

1 + 1次元の流体模型の ヘビサイド関数を含んだ解

鳥羽高専 溝口 卓哉

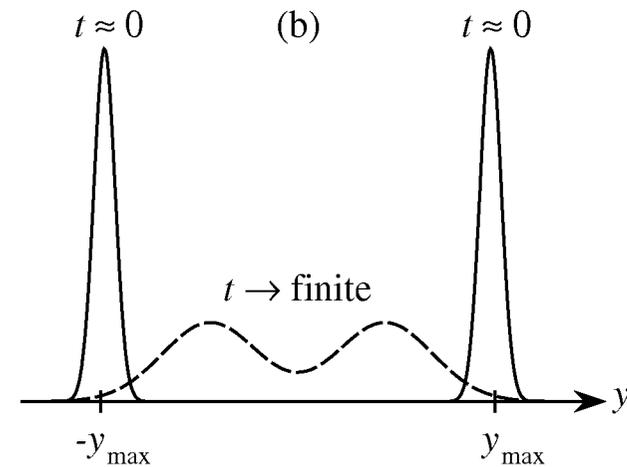
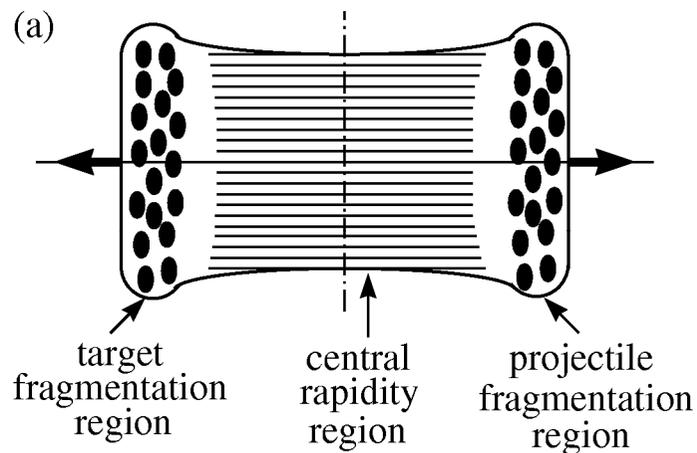
美谷島 實(信州大学) : (井出, 宮澤, 鈴木)

昔の確率モデル: 2成分の Ornstein-Uhlenbeck 過程

(Biyajima, Ide, Mizoguchi, Suzuki, PTP108 (2002) 559; Biyajima, Mizoguchi, PTP109 (2003) 483)

$$\frac{dn}{d\eta} = \frac{1}{\sqrt{8\pi V^2(t)}} \left\{ \exp \left[-\frac{(\eta + \eta_{\max} e^{-\gamma t})^2}{2V^2(t)} \right] + \exp \left[-\frac{(\eta - \eta_{\max} e^{-\gamma t})^2}{2V^2(t)} \right] \right\},$$

$$V^2(t) = (\sigma^2/2\gamma)p$$



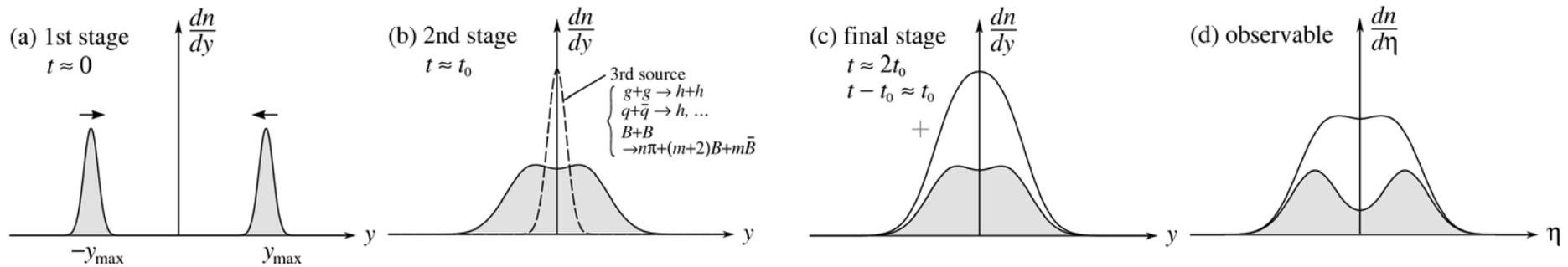
昔の確率モデルII: 3成分の Ornstein-Uhlenbeck 過程

(Biyajima, Ide, Kaneyama, Mizoguchi, Suzuki, PTP Suppl.153(2004)344)

$$P(y, y_{\max}, t) = \frac{1}{\sqrt{8\pi V^2(t)}} \left\{ \exp \left[-\frac{(y + y_{\max}e^{-\gamma t})^2}{2V^2(t)} \right] + \exp \left[-\frac{(y - y_{\max}e^{-\gamma t})^2}{2V^2(t)} \right] \right\},$$

$$P_0(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V_0^2(t)}} \exp \left[-\frac{y^2}{2V_0^2(t)} \right],$$

$$\frac{dn}{d\eta} = J(\eta, m/p_t) \times r_f P(y, y_{\max}, t) + J_0 \times (1 - r_f) P_0(y, t)$$



衝突でクォークはお互いにすり抜けて、グルーオンが中心領域に残る。

基礎付けが不十分という意見

(1+1)次元Landau流体モデル

エネルギー運動量テンソル

$$T^{\mu\nu} = (e + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}$$

e energy density, p pressure, u^μ four velocity, $g^{\mu\nu}$ metric tensor

エネルギー・運動量の保存則, エントロピーの保存則
(粘性, 熱伝導, 輻射を無視)

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0, \quad \frac{\partial (su^\mu)}{\partial x^\mu} = 0,$$

s entropy density

熱力学的関係式, 状態方程式

$$de = Tds, \quad dp = sdT, \quad p = c_s^2 e$$

c_s velocity of sound

(1+1) 次元

$$\frac{\partial}{\partial t}(T \sinh y) + \frac{\partial}{\partial x}(T \cosh y) = 0$$
$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + c_s^2 \frac{\partial y}{\partial x}\right) \cosh y + \left(\frac{\partial T}{\partial x} + c_s^2 \frac{\partial y}{\partial t}\right) \sinh y = 0$$

y rapidity of fluid : $(u^0, u^1) = (\cosh y, \sinh y)$

ポテンシャル ϕ

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = (-T \cosh y) dt + (T \sinh y) dx$$

Legendre 変換

$$d\chi = d(\phi + Tt \cosh y - Tx \sinh y)$$
$$= (t \cosh y - x \sinh y) dT + T(t \sinh y - x \cosh y) dy$$

$$t = \frac{\partial \chi}{\partial T} \cosh y - \frac{1}{T} \frac{\partial \chi}{\partial y} \sinh y, \quad x = \frac{\partial \chi}{\partial T} \sinh y - \frac{1}{T} \frac{\partial \chi}{\partial y} \cosh y$$

χ に対する方程式

$$\frac{1}{c_s^2 T} \left(\frac{\partial \chi}{\partial T} - \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial T^2} = 0$$

