 観測粒子数分布

熱的伝播関数



•Bogoliubov 変換

$$\begin{cases} \sigma = 1; \text{boson} \\ \sigma = i; \text{fermion} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{熱的二重項表現:} \\ a^\alpha = \begin{pmatrix} a \\ \sigma \bar{a}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \bar{a}^\alpha = \begin{pmatrix} a^\dagger & , -\sigma \bar{a} \end{pmatrix}. \\ \bullet \text{Bogoliubov 行列:} \\ B(n_p(t))^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 + \sigma^2 n_p(t) & -\sigma^2 n_p(t) \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_p(t)^\alpha = B(n_p(t))^{\alpha\beta} a_p(t)^\beta, \\ \bar{\xi}_p(t)^\alpha = \bar{a}_{b,p}(t)^\beta B^{-1}(n_p(t))^{\beta\alpha}, \end{array} \right.$$

•熱的伝播関数の定義

$$\left[\phi^\alpha: \text{熱的二重項表現で展開した場} \right]$$

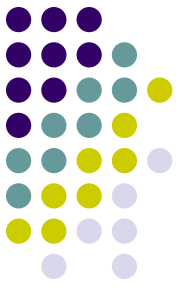
$$D(x-y)^{\alpha\beta} \equiv \langle \theta | T[\phi(x)^\alpha \bar{\phi}(y)^\beta] | \theta \rangle$$

•熱的自由伝播関数

$$D_0(x-y)^{\alpha\beta} = B^{-1}(n_p(t_x))^{\alpha\gamma_1} \begin{pmatrix} D_R(x-y) & 0 \\ 0 & D_A(x-y) \end{pmatrix} B(n_p(t_y))^{\gamma_2\beta}$$

$$\text{通常の場合の理論における} \quad \left\{ \begin{array}{l} D_R(x-y): \text{遅延伝播関数} \\ D_A(x-y): \text{先行伝播関数} \end{array} \right.$$

熱的伝播関数



•Bogoliubov 変換

$$\left(\begin{array}{l} \sigma = 1; \text{boson} \\ \sigma = i; \text{fermion} \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{熱的二重項表現:} \\ a^\alpha = \begin{pmatrix} a \\ \sigma \bar{a}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \bar{a}^\alpha = \begin{pmatrix} a^\dagger & , -\sigma \bar{a} \end{pmatrix}. \\ \bullet \text{Bogoliubov 行列:} \\ B(n_p(t))^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 + \sigma^2 n_p(t) & -\sigma^2 n_p(t) \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_p(t)^\alpha = B(n_p(t))^{\alpha\beta} a_p(t)^\beta, \\ \bar{\xi}_p(t)^\alpha = \bar{a}_{b,p}(t)^\beta B^{-1}(n_p(t))^{\beta\alpha}, \end{array} \right.$$

•熱的伝播関数の定義

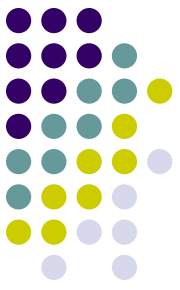
$$\left(\phi^\alpha: \text{熱的二重項表現で展開した場} \right)$$

$$D(x - y)^{\alpha\beta} \equiv \langle \theta | T[\phi(x)^\alpha \bar{\phi}(y)^\beta] | \theta \rangle$$

•熱的摂動伝播関数

$$D_H(x - y)^{\alpha\beta} = B^{-1}(n_p(t_x)) \begin{pmatrix} D_R(x - y) & O_\Sigma(x, y) \\ 0 & D_A(x - y) \end{pmatrix} B(n_p(t_y)),$$

$$\left(\lim_{t_x \rightarrow t_y} O_\Sigma(x, y) \neq 0. \right)$$



熱的真空状態の自己無撞着条件

• 熱的摂動伝播関数の定義


添え字H: Heisenberg 表示

$$D_H(x-y)^{\alpha\beta} \equiv \langle \theta_H | T[\phi_H(x)^\alpha \bar{\phi}_H(y)^\beta] | \theta_H \rangle$$

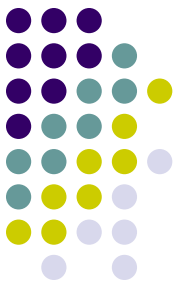
$$\ni B^{-1}(n_p(t_x))^{\alpha\gamma_1} \begin{pmatrix} \langle \theta_H | \xi_H \xi_H^\dagger | \theta_H \rangle & \langle \theta_H | \xi_H \tilde{\xi}_H | \theta_H \rangle \\ \langle \theta_H | \tilde{\xi}_H^\dagger \xi_H^\dagger | \theta_H \rangle & \langle \theta_H | \tilde{\xi}_H^\dagger \tilde{\xi}_H | \theta_H \rangle \end{pmatrix} B(n_p(t_y))^{\gamma_2\beta} + \dots$$

$$\longrightarrow B^{-1} B^{-1}(N_{L,p}(t_x, t_y)) \begin{pmatrix} D_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B(N_{R,p}(t_x, t_y), y),$$

非対角成分の同時刻極限: $\lim_{t_x \rightarrow t_y} O_\Sigma(x, y) \neq 0$.