$\omega = -\ln(T/T_0)$ (T_0 initial temperature) で変換

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \omega^2} + (1 - c_s^2) \frac{\partial \chi}{\partial \omega} \Rightarrow \text{電信方程式}$$

entropy 分布

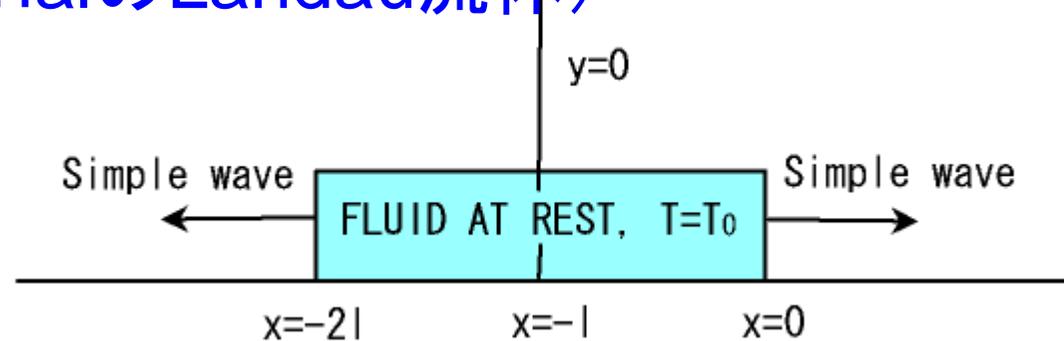
$$\frac{dS}{dy} \sim \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\chi - \frac{\partial \chi}{\partial \omega} \right) \Big|_{\omega=\omega_f}$$

$\omega_f = -\ln(T_f/T_0)$ (T_f final temperature)

Landauの解 (OriginalのLandau流体)

(L. D. Landau, Izv. Akad. Nauk Ser. Fiz. **17**, 51 (1953))

「衝突直後に流体は静止し、静止地点から両サイドに拡がる。」



初期条件

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial y} \right|_{y=0} = T_0 l e^\omega, \quad \chi(y = \omega/c_s) = 0$$

χ に対する方程式の解

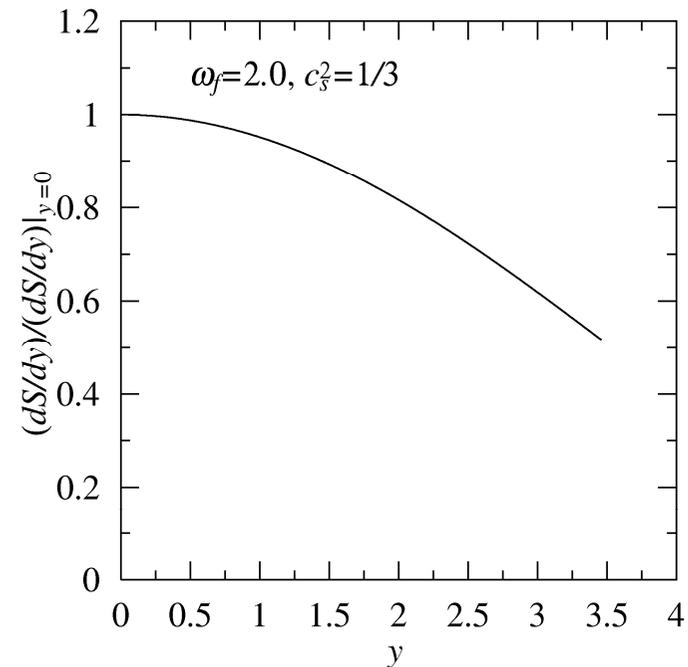
$$\chi \sim e^{-\omega} \int_{yc_s}^{\omega} e^{(1+\beta)\omega'} I_0 \left(\beta \sqrt{\omega'^2 - c_s^2 y^2} \right) d\omega'$$

$$\beta = (1 - c_s^2)/2c_s^2$$

entropy 分布 (Landau)

$$\frac{dS}{dy} \sim e^{\beta\omega_f} \left[I_0(p) + \frac{\beta\omega_f}{p} I_1(p) \right]$$

$$p = \beta \sqrt{\omega^2 - c_s^2 y^2}, \quad I_0(), I_1() \text{ modified Bessel function}$$



Srivastavaの解

(D. K. Srivastava et al., Annals Phys. **228**, 104 (1993))

$\chi = \chi_1 \exp(\beta\omega)$ とおく

$$\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \omega^2} - c_s^2 \beta^2 \chi_1$$

変数変換

$$p = \beta \sqrt{\omega^2 - c_s^2 y^2}, \quad q = \tanh^{-1} \left(\frac{c_s y}{\omega} \right)$$

$$\frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial p^2} - \frac{1}{p} \frac{\partial \chi_1}{\partial p} + \chi_1 = 0$$

条件 $\frac{\partial \chi_1}{\partial q} = 0$ を課した解

$$\chi \sim \begin{cases} e^{\beta\omega} I_0(\beta \sqrt{\omega^2 - c_s^2 y^2}) & \text{for } \omega^2 > c_s^2 y^2 \\ e^{\beta\omega} J_0(\beta \sqrt{c_s^2 y^2 - \omega^2}) & \text{for } \omega^2 < c_s^2 y^2 \end{cases} \quad (J_0() \text{ Bessel function})$$

entropy 分布 (Srivastava)

$$\frac{dS}{dy} \sim \left[\beta(\beta + 1) I_0(p) + \frac{\beta^2(p^2 + p^2(2\beta + 1)\omega - \beta^2\omega^2) I_0'(p)}{p^3} + \frac{\beta^4\omega^2 I_0''(p)}{p^2} \right] \quad \text{for } \omega^2 > c_s^2 y^2$$

$$\frac{dS}{dy} \sim \left[\beta(\beta + 1) J_0(\tilde{p}) + \frac{\beta^2(\tilde{p}^2 + \tilde{p}^2(2\beta + 1)\omega - \beta^2\omega^2) J_0'(\tilde{p})}{\tilde{p}^3} + \frac{\beta^4\omega^2 J_0''(\tilde{p})}{\tilde{p}^2} \right] \quad \text{for } \omega^2 < c_s^2 y^2$$

$$\tilde{p} = \beta \sqrt{c_s^2 y^2 - \omega^2}$$

Heaviside関数を含む解 I (Ours I)

(Mizoguchi, Miyazawa, Biyajima, Eur. Phys. J. A **40**, 99 (2009))

Green 関数 の方法

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \omega^2} + \left(\frac{1}{c_s^2} - 1 \right) \frac{\partial \chi}{\partial \omega} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = \frac{1}{c_s^2} \delta(\omega - \omega_0) \delta(y - y_0). \quad (\omega_0, y_0 \rightarrow 0)$$

(y, ω) 空間での初期条件と解 $(\chi = \chi_1 e^{\beta \omega}, \omega = -\ln(T/T_0))$

$$\left. \frac{\partial \chi_1}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = G(y), \quad \chi_1(\omega = 0) = g(y)$$

$$\chi_1(y, \omega) = \frac{1}{2} \{g(y + \omega/c_s) + g(y - \omega/c_s)\}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-\omega/c_s}^{\omega/c_s} \left\{ c_s G(z + y) I_0(\beta \sqrt{\omega^2 - c_s^2 z^2}) + \beta^2 c_s \omega g(z + y) \frac{I_1(\beta \sqrt{\omega^2 - c_s^2 z^2})}{\beta \sqrt{\omega^2 - c_s^2 z^2}} \right\} dz.$$

$G(y) = \delta(y)$ (初期の広がりを無視), $g(y) = 0$ (中心衝突を仮定) とした解

$$\chi \sim e^{\beta \omega} I_0 \left(\beta \sqrt{\omega^2 - c_s^2 y^2} \right) H(\varepsilon, Q = \omega - c_s |y|),$$

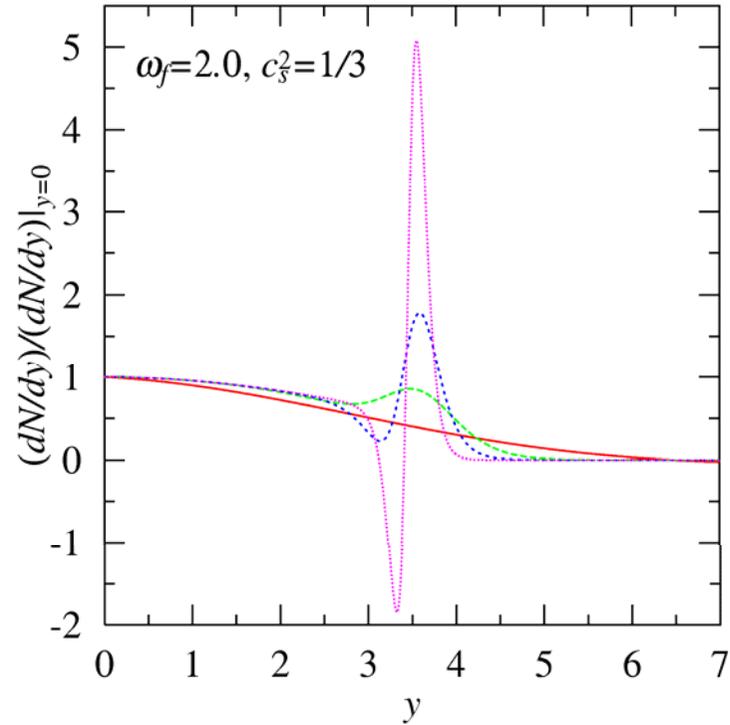
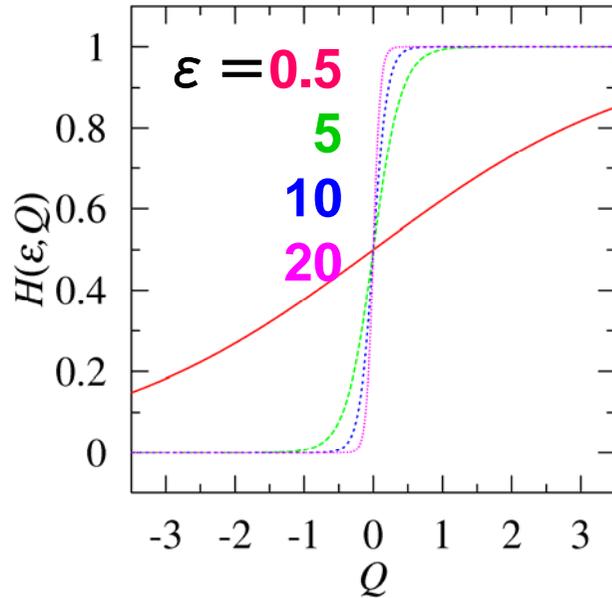
$$H(\varepsilon, Q) = \frac{1}{e^{-\varepsilon Q} + 1} \quad (\text{現象論的な Heaviside 関数})$$

entropy 分布 (Ours I)

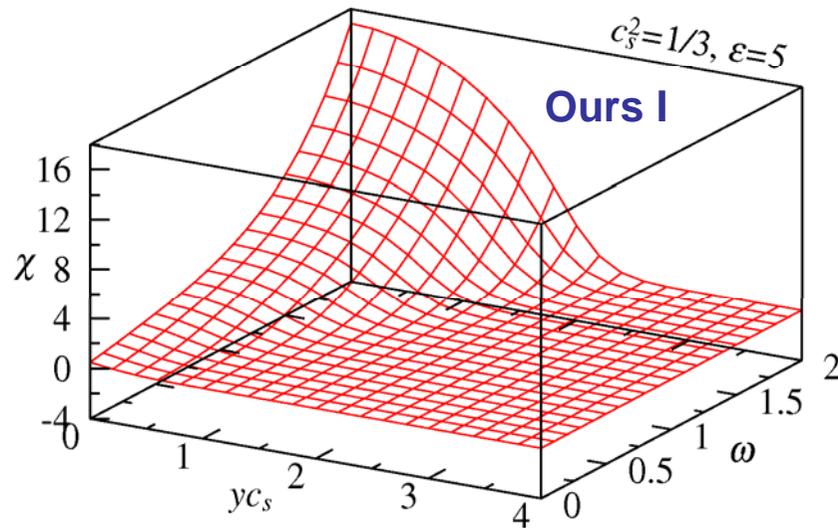
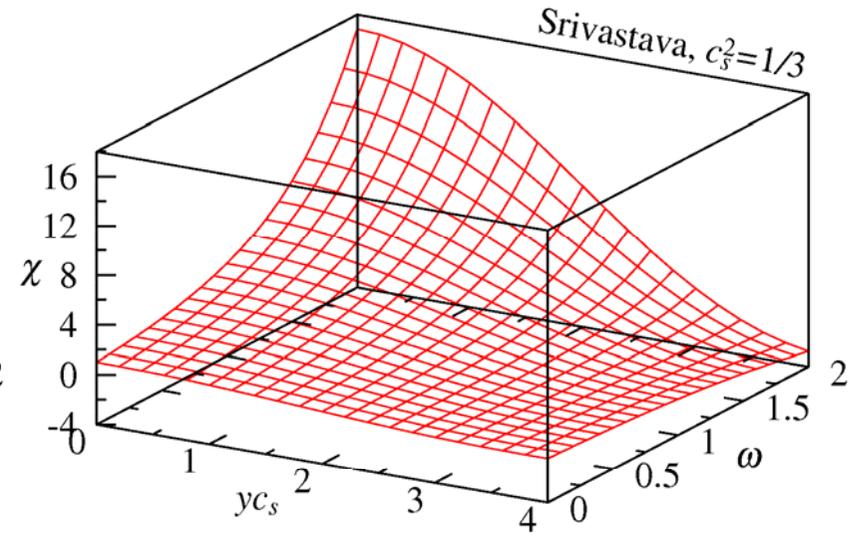
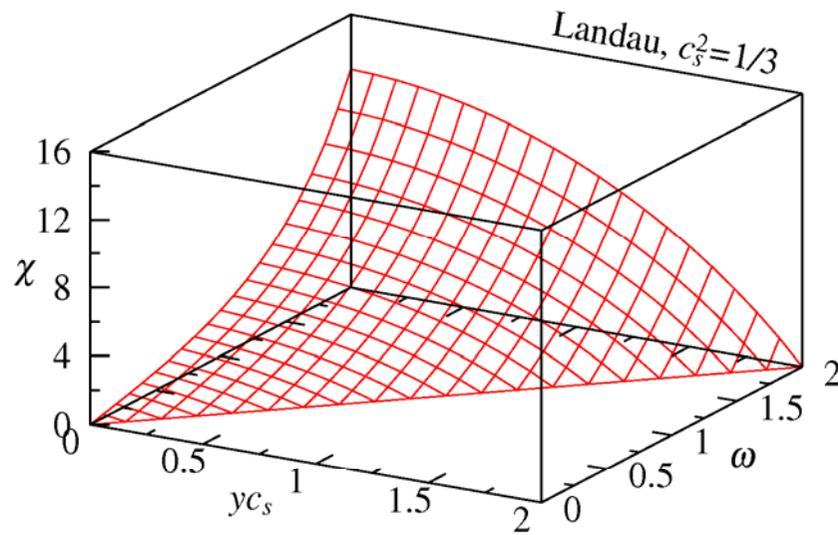
$$\frac{dS}{dy} \sim \left[\beta(\beta + 1)I_0(p) + \frac{\beta^2(p^2 + p^2(2\beta + 1)\omega - \beta^2\omega^2)I'_0(p)}{p^3} + \frac{\beta^4\omega^2 I''_0(p)}{p^2} \right] H(\varepsilon, Q)$$