 $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{場の同時刻交換関係} : \ni [\xi_H, \tilde{\xi}_H] = 0, \\ \bullet \text{Heisenberg 表示の真空状態の関係} \\ \tilde{\xi}_H | \theta_H \rangle = \xi_H | \theta_H \rangle = 0, \end{array} \right\}$ が壊れてしまう

\longrightarrow 熱的真空状態の不安定性



熱的真空状態の自己無撞着条件

• 熱的摂動伝播関数の定義

添え字H: Heisenberg 表示

$$D_H(x-y)^{\alpha\beta} \equiv \langle \theta_H | T[\phi_H(x)^\alpha \bar{\phi}_H(y)^\beta] | \theta_H \rangle$$

$$\ni B^{-1}(n_p(t_x))^{\alpha\gamma_1} \begin{pmatrix} \langle \theta_H | \xi_H \xi_H^\dagger | \theta_H \rangle & \langle \theta_H | \xi_H \tilde{\xi}_H | \theta_H \rangle \\ \langle \theta_H | \tilde{\xi}_H^\dagger \xi_H^\dagger | \theta_H \rangle & \langle \theta_H | \tilde{\xi}_H^\dagger \tilde{\xi}_H | \theta_H \rangle \end{pmatrix} B(n_p(t_y))^{\gamma_2\beta} + \dots$$

$$\longrightarrow B^{-1} B^{-1}(N_{L,p}(t_x, t_y)) \begin{pmatrix} D_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B(N_{R,p}(t_x, t_y), y),$$

• 摂動Bogoliubovパラメータ: $N_{R(L)}(t_x, t_y) \equiv n(t_x) + \nu_{R(L)}(t_x, t_y)$,

• 同時刻極限: $t_x \rightarrow t_y$ における対角化条件:
=(熱的真空状態の自己無撞着条件)

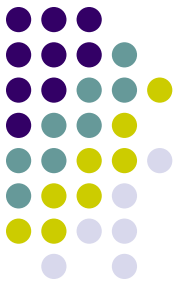


(自己無撞着条件を満たす摂動Bogoliubovパラメータ)

= (観測粒子数分布), Y.Yamanaka and H.Umezawa et.al. (1994)

観測粒子数分布の時間依存性

熱的Schwinger-Dyson方程式



H.Chu and H.Umezawa (1995)

$$D_H(x - y)^{\alpha\beta} = D_0(x - y)^{\alpha\beta} + \int dz_1 dz_2 D_0(x - z_1)^{\alpha\gamma_1} i\sigma^2 \Sigma(z_1 - z_2)^{\gamma_1\gamma_2} D_H(z_2 - y)^{\gamma_2\beta}$$

1. 摂動伝播関数の時間発展方程式 D_0^{-1} を作用させる
- $$\begin{cases} D_0^{-1} = \partial_\mu \partial_\mu + m_B^2, & \text{:Scalar場} \\ D_0^{-1} = i\cancel{\partial} - m_F, & \text{:Dirac場} \end{cases}$$

2. D_0^{-1} をBogoliubov 行列の中に作用する形に変形

$$\begin{aligned} D_0^{-1} D_H(x - y)^{\alpha\beta} &= B^{-1}(N_{L,p}(t_x, t_y)) \begin{pmatrix} D_0^{-1} D_R(x - y) & \frac{D_0^{-1} O_\Sigma(x, y)}{D_0^{-1} D_A(x - y)} \\ 0 & \end{pmatrix} B(N_{R,p}(t_x, t_y)) \\ &= -i\sigma^2 \delta(x - y), \quad \ni \partial_{t_x} N(t_x, t_y) \end{aligned}$$

熱的真空状態の自己無撞着条件: $\lim_{t_x \rightarrow t_y} D_0^{-1} O_\Sigma(x, y) = 0.$

→ Boltzmann-like方程式

湯川相互作用模型



- ラグランジアン密度

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m_F)\psi(x) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi(x))(\partial^\mu\phi(x)) - \frac{1}{2}m^2\phi(x)^2 - g\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(x),$$