$$+ \left[(2\beta + 1)I_0(p) + \frac{2\beta^2\omega I'_0(p)}{p} \right] H'(\varepsilon, Q) + I_0(p)H''(\varepsilon, Q).$$

$$p = \beta\sqrt{\omega^2 - c_s^2 y^2}, \quad Q = \omega - c_s|y|$$



3つの解のポテンシャル χ の比較



データの解析

hadron rapidity 分布

$$\frac{dN}{dy_h} = c \int_{-y_0}^{y_0} dy \int_0^\infty dp_T p_T \frac{m_T \cosh(y_h - y)}{\exp[\{m_T \cosh(y_h - y) - \mu_B\}/T] + \delta} \frac{dS}{dy},$$

$$M_T = \sqrt{p_T^2 + m_p^2} \quad \text{transverse mass.}$$

parameters:

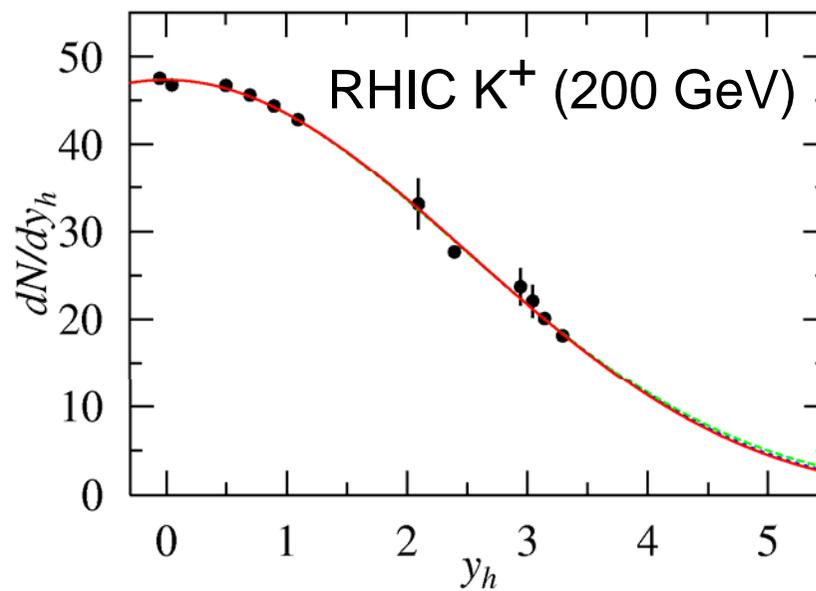
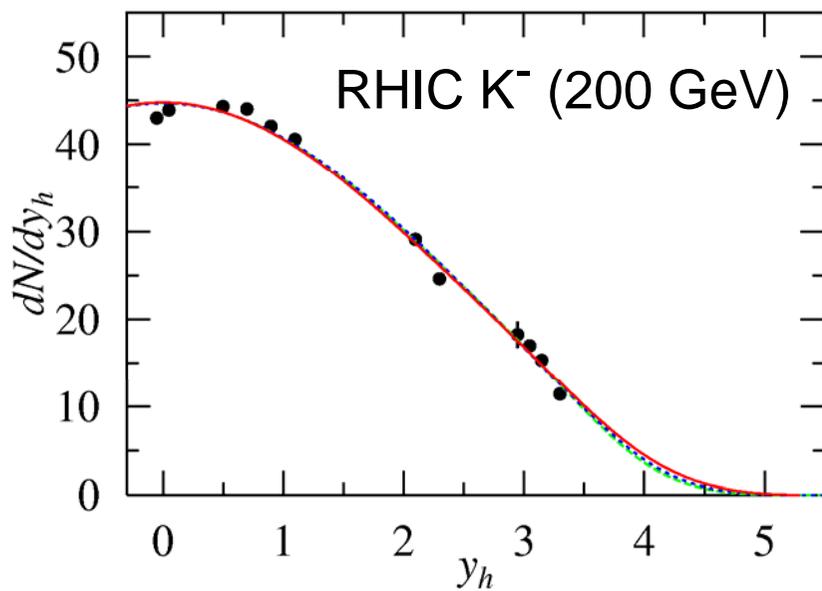
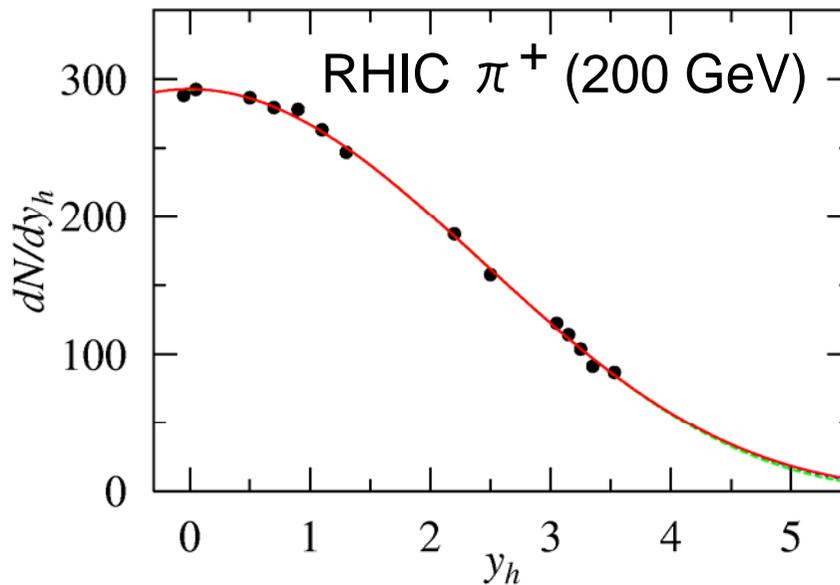
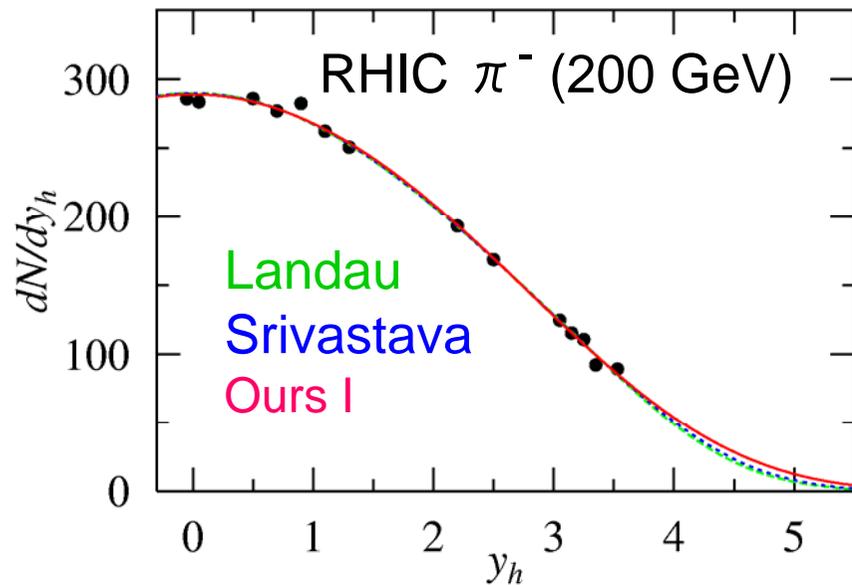
mesons: $\delta = -1$, $\mu_B = 0$

proton: $\delta = +1$, $\mu_B = 0.537$ (5 GeV), 0.24 (17 GeV),
0.065 (62.4 GeV), 0.02 (200 GeV)

$T = 0.124$ (5 GeV), 0.160 (17 GeV), 0.1605 (62.4 GeV and 200 GeV)
(Andronic et al., Nucl.Phys. A772 (2006) 167)

ω , c_s^2 , c , (ε (Ours I)) は free parameters

3つの解による π, K スペクトルの解析



3つの解のパラメータの比較

パラメータ ω の比較

data	Landau	Srivastava	Ours I
π^- (200 GeV)	1.77 ± 0.03	1.09 ± 0.15	1.55 ± 0.15
π^+ (200 GeV)	1.84 ± 0.02	1.73 ± 0.02	1.86 ± 0.02
K^- (200 GeV)	1.58 ± 0.05	0.90 ± 0.20	1.40 ± 0.14
K^+ (200 GeV)	2.49 ± 0.02	2.24 ± 0.04	2.28 ± 0.04
π^- (62.4 GeV)	1.61 ± 0.01	0.48 ± 0.02	0.86 ± 0.02
π^+ (62.4 GeV)	1.49 ± 0.16	0.43 ± 0.02	0.77 ± 0.03
K^- (62.4 GeV)	1.22 ± 0.23	0.41 ± 0.13	0.68 ± 0.09
K^+ (62.4 GeV)	1.40 ± 0.08	0.66 ± 0.12	1.16 ± 0.18

y の積分範囲 $[-y_0, y_0]$

Landau: $y_0 = \omega / \sqrt{c_s^2}$

Srivastava, Ours:

$$y_0 = \omega / \sqrt{c_s^2} + \delta \quad (\delta = 2)$$

近似的な不等式

$\omega(L) > \omega(OI) > \omega(S)$ が成立

パラメータ c_s^2 の比較 ($c_s^2 \leq 1/3$)

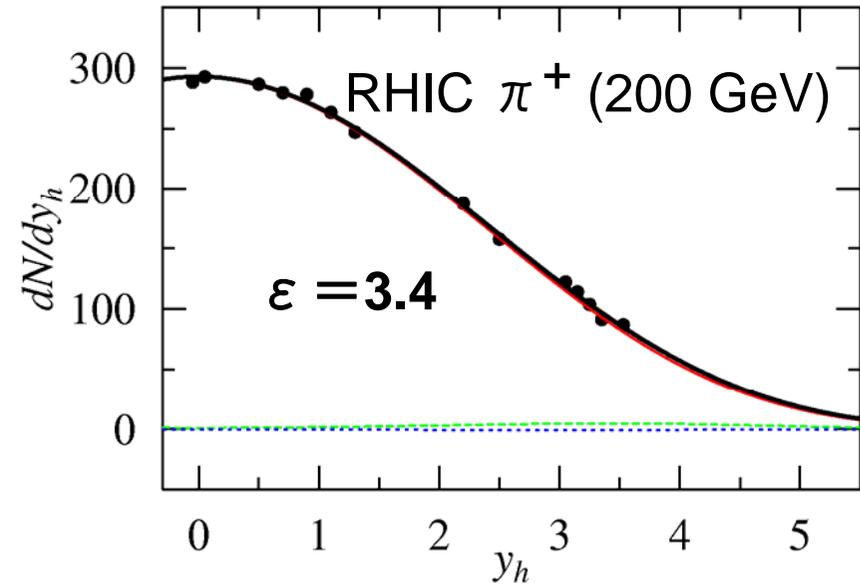
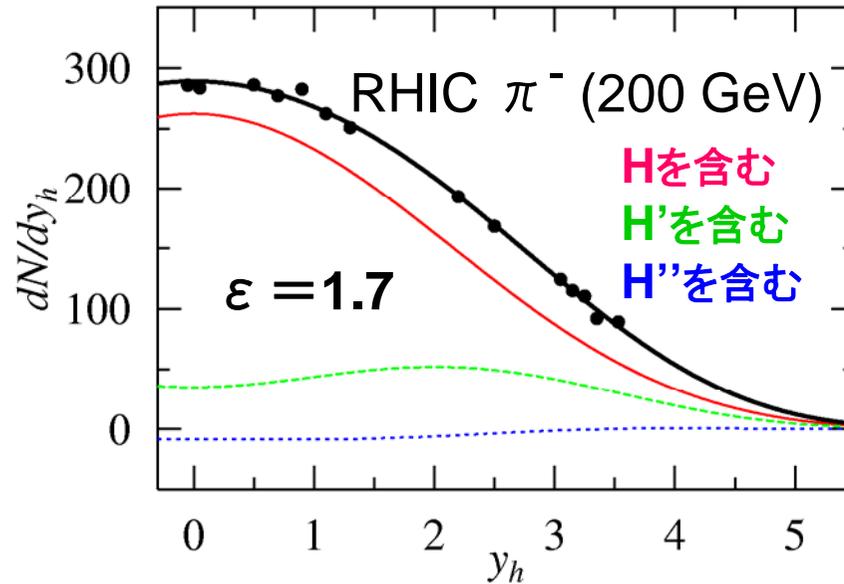
data	Landau	Srivastava	Ours I	ε (Ours I)
π^- (200 GeV)	0.19	0.25	0.28	1.7
π^+ (200 GeV)	0.14	0.13	0.11	3.4
K^- (200 GeV)	0.18	0.24	0.17	6.2
K^+ (200 GeV)	0.07	0.10	0.11	2.5
π^- (62.4 GeV)	0.33	0.33	0.33	3.2
π^+ (62.4 GeV)	0.30	0.33	0.33	2.5
K^- (62.4 GeV)	0.19	0.24	0.33	2.1
K^+ (62.4 GeV)	0.18	0.24	0.22	3.7

Ours I のHeaviside関数の微分項の割合

Ours I の entropy 分布

$$\frac{dS}{dy} \sim \left[\beta(\beta + 1)I_0(p) + \frac{\beta^2(p^2 + p^2(2\beta + 1)\omega - \beta^2\omega^2)I'_0(p)}{p^3} + \frac{\beta^4\omega^2 I''_0(p)}{p^2} \right] H(\varepsilon, Q)$$
$$+ \left[(2\beta + 1)I_0(p) + \frac{2\beta^2\omega I'_0(p)}{p} \right] H'(\varepsilon, Q) + I_0(p)H''(\varepsilon, Q).$$