- TFDで扱うラグランジアン密度

$$\hat{\mathcal{L}}(x) \equiv \mathcal{L}(x) - \tilde{\mathcal{L}}(x),$$

$\tilde{\mathcal{L}}(x) : \mathcal{L}(x)$ のチルダ共役

・チルダ共役則

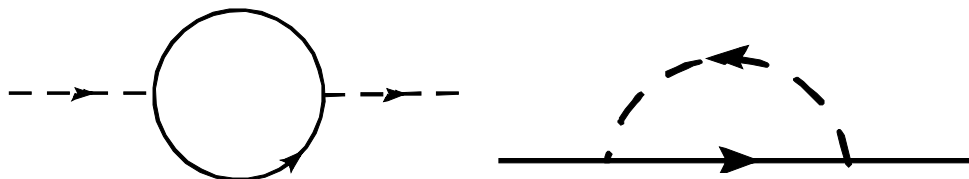
$[A_1, A_2 : \text{演算子}, c_1, c_2 : \text{c数}]$

$$(A_1 A_2)^\sim = \tilde{A}_1 \tilde{A}_2,$$

$$(c_1 A_1 + c_2 A_2)^\sim = c_1^* \tilde{A}_1 + c_2^* \tilde{A}_2,$$

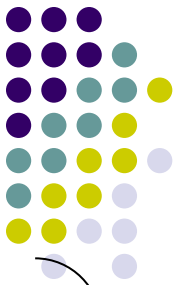
$$(\tilde{A})^\sim = A.$$

- 考慮した量子補正 : 1-loop まで



• Boltzmann-like 方程式の $\left\{ \begin{array}{l} \text{条件} \\ \text{表式} \end{array} \right\} \longrightarrow$ ポスター

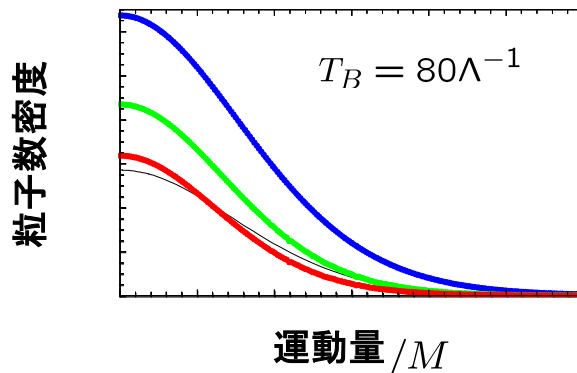
数値解析



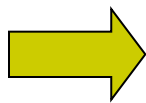
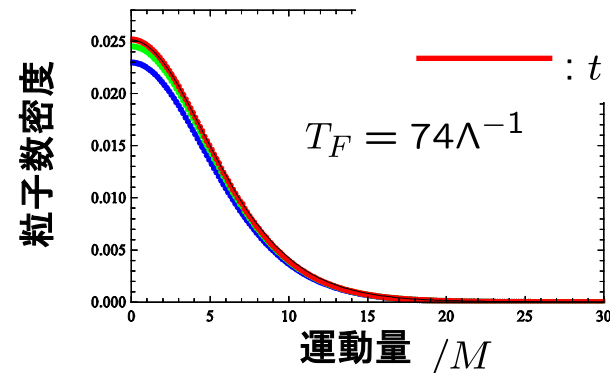
•パラメータ

- Momentum cut-off: $\Lambda = 30M$, $\left[M: \text{任意の物理スケール} \right]$
- 質量: ボソン: $m_B = 0.67\Lambda$, フェルミオン: $m_F = 0.30\Lambda$,
- 始状態の温度: ボソン: $T_B = 90\Lambda^{-1}$, フェルミオン: $T_F = 72\Lambda^{-1}$,

• ボソン



• フェルミオン



- ボーズ分布では、時間と共に熱的分布からのずれが見られた。
- (ボゾンの損失エネルギー)~(フェルミオンの獲得エネルギー)

まとめ



- 相対論的Scalar場、Dirac場を用いて、SD方程式を対角的にする自己無撞着条件からBoltzmann-like方程式を導出した。
- Boltzmann-like方程式を1-loop近似の元で解析を行い、BosonおよびFermionの時間的な振る舞いを調べた。
- 課題
 - 今回課した近似(1-loop近似 等)をはずした解析。
 - 熱的分布関数からのずれを示したボーズ粒子数分布の緩和の仕方を詳しく調べる。