Heaviside 関数を含んだ解 (Ours I) の各項の分布



ε が大きいとき、Heaviside関数の微分項の寄与は小さい。

Summary I: Heaviside関数を含む解 I (Ours I)

- Heaviside関数を含んだ(1+1)次元の流体模型の解を導き、RHICの π , K のデータを解析した。
- Landau, Srivastava, Ours I の分布はほぼ同じだが、パラメータの値には違いがある。
- Ours I のHeaviside関数の微分項の割合は、 ε に依存している。
- Ours I と同じ形の解がPRC78(2008)Decに印刷された。
(Beuf et al., Phys.Rev.C78 (2008) 064909)

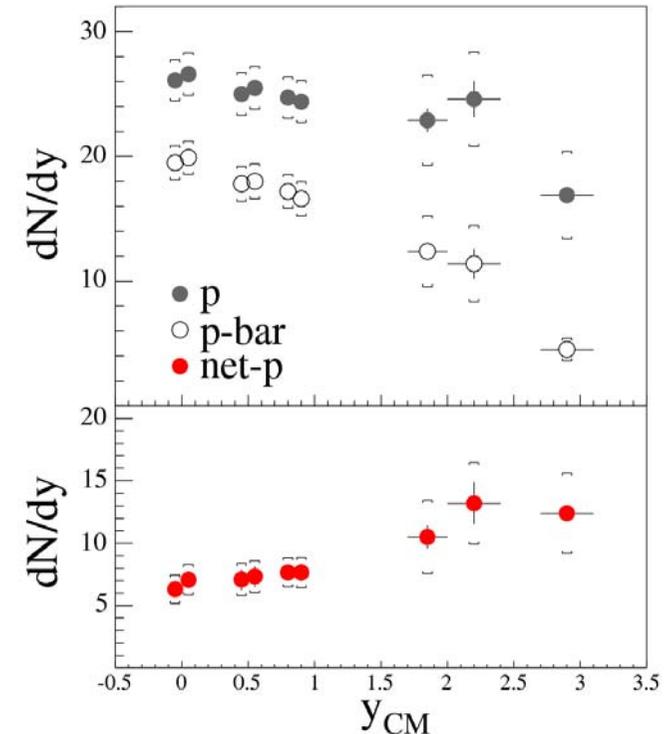
今回の仕事の動機：Heaviside関数を含む解 I I

- Heaviside関数を含む解 I (Ours I)
- Bialasのご宣託: Landauモデルでは、RHICのprotonスペクトルは説明できない。
- 数値的な部分的な解は、2002年に森田他によって与えられている。

(Morita, Muroya, Nonaka, Hirano, Phys.Rev. C66 (2002) 0549)

- 物性論で取り扱われている「相対論的なブラウン運動の方程式と解」に結びつく。

(Masoliver, Weiss, Eur. J. Phys. 17 (1996)190)



BRAHMS Coll., PRL93
(2004)102301

Morse, Feshbach, Methods of Theoretical Physics, 7.4節 「Green's Function for Diffusion」

- 電信方程式 $\nabla^2\psi = a^2(\partial\psi/\partial t) + (1/c^2)(\partial^2\psi/\partial t^2)$

- Green関数の方法

$$\nabla^2 G - a^2(\partial G/\partial t) - (1/c^2)(\partial^2 G/\partial t^2) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t - t_0)$$

- 1次元の初期値問題の解

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}a^2c^2t}[\psi_0(x + ct) + \psi_0(x - ct)] \\ & + e^{-\frac{1}{2}a^2c^2t} \int_{x-ct}^{x+ct} \left\{ \frac{a^2c}{4} I_0\left[\frac{1}{2}a^2c \sqrt{c^2t^2 - (x_0 - x)^2}\right] \right. \\ & + \left. \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} I_0\left[\frac{1}{2}a^2c \sqrt{c^2t^2 - (x_0 - x)^2}\right] \right\} \psi_0(x_0) dx_0 \\ & + \frac{1}{2c} e^{-\frac{1}{2}a^2c^2t} \int_{x-ct}^{x+ct} I_0\left[\frac{1}{2}a^2c \sqrt{c^2t^2 - (x_0 - x)^2}\right] v_0(x_0) dx_0 \\ & \psi_0(x_0) = \psi(x_0, t = 0), \quad v_0(x_0) = \partial\psi/\partial t|_{t=0} \text{ (初期値)} \end{aligned}$$

- Landau 流体との対応関係

$$\chi \leftrightarrow \psi, \quad c_s^2 \leftrightarrow 1/c^2, \quad (1 - c_s^2) \leftrightarrow a^2, \quad \omega \leftrightarrow t, \quad y \leftrightarrow x$$

Finite-velocity diffusion

Masoliver, Weiss, Eur. J. Phys. 17 (1996)190

- 1次元の電信方程式

$$\frac{\partial^2 c}{\partial t^2} + \frac{1}{T} \frac{\partial c}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

で, $T \rightarrow 0, v \rightarrow \infty$ の極限をとり, $v^2 T \rightarrow D$ とすると, 拡散方程式

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

が得られる。

- 有限の速度を持つ拡散過程がブラウン運動のモデルとなり, 電信方程式で記述される。

Heaviside関数を含む解 II (Ours II)

拡散過程との類推からMorse, Feshbachの解に初期条件として以下を仮定する。

$$\psi_0(x) \rightarrow \delta(y), \quad v_0(x) = 0, \quad p = \beta \sqrt{\omega^2 - c_s^2 y^2}$$

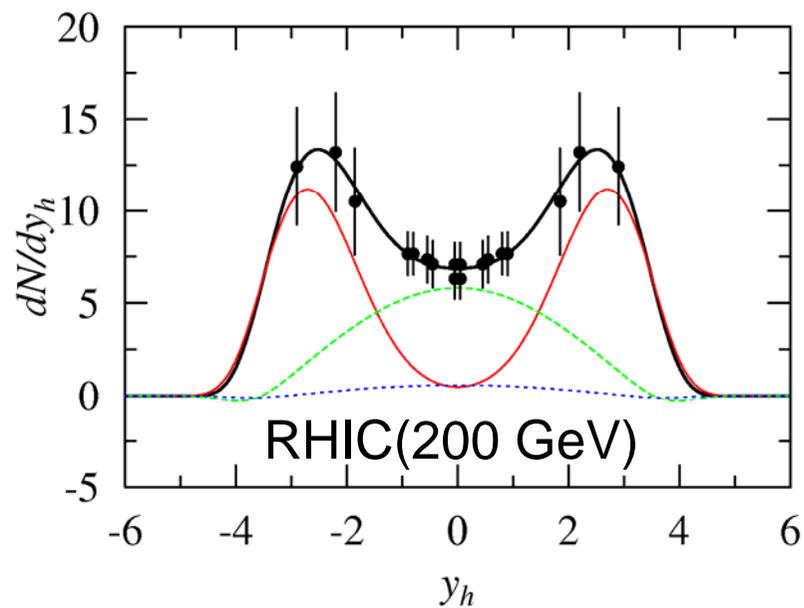
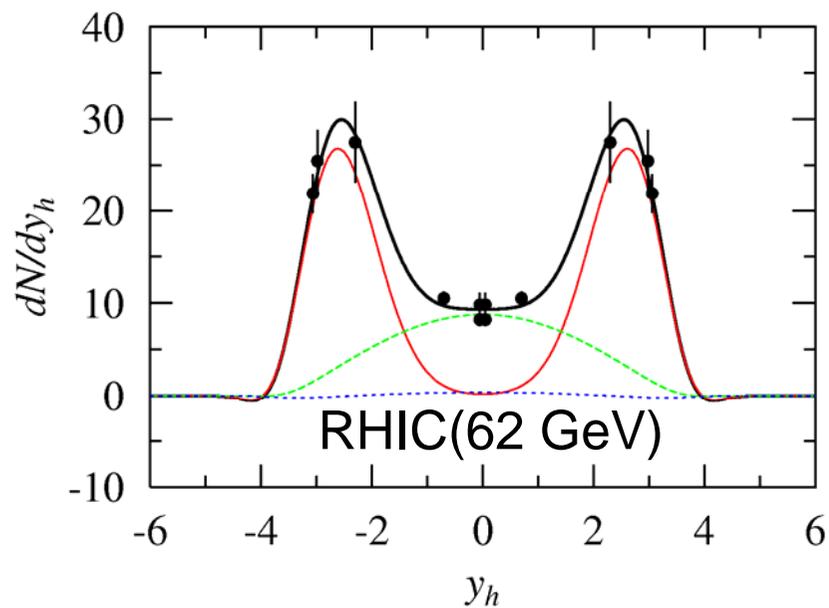
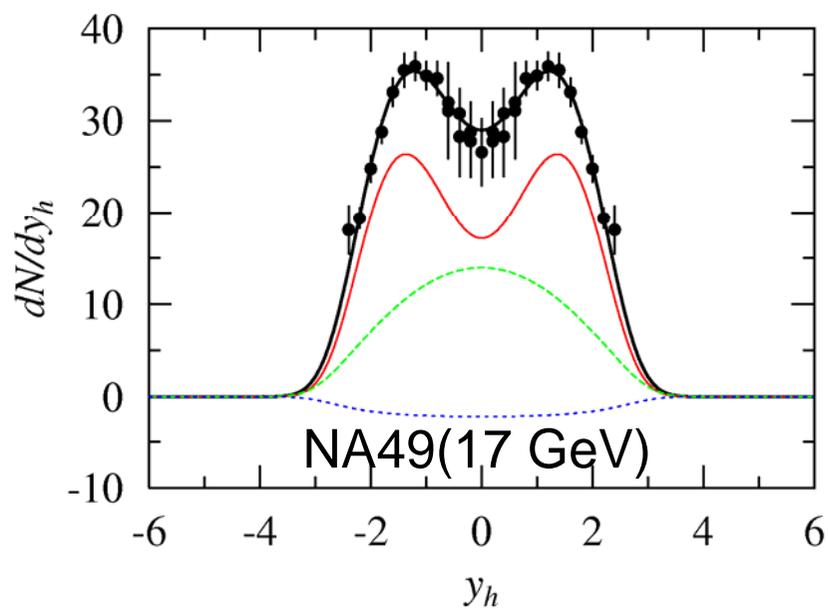
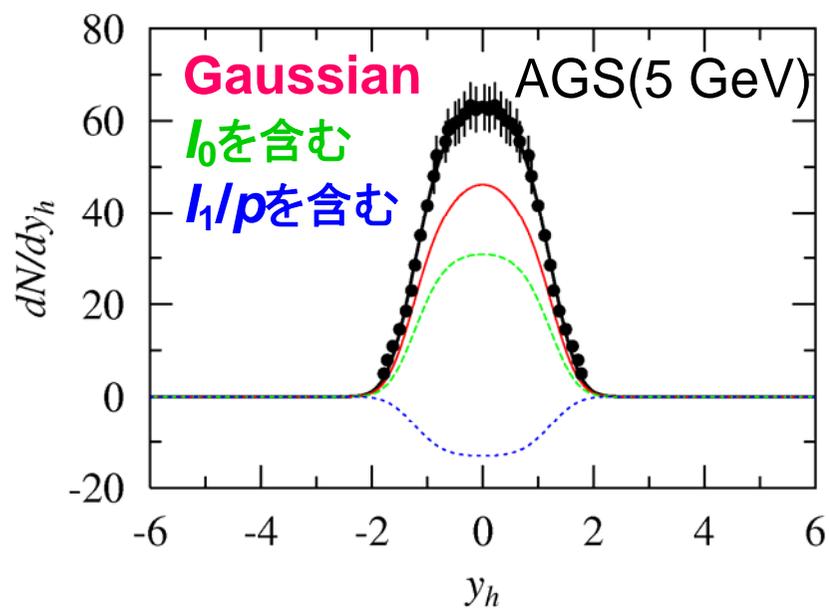
$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{2} e^{-\beta\omega} \left\{ \underbrace{[\delta(y - \omega/c_s) + \delta(y + \omega/c_s)]}_{g(\omega)} + \underbrace{c_s \beta [I_0(p) + \beta \omega I_1(p)/p]}_{f(\omega)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} e^{-\beta\omega} \{g(\omega) + f(\omega)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dy} &\sim \beta(\beta + 1)[g(\omega) + f(\omega) H(\varepsilon, Q)] \\ &\quad - (2\beta + 1)[g'(\omega) + f'(\omega) H(\varepsilon, Q) + f(\omega) H'(\varepsilon, Q)] \\ &\quad + g''(\omega) + f''(\omega) H(\varepsilon, Q) + 2f'(\omega) H'(\varepsilon, Q) + f(\omega) H''(\varepsilon, Q) \end{aligned}$$

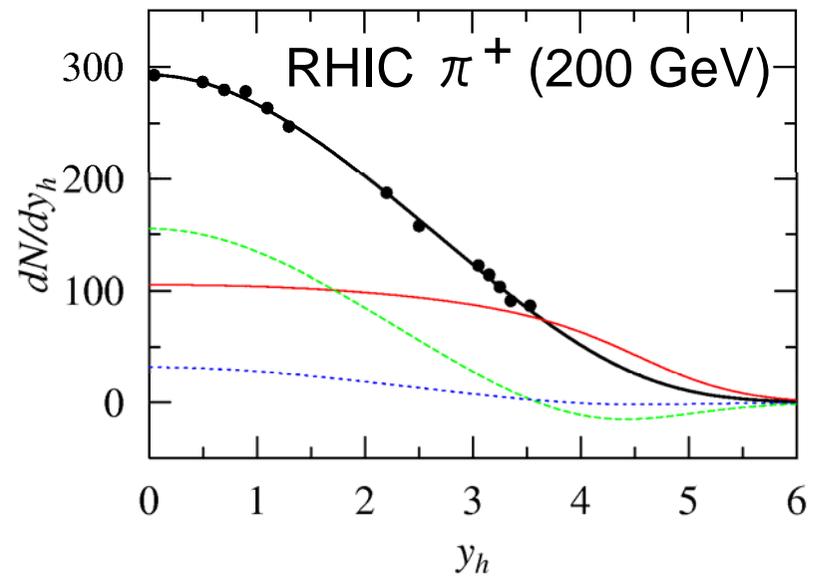
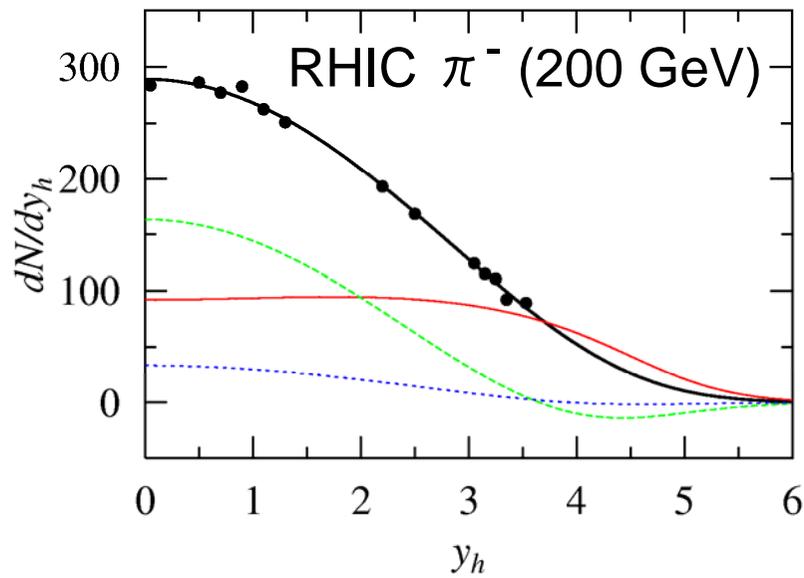
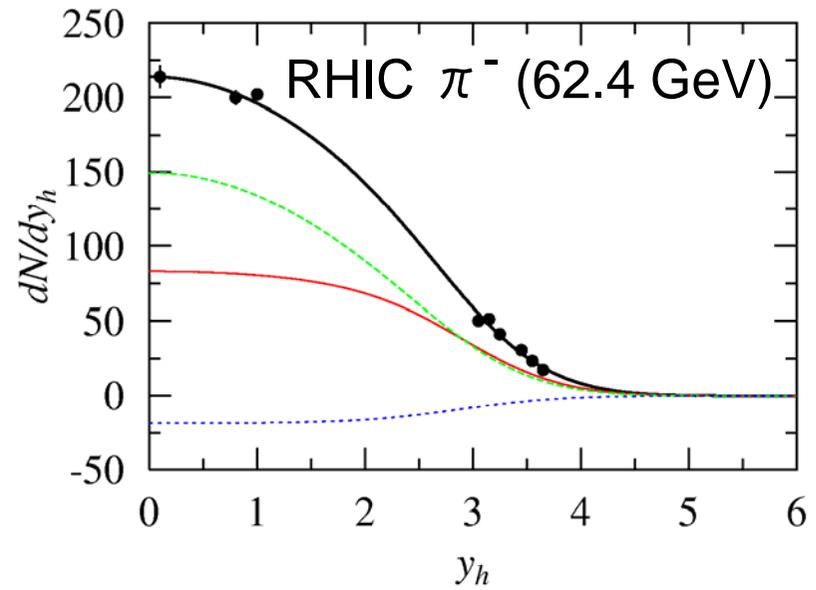
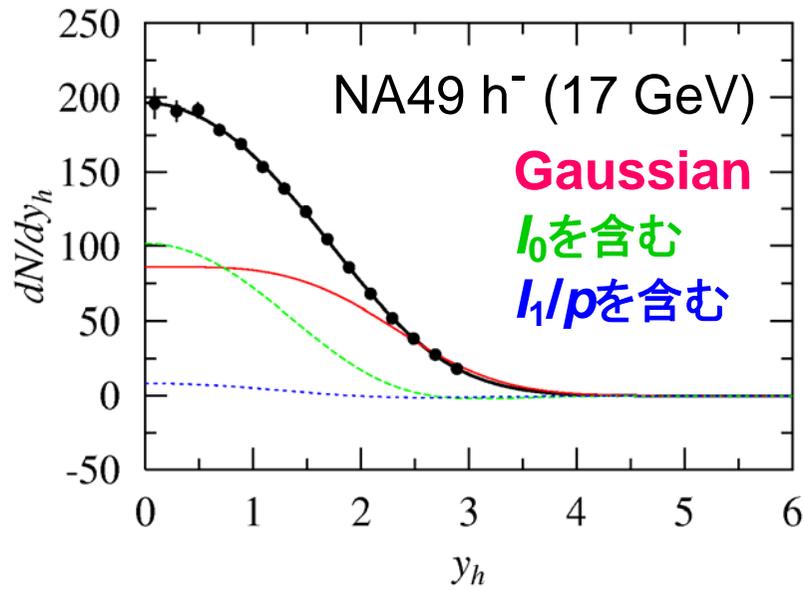
$$\delta(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \text{ (Gaussian), } H'(\varepsilon, Q) = H''(\varepsilon, Q) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dy} &\sim \beta(\beta + 1)[g(\omega) + f(\omega) H(\varepsilon, Q)] \\ &\quad - (2\beta + 1)[g'(\omega) + f'(\omega) H(\varepsilon, Q)] + g''(\omega) + f''(\omega) H(\varepsilon, Q) \end{aligned}$$

Ours II によるnet-proton スペクトルの解析



Ours II による π (h^-) スペクトルの解析



Ours II によるパラメータ

data	ω	c_s^2	σ^2	ε
AGS (5 GeV) $p - \bar{p}$	0.77	1/3	2.65	10.1
NA49 (17 GeV) $p - \bar{p}$	1.61	1/3	1.22	3.2
RHIC (62.4 GeV) $p - \bar{p}$	2.19	1/3	0.69	11.6
RHIC (200 GeV) $p - \bar{p}$	2.36	1/3	1.19	10.2
NA49 (17 GeV) h^-	1.08	0.17	1.71	9.3
RHIC (62.4 GeV) π^-	1.71	1/3	18.7	23.0
RHIC (62.4 GeV) π^+	1.65	1/3	18.8	43.1
RHIC (200 GeV) π^-	2.69	1/3	6.59	1.69
RHIC (200 GeV) π^+	2.69	1/3	9.67	0.60

Ours II によるnet-protonの初期温度の推定

data	面積	ω	T_f (GeV)	$T_0 = T_f e^\omega$ (GeV)
AGS (5 GeV) $p - \bar{p}$	148	0.77	0.124	0.27
NA49 (17 GeV) $p - \bar{p}$	153	1.61	0.160	0.80
RHIC (62.4 GeV) $p - \bar{p}$	124	2.19	0.1605	1.43
RHIC (200 GeV) $p - \bar{p}$	73	2.36	0.1605	1.69

Summary II

- ・ Bialasのご宣託を覆せた？
- ・ 昔、我々はRHICのデータに確率モデルを適用したが、その基礎付けが出来た？
- ・ net-proton は相対論的ブラウン運動をする？ ← 流体モデルでの粒子分布は、 ω の微分関数なので、対応がずれる。
- ・ 実験における、missing protonの問題(超前方の粒子の分布)が観測不可能？
- ・ LHCの陽子スペクトルへの予言が可能か？
- ・ 1+2次元(y, k_T)の流体力学方程式を調べる？